Ściąga do referatu o twierdzeniu Dirichleta

Damian Orlef

Charaktery

Dla dowolnej skończonej grupy abelowej G, definiujemy grupę $\hat{G}$, składającą się z wszystkich homomorfizmów $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ (w niezerowe liczby zespolone). Jej elementy nazywamy charakterami, a działaniem jest zwykłe mnożenie po wartościach. Elementem neutralnym jest tzw. charakter główny ε stale równy 1: $\forall_{g \in G}\ \varepsilon(g) = 1$.

Fakt 1. *Każde $\chi \in \hat{G}$ przyjmuje tylko wartości o module 1.*

Fakt 2. *Jeśli $H < G$ jest podgrupą i $\psi \in \hat{H}$, to istnieje dokładnie $[G : H]$ takich $\chi \in \hat{G}$, że $\chi|_H = \psi$.*

Fakt 3. $|G| = |\hat{G}|$ *(prosty wniosek z poprzedniego faktu)*

Fakt 4. *Jeśli $G = \langle a \rangle$ jest grupą n-elementową generowaną przez a, to $\hat{G} = \{\psi_k : 0 \leqslant k < n\}$, gdzie $\psi_k(a^j) = e^{\frac{2\pi jki}{n}}$ dla $0 \leqslant i, j < n$.*

Fakt 5. *Jeśli $\chi \in \hat{G}$, to*

$$\sum_{a \in G} \chi(a) = \begin{cases} |G| & \textit{jeśli } \chi = \varepsilon \\ 0 & \textit{jeśli } \chi \neq \varepsilon. \end{cases}$$

Fakt 6. *Jeśli $a \in G$, to*

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) = \begin{cases} |G| & \textit{jeśli } a = e \\ 0 & \textit{jeśli } a \neq e. \end{cases}$$

W dowodzie przyjmujemy $G = \mathbb{Z}_N^*$ będące grupą reszt modulo N względnie pierwszych z N, z działaniem mnożenia.

Dla $G = \mathbb{Z}_N^*$ każdy charakter $\chi \in \hat{G}$ możemy traktować jako funkcję $\chi : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ poprzez redukcję argumentu modulo N i uzupełnienie zerami, tzn:

$$\chi(a) = \begin{cases} \chi(a + N\mathbb{Z}) & \text{jeśli } NWD(a, N) = 1 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Zbiór tak rozszerzonych charakterów oznaczamy przez X_N.

Własności L-funkcji Dirichleta

Zmienna s jest rzeczywista, zaś wartości funkcji zespolone. Gdy piszemy $f(s) = g(s) + O(h(s))$ mamy na myśli istnienie stałej $C > 0$, dla której $|f(s) - g(s)| \leqslant Ch(s)$ dla $1 < s < 2$.

$N > 1$ jest całkowite. Dla $\chi \in X_N$ definiujemy $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ (tam, gdzie szereg jest zbieżny).

Fakt 7. *Jeśli $\chi = \varepsilon$, to $L(s, \chi)$ jest zbieżny dla $s > 1$, a gdy $\chi \neq \varepsilon$, to $L(s, \chi)$ jest zbieżny dla $s > 0$.*

Fakt 8. *Dla $s > 1$ i $\chi \in X_N$ zachodzi*

$$L(s, \chi) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

Fakt 9. *Jeśli $\chi = \varepsilon$, to*

$$\lim_{s \to 1^+} (s - 1) L(s, \chi) = \frac{\Phi(N)}{N}$$

Fakt 10. *Jeśli $\chi \neq \varepsilon$, to $L(s, \chi) = L(1, \chi) + O(s - 1)$, a w szczególności*

$$\lim_{s \to 1^+} L(s, \chi) = L(1, \chi).$$