Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Damian Sawicki
Nr albumu: 292451

Funkcje liniowe w geometrii wielkiej skali: quasi-izometrie i wymiar asymptotyczny Assouada-Nagaty

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra Tadeusza Koźniewskiego
Instytut Matematyki

czerwiec 2012

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Praca poświęcona jest zagadnieniom zgrubnej geometrii odwołującym się do funkcji liniowych (afinicznych) lub asymptotycznego zachowania funkcji, a więc niezmienniczym względem quasi-izometrii. Badana jest zmienność tych charakterystyk w obrębie klasy przestrzeni zgrubnie równoważnych. W szczególności pokazujemy, że dla dowolnej przestrzeni metrycznej o ustalonym wymiarze asymptotycznym istnieje zgrubnie i homeomorficznie równoważna metryka hiperboliczna, w której przestrzeń ma taki sam wymiar asymptotyczny Assouada-Nagaty. Prezentujemy twierdzenie logarytmiczne dla wymiaru produktu oraz twierdzenie typu Hurewicza dla wymiaru asymptotycznego i innych rozważanych wariantów wymiaru.

Słowa kluczowe

quasi-izometria, wymiar asymptotyczny, przestrzeń metryczna

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

54 General topology
54E. Spaces with richer structures
54E40. Special maps on metric spaces

Tytuł pracy w języku angielskim

Linear functions in large scale geometry:
quasi-isometries and asymptotic Assouad-Nagata dimension

Spis treści

Wprowadzenie

Geometria wielkiej skali Geometria wielkiej skali – nazywana również topologią wielkiej skali – bada przestrzenie metryczne[1], „patrząc na nie z dużych odległości”. O ile z punktu widzenia klasycznej topologii, metryki $d(.)$ oraz $\min(d(.), c)$ są równoważne ($c > 0$), a więc duże wartości metryki są ignorowane (chociaż c można ustalić dowolnie małe w zależności od potrzeb), o tyle topologia wielkiej skali lekceważy to, co dzieje się lokalnie. Dlatego też bywa nazywana „zgrubną geometrią”. Dobrą ilustracją tego podejścia jest następujące utożsamienie: przestrzeń metryczną oraz jej podzbiór Y taki, że pewna jego R-otoczka $N_R(Y)$ jest całą przestrzenią, uznaje się za równoważne. W szczególności każda przestrzeń ograniczona jest równoważna przestrzeni jednopunktowej.

Historia i zastosowania dziedziny Chociaż takie podejście do przestrzeni metrycznych może wydawać się obce topologii lub wręcz bezużyteczne, nie zostało ono wprowadzone bez powodu. Historia dziedziny ma już blisko pół wieku. Pierwsze idee należące do geometrii wielkiej skali pojawiły się u Mostowa (twierdzenie o sztywności - Mostow rigidity theorem), a potem u Gromova (dowód hipotezy Milnora). Zgrubna topologia znalazła zastosowania w takich dziedzinach matematyki jak nieprzemienna geometria, analiza funkcjonalna, czy geometria różniczkowa. Jednym z nowszych i ważnych wyników jest opublikowane w 1998 r. przez Yu [Yu98] następujęce twierdzenie o słynnej hipotezie Novikova, które zwiększyło zainteresowanie teorią wymiaru asymptotycznego (zgrubnego odpowiednika wymiaru pokryciowego) i poprzedziło całą serię podobnych wyników[2].

Twierdzenie 0.1. *Niech Γ będzie skończenie generowaną grupą, której przestrzeń klasyfikująca $B\Gamma$ jest homotopijna z pewnym skończonym CW-kompleksem i której wymiar asymptotyczny* $\mathrm{asdim}\Gamma$ *jest skończony. Wówczas dla Γ prawdziwa jest hipoteza Novikova.*

W 2004 [Dr04] zostało ono uogólnione przez Dranishnikova do twierdzenia prezentowanego poniżej. Mówi ono o prawdziwości hipotezy Novikova w sytuacji, gdy wymiar asympotyczny grupy Γ może być co prawda nieskończony, ale tzw. funkcja wymiaru nie rośnie zbyt szybko.

Twierdzenie 0.2. *Niech Γ będzie skończenie generowaną grupą i niech funkcja wymiaru dla Γ ma co najwyżej wielomianowe tempo wzrostu. Wówczas Γ ma własność A, w szczególności dla Γ prawdziwa jest hipoteza Novikova*[3].

[1] A także pewne uogólnienia przestrzeni metrycznych.

[2] Por. wstęp do [BD07] i dwa ostatnie rozdziały [BD05].

[3] Definicję własności A przestrzeni metrycznej można znaleźć w [Yu00]. Własność A jest niezminnikiem quasi-izometrii, czyli nie zależy od obranej metryki długości słowa na Γ, a zatem można jednoznacznie mówić o własności A skończenie generowanej grupy Γ.

Tematy poruszane w tej pracy a szerszy kontekst Zgodnie z tytułem, w niniejszej pracy ze szczególną uwagą omawiane są te zagadnienia geometrii zgrubnej, w których pojawiają się funkcje afiniczne. W praktyce oznacza to, że funkcje, których odpowiedniki w ogólnej teorii geometrii zgrubnej mogą być dowolne lub rozbieżne do nieskończoności, będą musiały być (ponadto) afiniczne. Powyższe twierdzenia przytoczono m.in. po to, by ukazać kontekst zagadnień, które zostaną omówione. Pierwsze twierdzenie odnosi się do klasycznego już – jak na standardy dziedziny – pojęcia wymiaru asymptotycznego wprowadzonego przez Gromova na początku lat 90-tych [Gr93]. Tutaj omówimy zmodyfikowane nieco definicje wymiaru asymptotycznego (przede wszystkim wymiar asymptotyczny Assouada-Nagaty $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$ a także liniowo kontrolowany wymiar asymptotyczny l-asdim), konfrontując je z definicją oryginalną. Wiele zaprezentowanych wyników będzie prawdziwych w przypadku zarówno asdim jak i $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$ (lub nawet l-asdim i innych). Najważniejsze z tych twierdzeń to twierdzenie „logarytmiczne" szacujące wymiar iloczynu kartezjańskiego przestrzeni przez sumę wymiarów czynników oraz twierdzenie typu Hurewicza szacujące wymiar dziedziny przez sumę wymiaru obrazu i tak zwanego wymiaru funkcji. Drugie z cytowanych twierdzeń jeszcze bliżej dotyka kwestii podejmowanych w tej pracy. Będziemy bowiem pokazywać, że pojawiające się w jego sformułowaniu tempo wzrosu funkcji wymiaru jest niezmiennikiem badanych przez nas quasi-izometrii, a nie jest niezmiennikiem klasycznie rozumianej zgrubnej równoważności.

Quasi-izometrie Niejako centralnym punktem wszystkich rozważań będą quasi-izometrie, których niezmiennikami jest – oprócz wyżej wspomnianego tempa wzrostu funkcji wymiaru – wymiar asymptotyczny Assouada-Nagaty $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$ oraz liniowo kontrolowany wymiar asympotyczny l-asdim (które jednak nie muszą być zachowywane przez zgrubne równoważności), a także wymiar asymptotyczny, jako że quasi-izometria jest szczególnym przypadkiem zgrubnej równoważności. Wskażemy przykłady przestrzeni quasi-izometrycznych i – znajdując odpowiednie niezmienniki quasi-izometrii – udowodnimy, że pewne przestrzenie nie mogą być quasi-izometryczne (chociaż są zgrubnie równoważne). Mówiąc o quasi-izometriach, warto zaznaczyć, że w pewnym sensie lepiej odpowiadają one intuicji patrzenia z dużej (dążącej do nieskończoności) odległości aniżeli zgrubne równoważności. Przestrzenie są quasi-izometryczne, jeżeli odległości między punktami w jednej przestrzeni szacują się z góry i z dołu przez afiniczne funkcje od odległości odpowiednich punktów w drugiej przestrzeni. Oznacza to, że asymptotyczne zachowanie metryki jest takie samo (z dokładnością do pewnych stałych) w obu przestrzeniach, co nie musi być prawdą w przypadku zgrubnej równoważności, a co wydaje się własnością pożądaną.

Wkład własny autora Poza zebraniem, przetłumaczeniem, korektą i podsumowaniem dotychczas publikowanych rezultatów, a także ujednoliceniem / modyfikacją definicji i sformułowań twierdzeń tak, aby zminimalizować złożoność dowodów i podkreślić związki między pojęciami, oraz uzupełnieniem brakujących dowodów (2.16, 2.19, 2.21), autor znalazł samodzielnie kilka odpowiedzi, zależności i przykładów. Można tu wymienić konstrukcję (poprzez homeomorficzną zmianę metryki) zgrubnie równoważnej przestrzeni o dowolnie dużej funkcji wymiaru (2.28) lub afinicznej funkcji kontroli (co zaświadcza o zgrubnej trywialności wymiaru asymptotycznego Assouada-Nagaty i jest chyba największym osiągnięciem niniejszej pracy, 3.18) oraz rozwiązania dwóch problemów Dranishnikova[4](3.26, 3.27). Ponadto większość prezentowanych przykładów pochodzi od autora (dla pozostałych podano źródło) – w szczególności znaleziono pewne niezmienniki quasi-izometrii świadczące o tym, że prezentowane w odpowiednich przykładach przestrzenie nie są quasi-izometryczne. Skonstruowano przestrzeń o dowolnie wolno rosnącej funkcji wymiaru (2.24) lub podliniowej funkcji kontroli

(3.4). Wprowadzono też pojęcie funkcji objętości (również niezmiennik quasi-izometrii), która pozwala w elementarny sposób odróżniać od siebie przestrzenie $\mathbb{R}^n$ ze zgrubnego punktu widzenia. Sformułowano prosty warunek równoważny quasi-geodezyjności przestrzeni, uwagę o trywialnej równoważności warunków dotyczących wymiaru asymptotycznego (2.17) i wskazano na ciekawe zależności między różnymi definicjami wymiaru przy odpowiednich założeniach (3.14, 3.20, 3.25).

[4] Problemy te zostały opublikowane i rozwiązane (innymi metodami niż w niniejszej pracy) np. w [BDLM]. Zdaniem autora przykłady z [BDLM] są w pewnym sensie mocniejsze, jednak własne przykłady uważa za prostsze.

Część I

Równoważności przestrzeni metrycznych w wielkiej skali

Rozdział 1

Quasi-izometrie i zgrubne równoważności

1.1. Definicje i warunki równoważne

W rozdziale wprowadzamy definicje fundamentalne dla niniejszej pracy i prezentujemy podstawowe fakty/przykłady.

Definicja 1.1. *Funkcją zgrubnie jednostajną między przestrzeniami metrycznymi $f : X \to Y$ nazywamy dowolną funkcję f, dla której istnieje taka niemalejąca funkcja $C_f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, że prawdziwa jest nierówność:*

$$d'\Big(f(x_1), f(x_2)\Big) \leqslant C_f\Big(d(x_1, x_2)\Big) \quad \forall_{x_1,x_2 \in X},$$

gdzie d, d' to metryki odpowiednio na X, Y.

Funkcja zgrubnie jednostajna (*large-scale uniform*) to wg nazewnictwa [Ro03] funkcja bornologiczna (*bornologous*).

Uwaga 1.2. *Funkcję C_f z powyższej definicji nazywać będziemy funkcją kontroli funkcji f („coarseness control function" wg [BDLM]) i niekiedy będziemy dopuszczać, by przyjmowała wartości nieskończone.*

Definicja 1.3. *Funkcja lipschitzowska wielkiej skali*[1] *(w skrócie ws-lipschitzowska) to taka funkcja bornologiczna, dla której istnieje afiniczna funkcja kontroli:*

$$d'\Big(f(x_1), f(x_2)\Big) \leqslant C \cdot d(x_1, x_2) + a \quad \forall_{x_1,x_2 \in X}.$$

Będziemy też pisać, że taka funkcja jest (C,A)-ws-lipschitzowska.

Zauważmy, że złożenie funkcji zgrubnie jednostajnych jest zgrubnie jednostajne, a złożenie funkcji ws-lipschitzowskich jest ws-lipschitzowskie.

Definicja 1.4. *Dwie funkcje $f_1, f_2 : X \to Y$ między przestrzeniami metrycznymi są bliskie*[2]*, jeżeli $M = \sup\{d'(f_1(x), f_2(x)) \mid x \in X\} < \infty$, gdzie d' jest metryką na Y. Będziemy oznaczać $f_1 \sim f_2$.*

---

[1] Ang.: large scale Lipschitz
[2] Ang.: close.

Zauważmy, że powyższe definiuje relację równoważności na funkcjach $X \to Y$. Relacja ta dobrze zachowuje się przy składaniu funkcji zgrubnie jednostajnych: jeśli $f \sim_{X,Y} f'$, $h \sim_{Y,Z} h'$ (wszystkie zgrubnie jednostajne), to $h \circ f \sim_{X,Z} h' \circ f'$.

Przedstawmy podstawowe pojęcie zgrubnej geometrii.

Definicja 1.5. *Dwie przestrzenie metryczne (X, d), (Y, d') są zgrubnie równoważne[3], jeżeli istnieje para funkcji $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ zgrubnie jednostajnych takich, że $f \circ g \sim id_X$ oraz $g \circ f \sim id_Y$.*

Dzięki przechodniości dla bliskości funkcji zgrubna równoważność przestrzeni również ma własność przechodniości.

Zauważmy, że powyższa definicja opiera się na identycznym schemacie jak inne matematyczne pojęcia służące utożsamianiu różnych obiektów: izomorfizmy w algebrze, homeomorfizmy lub homotopijne równoważności przestrzeni topologicznych.

Definicja 1.6. *Powiemy, że podzbiór A przestrzeni metrycznej X jest zgrubnie gęsty w X, jeśli pewna jego R-otoczka ($R < \infty$) jest całą przestrzenią: $N_R(A) = X$.*

Przykład 1.7. *Dla dowolnego zgrubnie gęstego podzbioru A przestrzeni metrycznej X przestrzenie (X, d) oraz $(A, d_{|A \times A})$ są zgrubnie równoważne.*

Dowód. Istnieje R takie, że $N_R(A) = X$, zatem dla każdego $x \in X \setminus A$ istnieje $a_x \in A$ takie, że $d(x, a_x) \leqslant R$. Zdefiniujmy $f : X \to a \subseteq X$. Niech $f_{|X \setminus A}(x) = x_a$ oraz $f_{|A}(a) = a$. Odnotujmy, że f jest R-bliskie id_X, zatem $d(f(x), f(x')) \leqslant d(x, x') + 2R$, więc funkcją kontroli dla f jest $C_f(r) = r + 2R$. Niech g będzie naturalnym włożeniem A w X ($C_g(r) = r$). Złożenie $f \circ g = id_A$, złożenie $g \circ f = f \sim id_X$. □

Stwierdzenie 1.8 (Charakteryzacja zgrubnych równoważności).
Przestrzenie metryczne $(X, d), (Y, d')$ są zgrubnie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekszatałcenie $f : X \to Y$, którego obraz jest zgrubnie gęsty w X, oraz monotoniczne i rozbieżne do nieskończoności funkcje $C, c\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ takie, że spełniona jest nierówność:

$$c\big(d(x_1, x_2)\big) \leqslant d'(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C\big(d(x_1, x_2)\big).$$

Dowód. $\Longrightarrow$ Zauważmy najpierw, że gdy Y jest przestrzenią ograniczoną, to X też – złożenie[4] $g \circ f$ jest funkcją ograniczoną, jako złożenie funkcji ograniczonej i zgrubnie jednostajnej, a ponieważ jest bliskie id_X, więc id_X jest funkcją ograniczoną, czyli $X = \mathrm{im}(id_X)$ jest przestrzenią ograniczoną. Wówczas implikacja jest trywialna. Dalej zakładamy, że X, Y oraz f, g są nieograniczone.

Za funkcję f z tezy przyjmiemy f z definicji zgrubnej równoważności. Prawą nierówność mamy za darmo, wystarczy wykazać lewą. Niech M oznacza stałą zaświadczającą o bliskości funkcji $f \circ g$ i id_X. Mamy więc

$$d(x_1, x_2) - 2M \leqslant d(g(f(x_1)), g(f(x_2)) \leqslant C_g\Big(d'(f(x_1), f(x_2))\Big).$$

Niech $C_g^{-1}\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ będzie dane wzorem: $C_g^{-1}(r) = \inf\{s \in \mathbb{R}^+ \mid C_g(s) \geqslant r\}$. Z nieograniczoności g wynika nieograniczoność C_g, a zatem zbiór, którego infimum liczymy jest

[3] Ang.: coarsely equivalent.

[4] Złożenie funkcji f, g z definicji zgrubnej równoważności.

zawsze niepusty, C_g^{-1} przyjmuje tylko skończone wartości. Z monotoniczności C_g dostajemy też nieograniczoność C_g^{-1}. Mamy zatem:

$$C_g^{-1}\Big(d(x_1,x_2)-2M\Big) \leqslant C_g^{-1}\bigg(C_g\Big(d'(f(x_1),f(x_2))\Big)\bigg) \leqslant d'(f(x_1),f(x_2)),$$

i zauważenie monotoniczności oraz nieograniczoności funkcji $c(r) = C_g^{-1}(r-2M)$ kończy dowód.

$\Longleftarrow$ Niech funkcja f z definicji będzie funkcją f z uwagi. Jest ona oczywiście zgrubnie jednostajna wobec prawej nierówności. Niech funkcja $g_0 : \mathrm{im}(f) \to X$ spełnia $f \circ g_0(y) = y$ (pewnik wyboru). Jest ona zgrubnie jednostajna: jeśli $d'(y_1,y_2) \leqslant R$, to mamy:

$$c\Big(d(g_0(y_1),g_0(y_2))\Big) \leqslant d'(f\circ g_0(y_1), f\circ g_0(y_2)) = d'(y_1,y_2) \leqslant R$$

i z tego, że c rozbiega monotonicznie do nieskończoności, wnioskujemy, że $d(g_0(y_1), g_0(y_2)$ jest ograniczone przez pewnną stałą.

Niech z kolei $i_Y : Y \to \mathrm{im}(f)$ spełnia: $i_{Y|\mathrm{im}(f)} = id_{\mathrm{im}(f)}$ oraz $i_Y \sim id_Y$ (wystarczy wziąć funkcję $g : Y \to \mathrm{im}(f)$ z dowodu przykładu 1.7). Niech $g = g_0 \circ i_Y$ (zgrubnie jednostajna jako złożenie zgrubnie jednostajnych). Mamy $f \circ g_0 = id_{\mathrm{im}(f)}$, zatem $f \circ g = f \circ g_0 \circ i_Y \sim id_{\mathrm{im}(f)} \circ i_Y = i_Y \sim id_Y$.

Zauważmy, że $f(g\circ f(x)) = f\circ g(f(x)) = f(x)$. Z lewej nierówności dostatecznie duża odległość x oraz $g \circ f(x)$ implikuje nierówność ich obrazów przy f, więc $d(x, g\circ f(x))$ szacuje się przez pewną stałą N, co oznacza, że $g \circ f \sim id_X$. □

Warto wspomnieć w tym miejscu, że [Ro03] w definicji zgrubnej równoważności 1.5 żąda od funkcji f oraz g, by były nie tylko zgrubnie jednostajne, ale ponadto metrycznie właściwe (ang. „metrically proper"), tzn. by przeciwobraz zbioru ograniczonego był ograniczony. Funkcje mające obie te własności nazywa zgrubnymi („coarse"). Lewa nierówność powyższej uwagi dowodzi de facto, że wystarczy żądać, by obie funkcje były zgrubnie jednostajne, a wówczas będą musiały też być metrycznie właściwe, a nawet średnica przeciwobrazu będzie się szacowała przez średnicę zbioru (w [Ro03] nazywane jest to efektywną właściwością: „effectively proper", a w połączeniu ze zgrubną jednostajnością daje szorstkość: „rough").

Konwencja 1.9. *Funkcję f z powyższego stwierdzenia będziemy niekiedy nazywać zgrubną równoważnością przestrzeni X i Y. Zauważmy, że złożenie zgrubnych równoważności jest zgrubną równoważnością.*

Definicja 1.10. *Dwie przestrzenie metryczne X, Y nazywamy quasi-izometrycznymi, jeżeli istnieją funkcje ws-lipschitzowskie f, g takie, że $f \circ g \sim id_X$ oraz $g \circ f \sim id_Y$.*

Z faktu, że złożenie funkcji ws-lipschitzowskich jest ws-lipschitzowskie, wynika własność przechodniości quasi-izometryczności.

Stwierdzenie 1.11 (Charakteryzacja quasi-izometryczności)**.** *Quasi-izometryczność przestrzeni X, Y jest równoważna istnieniu przekształcenia $f\colon X \to Y$ takiego, że jego obraz jest zgrubnie gęsty oraz dla pewnych stałych dodatnich spełniona jest podwójna nierówność:*

$$c\cdot d(x_1,x_2) - a \ \leqslant d'(f(x_1),f(x_2)) \leqslant C\cdot d(x_1,x_2) + a\ .$$

Dowód. $\Longrightarrow$ Analogicznie jak w dowodzie uwagi 1.8: jeśli $C_g(r) = Dr + B$, to za C_g^{-1} przyjmujemy[5] $C_g^{-1}(r) = \frac{r-B}{D}$, dostając ostatecznie $\frac{1}{D}d(x,y) - \frac{2M+B}{D} = \frac{d(x,y)-2M-B}{D} \leqslant d'(f(x), f(y))$.

$\Longleftarrow$ Jedynie szacowanie funkcji kontroli dla g i g_0 nie przenosi się wprost z dowodu uwagi 1.8. Twierdzimy, że g_0 jest ws-lipschitozwska ze stałymi $\frac{1}{c}$, $\frac{A}{c}$. Mamy bowiem:

$$\begin{aligned} c \cdot d(x_1, x_2) - a &\leqslant d'(f(x_1), f(x_2)) \\ c \cdot d(g_0(y_1), g_0(y_2)) - a &\leqslant d'(f \circ g_0(y_1), f \circ g_0(y_2)) = d'(y_1, y_2) \\ d(g_0(y_1), g_0(y_2)) &\leqslant \frac{1}{c} \cdot d'(y_1, y_2) + \frac{A}{c} \end{aligned}$$

Funkcja i_Y skonstruowana jak w dowodzie 1.7, jest ws-lipschitzowska ze stałymi mulitplikatywną 1 oraz addytywną $2R$, gdzie R jest stałą odpowiadającą gęstości $\mathrm{im}(f)$ w Y. g jako złożenie jest ws-lipschitzowska. □

Konwencja 1.12. *Jeśli przy oznaczeniach powyższego stwierdzenia zachodzi $c = C^{-1}$, to funkcję f nazywamy (C,A)-quasi-izometrią. Zauważmy, że złożenie quasi-izometrii jest quasi-izometrią.*

W dalszych rozdziałach kluczowe będą także następujące pojęcia:

Definicja 1.13. *Zbiorem r-dyskretnym nazwiemy taki podzbiór A ustalonej przestrzeni metrycznej, że dla dowolnych $a, a' \in A$ ($a \neq a'$) ich odległość wynosi przynajmniej r.*

Definicja 1.14. *r-składową przestrzeni metrycznej X (lub dowolnego podzioru) nazwiemy dowolną klasę abstrakcji relacji równoważności na X generowanej przez utożsamienie punktów leżących w odległości mniejszej niż r od siebie.*

Warto zauważyć, że r składowe są r-rozłączne.

Definicja 1.15. *Zbiór nazywamy r-spójnym, jeśli ma tylko jedną r-składową.*

Uwaga 1.16. *Zauważmy, że zwarta przestrzeń metryczna jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy jest r-spójna dla dowolnie małego $r > 0$ (implikacja $\Longrightarrow$ nie wymaga zwartości).*

Definicja 1.17. *r-łańcuchem łączącym punkty x, y przestrzeni metrycznej (X, d) nazwiemy ciąg punktów $x_0, \ldots, x_n$ taki, że $d(x_i, x_{i+1}) < r$ dla $0 \leqslant i \leqslant n-1$.*
r-Łańcuchem nazwiemy analogiczny ciąg, od którego wymagamy jedynie $d(x_i, x_{i+1}) \leqslant r$.
Liczbę $n+1$ nazwiemy długością łańcucha.

Uwaga 1.18. *r-składowa zbioru A jest zatem maksymalnym podzbiorem, w którym dowolne dwa punkty można połączyć r-łańcuchem.*[6]

Definicja 1.19. *Metryka na grupie jest właściwa, jeżeli dowolna kula w tej metryce jest skończona. Ogólna przestrzeń metryczna jest właściwa, jeżeli dowolna kula jest prezwarta.*

Podajmy także definicję zgrubnej właściwości wg [BDLM], której nie należy mylić ze wspomnianą wcześniej metryczną właściwością wg [Ro03]:

[5]Nie jest to ta sama funkcja, którą dostalibyśmy stosując definicję z dowodu uwagi 1.8: tamta funkcja to minimum naszej funkcji oraz funkcji zerowej.

[6]W [BDLM] „r-chain" odpowiada naszemu r-Łańcuchowi, a „r-component" jest definiowany przez „r-chain", a więc inaczej niż u nas. Przyjęliśmy taką definicję, aby podział na r-składowe był najdrobniejszym możliwym podziałem na r-rozłączne zbiory.

Definicja 1.20. *Przekształcenie przestrzeni metrycznych nazywamy zgrubnie właściwym („coarsely proper"), gdy przekształca zbiory ograniczone na zbiory ograniczone.*

Przypomnijmy jeszcze oznaczenia używane przy rozważaniach asymptotycznych.

Konwencja 1.21. *Niech dane będą $f, g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Powiemy, że:*

1. *f jest co najwyżej tego samego rzędu co g (ozn. $f = O(g)$), jeżeli dla dostatecznie dużych argumentów r, zachodzi nierówność $f(r) \leqslant C \cdot g(r)$ (dla pewnej stałej dodatniej C);*

2. *g jest przynajmniej tego samego rzędu co f (ozn. $g = \Omega(f)$), jeżeli f jest co najmniej tego samego rzędu co g;*

3. *f jest rzędu mniejszego niż g (ozn. $f = o(g)$), jeżeli dla dowolnej stałej $c > 0$, istnieje takie $R < \infty$, że dla $r > R$ zachodzi nierówność $f(r) < c \cdot g(r)$;*

4. *g jest rzędu większego niż f (ozn. $g = \omega(f)$), jeżeli f jest rzędu większego niż g;*

5. *f, g są tego samego rzędu (ozn. $f = \Theta(g)$), jeżeli istnieją stałe $c, C > 0$, że dla dostatecznie dużych r zachodzą nierówności*

$$c \cdot g(r) \leqslant f(r) \leqslant C \cdot g(r).$$

Jeśli nie będzie to prowadziło do nieporozumień, będziemy pisać $f(r) = O(g(r))$, np. $f(r) = O(r^2)$ lub w skrócie $f = \Omega(g(r))$, np. $f = \Omega(r^2)$.

1.2. Przestrzenie quasi-geodezyjne

Zacznijmy od przypomnienia definicji przestrzeni geodezyjnej, by następnie przenieść tę definicję w świat wielkiej skali. Odnotujmy, że przestrzenie geodezyjne bywają definiowane inaczej, jednak dla nas właśnie taka definicja jest najbardziej odpowiednia (pochodzi ona z [Ro03]).

Definicja 1.22. *Przestrzeń metryczna X jest geodezyjna, jeżeli dla dowolnych punktów $x, y \in X$ odległych o $d(x, y) = r$ istnieje funkcja $g : [0, r] \to X$, łącząca te punkty: $g(0) = x$, $g(r) = y$, która jest izometrią na swój obraz. Funkcja g nazywana jest geodezyjną łączącą x i y.*

Definicja 1.23. *Przestrzeń metryczna X jest quasi-geodezyjna, jeśli istnieją takie stałe $L, C > 0$ że dla dowolnej pary punktów $x, y \in X$ odległych o $d(x, y) = r$ istnieje funkcja $g : [0, r] \to X$ łącząca punkty x i y ($g(0) = x$, $g(r) = y$), która jest (C,A)-quasi-izometrią na obraz.*

Przykład 1.24. *Przestrzeń geodezyjna jest quasi-geodezyjna, w szczególności drzewo z naturalną metryką jest przestrzenią quasi-geodezyjną.*

Przykład 1.25. *Przestrzeń quasi-izometryczna z quasi-geodezyjną jest quasi-geodezyjna.*

Dowód (szkic). Złożenie quasi-izometrii jest quasi-izometrią, a stałe szacują się jednostajnie. □

Zauważmy, że w przypadku przestrzeni geodezyjnych wystarczy sprawdzać, czy istnieje 1-lipschitzowska funkcja g, a natychmiast dostajemy, że jest ona izometrią[7]. Chcielibyśmy dostać podobną charakteryzację dla przestrzeni quasi-geodezyjnych.

Twierdzenie 1.26 (Charakteryzacja quasi-geodezyjności)**.** *Przestrzeń X jest quasi-geodezyjna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka stała L, że dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in X$, istnieje L-lipschitzowska funkcja $l : [0, r] \cap \mathbb{N} \to X$ łącząca x z L-otoczeniem y.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Wystarczy obciąć quasigeodezyjną do $[0, r] \cap \mathbb{N}$, i przyjąć $L = C + A$.

$\Longleftarrow$ Zajmijmy się najpierw przypadkiem trywialnym. Gdy $d(x, y) = r < 2L$, to przyjmujemy $g([0, r)) = \{x\}, g(r) = y$. Takie funkcje spełniają

$$d(a, b) - 2L \leqslant d(g(a), g(b)) \leqslant d(a, b) + 2L,$$

są więc $(1, 2L)$-quasi-izometriami na obraz.

Dalej zakładamy $r \geqslant 2L$. Będziemy dowodzić, że można tak zmodyfikować pewną L-lipschitzowską funkcję f łączącą x z otoczeniem y, by była quasi-izometrią na obraz łączącą x i y i by odpowiednie stałe miały jednostajne szacowanie. Wybierzmy takie $n \in \mathbb{N}$ oraz funkcję f: $\{0 \dots n\} \to X$, że f łączy x z L-otoczniem y i n jest minimalne.

Zachodzi nierówność $d(i, j) \leqslant \lfloor d(f(i), f(j)) \rfloor + 1$ (z minimalności!). Zatem f jest quasi-izometrią:

$$d(i, j) - 1 \leqslant d(f(i), f(j)) \leqslant L \cdot d(i, j).$$

Zmodyfikujmy f do f' ustalając $f'(n) = y$. Nieco zmieniają się oszacowania:

$$d(i, j) - 1 - L \leqslant d(f'(i), f'(j)) \leqslant L \cdot d(i, j) + L.$$

Mamy $\frac{r-L}{L} \leqslant n$. Można „rozciągnąć” zbiór $\{0 \dots n\}$ przez $\frac{r}{n}$-jednokładność na zbiór $K \subseteq [0, r]$. Odległości między punktami K szacują się przez $2L$: $\frac{r}{n} \leqslant \frac{rL}{r-L} \leqslant 2L$. Niech funkcja p przeprowadza punkt $a \in [0, r]$ na najbliższy punkt z K (gdy są dwa takie punkty, wybieramy dowolny). Mamy:

$$d(i, j) - 2L \leqslant d(p(a), p(b)) \leqslant d(a, b) + 2L.$$

Złożenie funkcji p, jednokładności i funkcji f' jest quasi-izometrią łączącą x i y i stałe szacują się jednostajnie. Biorąc maximum stałych dla przypadku $r < 2L$ oraz $r \geqslant 2L$ dostajemy uniwersalne stałe z definicji przestrzeni quasi-geodezyjnej. □

Przestrzeń quasi-geodezyjna jest więc przestrzenią, dla której istnieje stała $\tilde{L}$ taka, że dowolne punkty x i y można połączyć $\tilde{L}$-łańcuchem o długości $\lceil d(x, y) \rceil + 1$. Taka przestrzeń jest w szczególności $\tilde{L}$-spójna. Zachodzą też następujące znane (np. [NY12]) fakty:

Stwierdzenie 1.27. *Funkcja zgrubnie jednostajna f z przestrzeni quasi-geodezyjnej X jest ws-lipschitzowska.*

Dowód. Niech $x, y \in X$ i $r = \lfloor d(x, y) \rfloor$. Niech C_f będzie funkcją kontroli dla f. Z twierdzenia charakteryzującego quasi-geodezyjność dostajemy ciąg $r + 2$ punktów x_i, z których każde dwa kolejne są odległe o co najwyżej L (niezależne od x, y) oraz $x_0 = x, x_{r+1} = y$. Mamy więc $d'(f(x), f(y)) \leqslant \sum_{i=0}^{r} d'(f(x_i), f(x_{i+1})) \leqslant \sum_{i=0}^{r} C_f(d(x_i, x_{i+1})) \leqslant (r+1)C_f(L)$, a zatem $C'_f(r) = r \cdot C_f(L) + C_f(L)$ jest funkcją kontroli dla f. □

[7] Gdyby g nie była różnowartościowa, to „nie sięgnęlibyśmy” do y, gdy mamy różnowartościowość, identycznie wnioskujemy, że odwrotna nie może powiększać odległości punktów, bo wówczas g zmniejszałaby ją i ponownie nie „sięgnęlibyśmy” y.

Wniosek 1.28. *Jeśli dwie przestrzenie quasi-geodezyjne są zgrubnie równoważne, to są quasi-izometryczne.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że zaświadczające o zgrubnej równoważności zgrubnie jednostajne funkcje f, g (których złożenia są bliskie identycznościom) są wobec poprzedniego stwierdzenia ws-lipschitzowskie. $\square$

1.3. Przykłady

Po wprowadzeniu definicji i poznaniu warunków równoważnych warto zobaczyć kilka przykładów.

1.3.1. Grupy

Definicja 1.29. *Metryką długości słowa na skończenie generowanej grupie G pochodzącą od skończonego zbioru generatorów S będziemy nazywali następującą metrykę:*

$$d(g, h) = |g^{-1}h| = \min\{n \mid g^{-1}h = g_1 \dots g_n \wedge (g_i \in S \vee g_i^{-1} \in S)\}.$$

Wobec twierdzenia charakteryzującego quasi-geodezyjność natychmiast widzimy, że:

Przykład 1.30. *Grupa z metryką długości słowa jest przestrzenią quasi-geodezyjną.*

Lemat 1.31 ([BDLM]). *Niech $f : G \to H$ będzie homomorfizmem grup wyposażonych w lewo-niezmiennicze metryki. Jeśli f jest zgrubnie właściwa, to jest zgrubnie jednostajna.*

Dowód. Ustalmy $r > 0$. Kula $B(1_G, r)$ jest ograniczona, więc jej obraz jest ograniczony – mieści się w pewnej kuli wokół 1_H o promieniu R. Jeśli więc $d^G(x, y) < r$, to $x^{-1}y \in B(1_G, r)$, więc $d^H(f(x), f(y)) = d^H(1_H, f(x^{-1}y)) < R$. $\square$

Zauważmy, że z powyższego wynika, iż dowolny zgrubnie właściwy homomorfizm z quasi-geodezyjnej grupy (np. grupy z metryką długości słowa) jest ws-lipschitzowski.

Przykład 1.32 ([Sm05]). *Niech G będzie grupą. Dla dowolnych lewo-niezmienniczych i właściwych (tzn. takich, że dowolna kula jest skończona) metryk d, d' na G, przestrzenie $(G, d), (G, d')$ są zgrubnie równoważne.*

Dowód. Ponieważ kule w obu przestrzeniach są skończone, więc identyczności w obie strony są funkcjami zgrubnie właściwymi, a zatem zgodnie z lematem są zgrubnie jednostajne. $\square$

Przykład 1.33. *Dowolne metryki długości słowa na skończenie generowanej grupie generują quasi-izometryczne przestrzenie.*

Dowód. Wynika natychmiast z tego, że zgrubna równoważność między przestrzeniami quasi-geodezyjnymi jest quasi-izometrią. $\square$

1.3.2. Drzewa

Po omówieniu podstawowych przykładów dotyczących grup przyjrzyjmy się działającemu na wyobraźnię przykładowi z drzewami o ustalonym rozgałęzieniu. Zbadanie quasi-izometryczności takich drzew jest zaproponowane jako zadanie w [NY12].

Przykład 1.34 (zadanie z [NY12]). *Niech T_n oznacza drzewo, którego każdy wierzchołek ma stopień n, z naturalną metryką. T_n oraz T_m są quasi-izometryczne ($n, m \geqslant 3$).*

Dowód. Wykażemy, że dowolne drzewo T_n jest quasi-izometryczne z drzewem T_3. Ograniczmy się wpierw do zbiorów wierzchołków V_n, V_3 obu drzew, które są oczywiście zgrubnie gęste w obu drzewach, a zatem w myśl oszacowań z dowodu 1.7 quasi-izometryczne z nimi. Ukorzeniając drzewo T_m i przypisując numery $0 \dots m$ synom korzenia, oraz $0 \dots m-1$ synom pozostałych wierzchołków, możemy utożsamiać V_m z następującym podzbiorem $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$:

$$W_m = \left\{ s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid s(0) \in \mathbb{Z}_m \cup \{-1\},\ s(i) \in \mathbb{Z}_{m-1} \cup \{-1\},\ s(i) = -1 \text{ pw.} \right\},$$

gdzie $i > 0$, a „pw." oznacza prawie wszędzie, tzn. $s(i) \neq -1$ dla jedynie skończenie wielu i ($s \equiv -1$ odpowiada korzeniowi, $(0, -1, \dots)$ synowi o numerze 0, $(a_0, \dots a_n, a_{n+1}, -1, \dots)$ odpowiada synowi wierzchołka $(a_0, \dots a_n, -1, \dots)$ oznaczonemu numerem a_{n+1}). Przez długość l wierzchołka $(a_n) \in W_m$ rozumieć będziemy jego odległość od korzenia (w V_n), a zatem największe takie n, że $a_n \neq -1$ (dla korzenia zero). Metryka d na W_m zgodna z metryką na V_n wyraża się następującą formułą:

$$d((a_n), (b_n)) = l((a_n)) + l((b_n)) - 2p((a_n), (b_n)),$$

gdzie $p((a_n), (b_n))$ równa się $\min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\} - 1$, gdy $(a_n) \neq (b_n)$, oraz $l((a_n))$ w przeciwnym przypadku. Funkcja p zwraca po prostu długość najdłuższego wspólnego prefiksu (a_n) i (b_n) bez minus jedynek (w drzewie odpowiada temu głębokość najmłodszego wspólnego przodka obu wierzchołków).

Skonstruujmy quasi-izometrię $f : T_n \to T_3$. Niech f przeprowadza korzeń na korzeń: $f(-1) = -1$. Podzielmy n synów korzenia na 3 możliwie równoliczne grupy po n_0, n_1, n_2 wierzchołków (żądamy by $|n_i - n_j| \leqslant 1$). W każdej grupie wprowadźmy numerację od 0 do $n_j - 1$. Niech $\forall_{v \in n_j}\ f(v)(0) = j$. Pozostało określić $f(v)(i)$ dla $i > 0$. Żeby nie mnożyć indeksów ustalmy grupę j-tą. Niech $d = \lfloor \log_2 n_j \rfloor \geqslant 0$, niech $\nu = 2^d$ i niech $N = \nu - (n_j - \nu) - 1$. Rozpatrzmy wierzchołek v o numerze k (wewnątrz swojej grupy). Wprowadźmy oznaczenie $f_i = f(v)(i)$.

1. Jeśli $k \leqslant N$, to niech $\overline{f_1 \dots f_d}$ będzie równe binarnej reprezentacji liczby k (w razie potrzeby dodajemy wiodące zera). Dla $i > d$ przyjmujemy $f_i = -1$.

2. Jeśli $k > N$, to za $\overline{f_1 \dots f_d}$ przyjmujemy binarną reprezentację liczby $N + \left\lceil \frac{k-N}{2} \right\rceil$, a f_{d+1} określamy jako $(k - N - 1) \bmod 2$. Dla $i > d + 1$ przyjmujemy $f_i = -1$.

Dalej postępujemy indukcyjnie. Chcąc określić f na k-tym ($0 \leqslant k \leqslant n-2$) synu v wierzchołka w, ustalamy $f(v)(i) = f(w)(i)$ dla $i < l(f(w))$ a dalej postępujemy jw. To znaczy: niech $d = \lfloor \log_2 (n-1) \rfloor \geqslant 0$, niech $\nu = 2^d$ i niech $N = \nu - ((n-1) - \nu) - 1$ – wówczas:

1. Jeśli $k \leqslant N$, to niech $\overline{f_{l(f(w))} \cdots f_{l(f(w))+d-1}}$ będzie równe binarnej reprezentacji liczby k. Dla $i > l(f(w)) + d - 1$ przyjmujemy $f_i = -1$.

2. Jeśli $k > N$, to za $\overline{f_{l(f(w))} \cdots f_{l(f(w))+d-1}}$ przyjmujemy binarną reprezentację liczby $N + \left\lceil \frac{k-N}{2} \right\rceil$, a $f_{l(f(w))+d}$ określamy jako $(k - N - 1) \bmod 2$. Dla $i > l(f(w)) + d$ przyjmujemy $f_i = -1$.

Idea stojąca za powyższymi formalnymi napisami jest następująca: gdyby liczba synów wierzchołka w wynosiła 2^d, to f przeprowadziłoby ich na (wszystkich) potomków $f(w)$ oddalonych od $f(w)$ o d. Gdy liczba synów nie jest potęgą dwójki, to obrazy części wierzchołków zamiast w odległości d znajdują się w odległości $d + 1$ od obrazu ojca. Robimy to tak, że dla każdego u potomka $f(w)$ leżącego w odległości d od $f(w)$ albo u jest w obrazie albo obaj jego synowie są w obrazie.

Rozpatrzmy zbiór f_v złożony z potomków wierzchołka $f(v)$ odległych od niego o co najwyżej

$$D = \max\left(\lceil\log_2(n-1)\rceil, \max_j\lceil\log_2(n_j)\rceil + 1\right).$$

Łatwo widać, że suma rodziny $\{f_v \mid v \in T_n\}$ pokrywa całe T_3. W szczególności obraz f jest zgrubnie gęsty w T_3.

Ponieważ odległość ojca od syna nie przekracza D, więc f jest lipschitzowska ze stałą D (w szczególności ws-lipschitzowska). Niech $L_{v,w}(v) = l(v) - p(v,w)$ będzie odległością v od najmłodszego wspólnego przodka v, w. Możemy szacować $L_{f(v),f(w)}(f(v))$ przez $L_{v,w}(v)$. Niech

$$d = \min\left(\min_j\lfloor\log_2(n_j)\rfloor + 1, \lfloor\log_2(n)\rfloor\right).$$

Wówczas $L_{f(v),f(w)}(f(v)) \geqslant d\cdot(L_{v,w}(v)-1)$ – musimy odjąć 1, ponieważ najmłodszy wspólny przodek w przeciwdziedzinie nie musi być obrazem najmłodszego wspólnego przodka w dziedzinie (może być jego potomkiem niemłodszym niż obrazy potomków). Ostatecznie mamy:

$$d\cdot d(v,w) - 2d \leqslant d(f(v), f(w)) \leqslant D\cdot d(v,w).$$

□

Przykład 1.35 (zadanie z [NY12]). *Przestrzenie T_1, T_2, T_3 nie są zgrubnie równoważne.*

Dowód. T_0 i T_1 jako przestrzenie ograniczone są quasi-izometryczne i nie są zgrubnie równoważne z $T_2 = \mathbb{R}$ oraz T_3. Pozostaje wykazać, że $\mathbb{R}$ i T_3 nie są zgrubnie równoważne.

Jeśli wyróżnimy w T_3 korzeń v, to możemy wyróżnić 3 gałęzie (poddrzewa) wyrastające z tego korzenia. Niech $f : \mathbb{R} \to T^3$ będzie zgrubną równoważnością $\mathbb{R}$ w T^3 (o zgrubnie gęstym obrazie) spełniającą[8]

$$c\big(d(x_1,x_2)\big) \leqslant d'(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C\big(d(x_1,x_2)\big),$$

dla pewnych monotonicznych i rozbieżnych do nieskończoności c, C. Bez straty ogólności $f(0) = v$. Niech $k = \lim_{r\to 0^+} C(r) + 1$. Dla dostatecznie dużych wartości $r \geqslant R$ $f(r)$ musi być przynajmniej w odległości k od korzenia. Jeśli więc $f(R)$ znajduje się w jednej z trzech gałęzi, to dla $r \geqslant R$ $f(r)$ również znajduje się w tej gałęzi. (Odległość między punktem w gałęzi pierwszej odległym o przynajmniej k od korzenia, a takim samym punktem w gałęzi drugiej wynosi przynajmniej $2k$, czyli funkcja, której „nieciągłość" szacuje sie przez k nie może „przeskoczyć" między gałęźmi.). Podobnie jest dla dostatecznie małych r funkcja $f(r)$ również musi być w ustalonej gałęzi. Tym samym dla $|r| > R'$ punkt $f(r)$ nie znajduje się w jednej z gałęzi. Obraz $f([-R', R'])$ jest oczywiście ograniczony. Wnioskujemy zatem, że obraz f nie może być zgrubnie gęsty w drzewie, które składa się z trzech nieograniczonych gałęzi, sprzeczność. □

W kolejnej sekcji znajdziemy niezmiennik, który pozwoli natychmiast odróżnić T_n ($n \geqslant 3$) i $\mathbb{R}^k$.

[8] $\mathbb{R}$ i T_3 są przestrzeniami quasi-geodezyjnymi, więc istnieją afiniczne funkcje c, C, ale poradzimy sobie bez tej obserwacji.

1.3.3. Przestrzenie $\mathbb{R}^n$ i ich podprzestrzenie, funkcja objętości

Definicja 1.36. *Niech X – niepusta przestrzeń metryczna i $x \in X$. Funkcją objętości dla X nazywać będziemy funkcję $ob = ob_X^x$ daną formułą:*

$$ob_X^x(j,r) = \sup\Big\{|D_j| \;\Big|\; D_j \subseteq B(x,r)\Big\},$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów w A (lub ∞), a D_j to dowolny zbiór j-dyskretny.

Uwaga 1.37. *Rząd funkcji objętości nie zależy od punktu wyróżnionego.*

Dowód. Łatwo widać, że $ob_X^x(j,r) \leqslant ob_X^{x'}(j, r + d(x,y))$. □

Stwierdzenie 1.38. *Tempo wzrostu funkcji objętości jest niezmiennikiem quasi-izometrii, tzn. dla dowolnej pary przestrzeni quasi-izometrycznych X, Y dla pewnych stałych mamy*

$$ob_X(j,r) \leqslant ob_Y(cj - A, Cr + A).$$

Dowód. Rozpatrzmy funkcję $f : X \to Y$ spełniającą podwójną nierówność:

$$c \cdot d(x_1,x_2) - a \;\leqslant d'(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C \cdot d(x_1,x_2) + a\ .$$

Wystarczy zauważyć, że dowolna r-kula o środku w x przechodzi przez f w $(Cr + A)$-kulę o środku w $f(x)$, a dowolny j-dyskretny podzbiór na $(cj - A)$-dyskretny podzbiór o tej samej mocy (o ile $cj - A > 0$). □

Dysponując takim narzędziem możemy w inny sposób pokazać, że $\mathbb{R}$ i T_3 nie są quasi-izometryczne: funkcja objętości dla $\mathbb{R}$ ma wzrost liniowy (przy ustalonym j), a funkcja objętości dla T_3 ma wzrost wykładniczy. Możemy też w elementarny sposób odróżnić (ze zgrubnego punktu widzenia) przestrzenie $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ dla $m \neq n$ (patrz poniżej). Typowe podejście polega na udowodnieniu, że wymiar asymptotyczny $\mathbb{R}^k$ wynosi k, gdzie szacowanie z góry wymaga nieco pracy (patrz twierdzenie 4.4), a szacowanie z dołu uzyskuje się, powołując się na klasyczną teorię wymiaru. Należący do tej klasycznej teorii fakt, że $\dim \mathbb{R}^k \geqslant k$ nie jest jednak trywialny.

Wniosek 1.39. *Przestrzenie $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ dla $m \neq n$ nie są zgrubnie równoważne.*

Dowód. Ustalmy metrykę supremum. Łatwo widać, że $\left(\left\lfloor \frac{2r}{j} \right\rfloor + 1\right)^k \leqslant ob_{\mathbb{R}^k}(j,r) \leqslant \frac{(2r+j)^k}{j^k}$ – pierwsza nierówność pochodzi od wypełnienia r-kuli punktami kratowymi („rozmiar” kraty: j), druga nierówność wynika z tego, że jeśli wokół punktów zbioru j-dyskretnego wyznaczymy $j/2$-kule, to będą one rozłączne i zawarte w $j/2$-otoczce tego zbioru (liczmy iloraz objętości $(r + j/2)$-kuli i dzielimy przez objętość kuli o promieniu $j/2$).

Niech $n < m$. Załóżmy, że $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ są zgrubnie równoważne. Jako przestrzenie quasi-geodezyjne są zatem quasi-izometryczne. Wobec poprzedniego stwierdzenia istnieją takie stałe, że $ob_{\mathbb{R}^m}(j,r) \leqslant ob_{\mathbb{R}^n}(cj - A, Cr + A)$. Ustalmy $j > \frac{A}{c}$. Mamy więc

$$\left(\left\lfloor \frac{2r}{j} \right\rfloor + 1\right)^m \leqslant \frac{\Big(2(Cr + A) + cj - A\Big)^n}{(cj - A)^n},$$

ale lewa strona ma wzrost wielomianowy rzędu m, a prawa rzędu n, sprzeczność. □

Dwa kolejne przykłady dotyczą pewnych ciągów liczb dodatnich. Pokazujemy, że wszystkie te ciągi są zgrubnie równoważne, ale żadne dwa nie są quasi-izometryczne.

Przykład 1.40. *Dla dowolnych rozbieżnych do nieskończoności ciągów dodatnich* (a_n), (b_n) *przestrzenie* $A = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{\sum_{i=1}^{n} b_i \mid n \in \mathbb{N}\}$ *są zgrubnie równoważne.*

Dowód. Niech $c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $d_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Niech funkcją zaświadczającą o zgrubnej równoważności będzie $f : A \to B$ dana wzorem $f(c_n) = d_n$. Funkcja f jest zgrubnie jednostajna, ponieważ dla dowolnego $r < \infty$ istnieje tylko skończenie wiele par punktów, które są odległe od siebie o co najwyżej r. Możemy więc ustalić $C_f(r)$ jako supremum odległości ich obrazów. Funkcja odwrotna do f jest zgrubnie jednostajna z tego samego powodu. Ich złożenią są identycznościami. □

Przykład 1.41. *Żadne dwie różne przestrzenie* $A(a_i) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \mid n \in \mathbb{N}\}$, *gdzie* $a_n = n^\alpha$ *dla pewnego* $\alpha \geqslant 0$ *lub* $a_n = \beta^n$ *dla pewnego* $\beta > 1$ *nie są quasi-izometryczne.*

Dowód. Przypuśćmy, że między którymiś przestrzeniami istnieje quasi-izometria f spełniająca

$$c'(d(x,y)) = c \cdot d(x_1,x_2) - B \leqslant d'(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C \cdot d(x_1,x_2) + B = C'(d(x_1,x_2)).$$

Bez straty ogólności możemy zakładać, że $f(0) = 0$. r-składowa zera w dziedzinie zawiera się w $(cr - B)$-składowej zera w obrazie. Zaobserwujmy jakie są rozmiary r-składowych zera w wyżej wymienionych przestrzeniach.

Zacznijmy od $\mathbb{N}$, czyli przypadku $a_n = n^\alpha$ z $\alpha = 0$. $(1+\varepsilon)$-składowa zera to cały zbiór, a w pozostałych przypadkach każda składowa zera będzie ograniczona. Obserwacja, że r-składowe przechodzą w $C'(r)$ składowe dotyczy również zgrubnych równoważności, z czego wnioskujemy, że $\mathbb{N}$ nie jest nawet zgrubnie równoważna z żadną z pozostałych przestrzeni (zgrubna równoważność musiałaby odwzorowywać zbiór nieograniczony w ograniczony).

Dla $a_n = n^\alpha$ $(\alpha > 0)$ rozmiar $(n^\alpha + \varepsilon)$-składowej to $\Theta(n^{\alpha+1})$ i ogólniej rozmiar r^α-składowej to $\Theta(r^{\alpha+1})$, zatem rozmiar r-składowej to $\Theta(r^{1+\frac{1}{\alpha}})$.

Dla $a_n = \beta^n$ rozmiar r-składowej to oczywiście $\Theta(r)$.

Widać więc, że przestrzenie z $a_n = n^\alpha$ nie są quasi-izometryczne między sobą ani z żadną przestrzenią z $a_n = \beta^n$. Pozostało wykazać, że przestrzenie z $a_n = \beta^n$ dla różnych β nie są quasi-izometryczne.

Zauważmy, że dla ustalonego j funkcja objętości $ob_\beta(j,r) = \Theta(\log_\beta(r))$. Gdyby analizowane przestrzenie dla $\beta < \beta'$ były quasi-izometryczne to zgodnie z 1.38 mielibyśmy (dla odpowiednio dużego j):

$$\Theta(\log_\beta(r)) = ob_\beta(j,r) \leqslant ob_{\beta'}(cj - A, Cr + A) = \Theta(\log_{\beta'}(Cr + A)) = \Theta(\log_{\beta'}(r)),$$

sprzeczność. □

Do badania rozmiaru r-składowych jeszcze wrócimy (w większej ogólności) omawiając funkcję Gromova i funkcje kontroli.

Teraz zajmiemy się porównywaniem wykresów funkcji wielomianowych. Otóż wykresy wielomianów są zgrubnie równoważne z prostą, ale dla wielomianów parzystego stopnia nie jest to quasi-izometria, a dla wielomianów nieparzystego stopnia tak. Ponadto dwa wielomiany parzystego stopnia są quasi-izometryczne wtedy i tylko wtedy, gdy jest to ten sam stopień.

Przykład 1.42. *Wykres dowolnego wielomianu nieparzystego stopnia jest quasi-izometryczny z prostą. (Zamiast wielomianu można brać funkcję* $\operatorname{sgn}(x)|x|^m$ *dla* $m \geqslant 1$. *Ma ona wykres izometryczny z wykresem* $\operatorname{sgn}(x)|x|^{\frac{1}{m}}$, *więc warunek na* m *można rozluźnić:* $m \in \mathbb{R}^+$.*)*

Dowód. Wystarczy rozważyć wielomian unormowany w. Poza pewnym symetrycznym odcinkiem $(-s,s)$ pochodna w jest większa niż $\frac{1}{2}$ a ponadto wartości są dodatnie na prawo od tego odcinka i ujemne na lewo. Wewnątrz tego zbioru wielomian w jest oczywiście ograniczony, więc bez straty ogólności możemy ograniczyć się do wykresu G_f wielomianu w obciętego do pozostałej części prostej rzeczywistej (ta część wykresu jest zgrubnie gęsta w całości).

Rzutując G_f na oś OY dostajemy quasi-izometrię o gęstym obrazie. Jako rzut funkcja ta na pewno jest ws-lipschitzowska. Z drugiej strony funkcja odwrotna (z obrazu) jest $\sqrt{5}$-lipschitzowska na obu półprostych $f((-\infty,-s])$, $f([s,\infty))$ (pochodna w wynosi przynajmniej $\frac{1}{2}$, czyli pochodna w^{-1}, to maksymalnie 2; $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$), więc jest ($\sqrt{5}$,$2s$)-ws-lipschitzowska. □

Poniżej kolejny przykład, kiedy wykresy są quasi-izometryczne.

Przykład 1.43. *Wykresy dwóch wielomianów parzystego stopnia n są quasi-izometryczne.*

Dowód. Ograniczmy się do wielomianów unormowanych. Pokażemy, że dowolny wielomian unormowany f stopnia n ma wykres quasi-izometryczny z wykresem x^n. Podobnie jak poprzednio ogarniczmy się do pewnych dwóch symetrycznych półprostych – żądamy, by pochodne obu wielomianów na ujemnej półprostej były ujemne, a na dodatniej dodatnie, kolejne wymagania wobec półprostych będą wynikały z dalszej części dowodu.

Dla dostatecznie dużych r mamy nierówności $f(r) \leqslant r^n$ oraz $(-r)^n \leqslant f(-r)$ (lub symetrycznie, bez straty ogólności przeanalizujemy ten przypadek). Możemy więc zrzutować równolegle do OX ramiona „paraboli” f (bez środkowego fragmentu, gdyż ograniczyliśmy się do dwóch półprostych) na ramiona „paraboli” x^n (dla ustalonego kierunku nierówności rzutujemy w kierunku $-\infty$). Twierdzimy, że taki rzut jest funkcją bliską tożsamościowemu włożeniu w $\mathbb{R}^2$.

Zauważmy, że $f(r) - r^n = O(r^{n-1})$. Zmiana r o ustalony czynnik k powoduje zmianę $g(r) = r^n$ o składnik $\Theta(r^{n-1})$ (przy czym stałą przy tym składniku możemy uczynić dowolnie dużą powiększając k). Zatem, zmieniając wartość argumentu r o stały czynnik ograniczony przez pewną stałą K do r', możemy sprawić, że $f(r) = (r')^n$. Tym samym rzutowanie jednego wykresu na drugi jest funkcją K-bliską identyczności. □

Poniżej dwa negatywne przykłady dotyczące quasi-izometrii. Trzeci przykład pokazuje, że w tych przypadkach mamy jednak zgrubne równoważności.

Przykład 1.44. *Wykres wielomianu parzystego stopnia $w(x) = x^n$ lub funkcji $w(x) = |x|^m$ ($1 < m \in \mathbb{R}$) nie jest quasi-izometryczny z prostą.*

Dowód. Stosując argument podobny jak dla $\mathbb{R}$ i T_3, wnioskujemy, że quasi-izometria $f\colon \mathbb{R} \to Graph(w)$ musi przeprowadzać (z dokładnością do bliskości) dodatnią półprostą na część wykresu o dodatniej (ujemnej odpowiednio) pierwszej współrzędnej i ujemną na część wykresu o ujemnej (dodatniej odpowiednio) pierwszej współrzędnej. Oczywiście bez straty ogólności zakładamy $f(0) = (0,0)$, a dla $r \neq 0$ i $f(r) = (a,b)$ zakładamy $\operatorname{sgn}(ra) = 1$.

Ponieważ $d(f(0), f(r)) = \Theta(r)$, więc $f(r) = (a, a^n)$, gdzie $a = \Theta(r^{\frac{1}{n}})$ (wykorzystujemy założenie, że wykładnik jest nie mniejszy od 1). Mając więc r i $f(r) = (b^{\frac{1}{n}}, b) = (\Theta(r^{\frac{1}{n}}), \Theta(r))$, można znaleźć takie $r' = \Theta(r)$, że $f(-r') = (-c^{\frac{1}{n}}, c)$ i $c = b + \theta M$, gdzie $\theta \in [-1,1]$ a M jest stałą zaświadczającą o gęstości obrazu $\mathbb{R}$ w $Graph(w)$. Tym samym $d(f(r), f(-r')) = \Theta(r^{\frac{1}{n}}) \neq \Theta(r) = \Theta(|r - r'|)$, sprzeczność. □

Przykład 1.45. *Wykresy funkcji $|x|^n$ i $|x|^m$ dla większych od 1 liczb $m \neq n$ nie są quasi-izometryczne.*

Dowód. Tak jak poprzednio bez straty ogólności zakładamy, że zero jest odwzorowywane na zero, a znak pierwszej współrzędnej jest zachowywany. Niech $n > m$. Rozpatrzmy trójkę punktów: $(0,0), (a^{\frac{1}{n}}, a), (-a^{\frac{1}{n}}, a)$ oraz ich obrazy $(0,0), (-b^{\frac{1}{m}}, b), (-c^{\frac{1}{m}}, c)$; $a, b, c \geqslant 0$. Aby odległość drugiego i trzeciego punktu od zera oraz odległości ich obrazów od zera były proporcjonalne, musi być $b, c = \Theta(a)$. Jednakże wówczas $d\Big((- b^{\frac{1}{m}}, b), (c^{\frac{1}{m}}, c)\Big) = \Omega\Big(a^{\frac{1}{m}}\Big) \neq \Theta\Big(a^{\frac{1}{n}}\Big) = d\Big((- a^{\frac{1}{m}}, a), (- a^{\frac{1}{m}}, a)\Big)$, sprzeczność. □

Przykład 1.46. *Wykres dowolnego wielomianu parzystego stopnia lub funkcji $|x|^m$ ($m \in \mathbb{R}^+$) jest zgrubnie równoważny z prostą, a dla $m \in (0, 1]$ mamy nawet quasi-izometrię.*

Dowód. Rozpatrzmy przypadek wielomianów lub $m \geqslant 1$. Wystarczy dowodzić dla jednomianów x^m (i funkcji $|x|^m$ dla $m \geqslant 1$).

Niech $f((\epsilon x, x^m)) = \epsilon \cdot x^m$ dla $x \geqslant 0$ i $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Jest jasne, że na półpłaszczyznach $\epsilon x > 0$ i $\epsilon x < 0$ odwzorowanie jest lipshitzowskie ze stałą 1. Rozpatrzmy dwa punkty $(x, x^m), (-y, y^m)$ $(x, y \geqslant 0)$ odległe o r. Musi być $\max(x, y) \leqslant r$, a więc odległość ich obrazów szacuje się przez $2r^m$. Zatem funkcja C_f kontroli dla f to $C_f(r) = \max(r, 2r^m)$

Łatwo widać, że odwzorowanie odwrotne jest (2,2)-ws-lipschitzowskie:

$$\sqrt{(x - \epsilon y)^2 + (x^m - y^m)^2} \leqslant |x - \epsilon y| + |x^m - y^m| \leqslant (2 + |x^m - \epsilon y^m|) + |x^m - \epsilon y^m| \leqslant 2|x^m - \epsilon y^m| + 2.$$

Dla $|x|^m$ przy $m \in (0, 1]$ szukaną quasi-izometrią jest rzut na oś OX. Funkcja odwrotna jest ws-lipschitzowska, ponieważ po usunięciu dowolnej kuli o środku w zerze z dziedziny funkcja $|x|^m$ jest lipschitzowska (podobnego argumentu użyliśmy wcześniej dla wielomianów nieparzystego stopnia). □

Wniosek 1.47. *Wykresy funkcji $|x|^m$ ($m > 1$) i wielomianów parzystego stopnia nie są przestrzeniami quasi-geodezyjnymi.*

Dowód. Gdyby były, to wobec faktu, że prosta również jest przestrzenią quasi-geodezyjną, zgrubna równoważność z poprzedniego przykładu byłaby quasi-izometrią, sprzeczność z 1.44. □

Dla porządku odnotujmy:

Wniosek 1.48. *Quasi-geodezyjność nie jest zgrubnym niezmiennikiem.*

Dowód. Kontrprzykład stanowią przestrzenie z poprzedniego wniosku, które nie są quasi-geodezyjne, a są zgrubnie równoważne z prostą rzeczywistą $\mathbb{R}$. □

Powyższy wniosek można wzmocnić:

Przykład 1.49. *Dla dowolnej nieograniczonej przestrzeni quasi-geodezyjnej istnieje zgrubnie równoważna przestrzeń, która nie jest quasi-geodezyjna.*

Dowód. Niech X będzie nieograniczoną przestrzenią quasi-geodezyjną z metryką d. Rozpatrzmy X z metryką $d' = \sqrt{d}$ (na mocy lematu 2.26 d' jest metryką i obie przestrzenie są zgrubnie i homeomorficznie równoważne).

Nie wprost. Załóżmy, że L jest taką stałą, dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje ciąg $\lfloor d'(x, y) \rfloor + 2$ punktów, z których pierwszy jest równy x, ostatni y, a dwa kolejne są odległe o co najwyżej L w metryce d' (1.26). Oznacza to, że w metryce d te kolejne punkty są odległe o co najwyżej L^2. Dostajemy więc, że w metryce d dowolne punkty x, y można połączyć L^2-Łańcuchem długości $\lfloor \sqrt{d(x, y)} \rfloor + 2$, a więc z nierówności trójkąta te punkty są odległe o co najwyżej $L^2 \cdot \Big(\lfloor \sqrt{d(x, y)} \rfloor + 1\Big) = \Theta(\sqrt{d(x, y)})$, sprzeczność (wobec nieograniczoności X). □

Część II

Teoria wymiaru asymptotycznego: liniowe funkcje kontroli

Rozdział 2

Wymiar asymptotyczny asdim

Wymiar asymptotyczny jest klasycznym pojęciem zgrubnej geometrii, zatem będziemy zakładać, że Czytelnik zna lub w razie chęci może łatwo znaleźć potrzebne informacje na temat tego pojęcia. Dla porządku przedstawiamy jedynie definicję, a ponadto fakty, które będą pomocne w zrozumieniu dalszej części pracy. W tym rozdziale omawiamy również pojęcie funkcji wymiaru.

2.1. Definicja wymiaru asymptotycznego asdim

Na początek przypomnijmy i sprecyzujmy kilka niezbędnych definicji.

Definicja 2.1. *Powiemy, że rodzina $\mathcal{X} \subseteq 2^X$ podzbiorów X pokrywa przestrzeń X, jeśli $\bigcup \mathcal{X} = X$.*
Pokryciem przestrzeni topologicznej (X, τ) nazwiemy taką rodzinę $\mathcal{U} \subseteq \tau$ zbiorów otwartych, która pokrywa X.

Definicja 2.2. *Krotnością rodziny $\mathcal{X}$ pokrywającej przestrzeń X jest najmniejsza liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$ taka, że każdy punkt $x \in X$ należy do co najwyżej n zbiorów $Y \in \mathcal{X}$.*

Definicja 2.3. *Niech $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq 2^Z$. Powiemy, że rodzina $\mathcal{X}$ rozdrabnia rodzinę $\mathcal{Y}$, jeśli każdy element $X \in \mathcal{X}$ zawiera się w pewnym $Y \in \mathcal{Y}$.*

Konwencja 2.4. *Od tej pory, jeżeli nie zaznaczono inaczej, przestrzeń X zawsze będzie przestrzenią metryczną wyposażoną w metrykę d.*

Definicja 2.5. *Dla dowolnego podzbioru Y przestrzeni metrycznej (X, d), jego średnicą nazywamy najmniejsze ograniczenie na odległości między jego elementami:*

$$\mathrm{diam}Y = \sup\{d(y, y') \mid y, y' \in Y\}.$$

Rodzina $\mathcal{X} \subseteq 2^X$ podzbiorów przestrzeni metrycznej X jest jednostajnie ograniczona, gdy istnieje pewna stała dodatnia ograniczająca średnice jej elementów $Y \in \mathcal{X}$.

Jesteśmy gotowi, by zdefiniować wymiar asymptotyczny.

Definicja 2.6. *Niech X będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że wymiar asymptotyczny przestrzeni X nie przekracza $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, gdy dla każdego jednostajnie ograniczonego pokrycia $\mathcal{V}$, istnieje jednostajnie ograniczone pokrycie $\mathcal{U}$ o krotności co najwyżej $n+1$ takie, że $\mathcal{V}$ rozdrabnia $\mathcal{U}$. Oznaczenie:* $\mathrm{asdim}X \leqslant n$.
Wymiar asymptotyczny przestrzeni X to najmniejsza taka liczba n, że $\mathrm{asdim}X \leqslant n$. *Oznaczamy* $\mathrm{asdim}X = n$.

Zauważmy, że definicja wymiaru asymptotycznego jest dualna do definicji wymiaru pokryciowego Lebesgue'a. Różnica polega na tym, że zamiast szukać pokrycia o określonej krotności rozdrabniającego dane, szukamy pokrycia „grubszego”, pamiętając jednak o tym, że musi być ono jednostajnie ograniczone.

W tym miejscu warto jest wspomnieć, że duży wymiar indukcyjny Ind oraz mały wymiar indukcyjny ind również mają swoje zgrubne odpowiedniki asInd i asind.

2.2. Warunki równoważne dla asdim

Wróćmy do pojęcia wymiaru asymptotycznego. Z punktu widzenia dalszych rozważań bardziej użyteczne od definicji będą inne (równoważne) charakteryzacje. Aby je wprowadzić, ustalmy kilka definicji.

Definicja 2.7. *Odległością dwóch podzbiorów $Y, Z \subseteq X$ przestrzeni metrycznej (X, d) nazwiemy infimum odległości elementów tych podzbiorów:*

$$\operatorname{dist}(Y, Z) = \inf\{d(y, z) \mid y \in Y, z \in z\}.$$

Powiemy, że rodzina $\mathcal{X} \subseteq 2^X$ podzbiorów przestrzeni metrycznej X jest r-rozłączna, gdy odległość dowolnych różnych elementów $Y, Y' \in \mathcal{X}$ jest nie mniejsza niż r: $\operatorname{dist}(Y, Y') \geqslant r$.[1]

Definicja 2.8. *Niech $\mathcal{X} \subseteq 2^X$, gdzie X jest przestrzenią metryczną, oraz $r < \infty$. r-krotonścią rodziny $\mathcal{X}$ nazwiemy najmniejszą taką liczbę $n \in \mathbb{N}$, że dowolna kula otwarta o promieniu r $\mathrm{B}(x, r)$ przecina co najwyżej n zbiorów $Y \in \mathcal{X}$.*

Definicja 2.9. *Liczbą Lebesgue'a $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ rodziny $\mathcal{X}$ pokrywającej (zwykle pokrycia) przestrzeń X nazwiemy największą taką liczbę (lub ∞) λ, że dowolny zbiór $Z \subseteq X$ o średnicy mniejszej niż λ jest zawarty w pewnym elemencie $Y \in \mathcal{X}$ rodziny $\mathcal{X}$.*[2]

Przypomnijmy jeszcze kilka definicji dotyczących kompleksów symplicjalnych.

Definicja 2.10. *(Geometrycznym) sympleksem S w rzeczywistej przestrzeni liniowej nazwiemy powłokę wypukłą skończonego zbioru K punktów tej przestrzeni. Powiemy, że zbiór K rozpina sympleks S.*

Naturalną sytuacją jest rozpinanie sympleksu S poprzez zbiór K złożony z $n+1$ punktów afinicznie niezależnych. Powiemy wówczas, że sympleks S jest wymiaru n (jest to najmniejsza moc zbioru rozpinającego S pomniejszona o jeden). Zauważmy, że wewnątrz sympleksu S, można wyróżnić mniejsze sympleksy rozpięte przez różne podzbiory K. Są one nazywane ścianami sympleksu S, a jeśli ich wymiar to 0, to są ponadto wierzchołkami. Tu dochodzimy do definicji abstrakcyjnego kompleksu symplicjalnego.

Definicja 2.11. *Abstrakcyjnym kompleksem symplicjalnym*[3] *nazywamy dowolną rodzinę $\mathcal{K}$ skończonych zbiorów zamkniętą na branie podzbiorów. Elementy rodziny $\mathcal{K}$ będziemy nazywać jej ścianami lub po prostu sympleksami*[4]. *Wymiarem ściany kompleksu S nazwiemy liczbę $|S|-1$. 0-wymiarowe ściany to wierzchołki. Wymiar kompleksu to supremum wymiarów ścian kompleksu.*

[1] [BDLM] podaje definicję równoważną, wg [BD05] natomiast nierówność w definicji powinna być ostra.

[2] Zauważmy, że definicja jest poprawna, gdyż supremum liczb λ spełniających warunek z definicji $(\forall Z \subseteq X : \operatorname{diam}(Z) < \lambda \implies \exists Y \in \mathcal{X} : z \subseteq Y)$ również spełnia ten warunek.

[3] Niekiedy pomija się słowo „abstrakcyjny”.

Definicja 2.12. *Niech $J = \{v \mid \{v\} \in \mathcal{K}\}$ będzie zbiorem wierzchołków abstrakcyjnego kompleksu $\mathcal{K}$. Geometryczną realizacją abstrakcyjnego kompleksu symplicjalnego $\mathcal{K}$ nazywamy rodzinę $|\mathcal{K}|$ sympleksów w przestrzeni $\ell_2(J)$ składającą się z (geometrycznych) sympleksów skojarzonych z sympleksami abstrakcyjnymi z $\mathcal{K}$:*

$$|\mathcal{K}| = \{\mathrm{conv}(e_j)_{j\in K} \mid K \in \mathcal{K}\},$$

gdzie $\mathrm{conv}(v_i)_{i\in I}$ jest powłoką wypukłą wektorów v_i, a wektor e_j to taka funkcja należąca do $\ell_2(J)$, która przyjmuje wartość 1 dla $j \in J$ i zero w przeciwnym przypadku.
Rodzinę $|\mathcal{K}|$ nazywać będziemy kompleksem symplicjalnym[5].
Niekiedy będziemy utożsamiać kompleks $|\mathcal{K}|$ z jego sumą $\|\mathcal{K}\| = \bigcup |\mathcal{K}|$.

Definicja 2.13. *Przez gwiazdę wokół zbioru sympleksów H w kompleksie symplicjalnym $|\mathcal{K}|$ rozumieć będziemy zbiór $\mathrm{St}(H, G)$ wszystkich sympleksów z $|\mathcal{K}|$, które mają ściany należące do H. Często będziemy utożsamiać $\mathrm{St}(H, |\mathcal{K}|) \subseteq |\mathcal{K}|$ z $\bigcup \mathrm{St}(H, |\mathcal{K}|) \subseteq \|\mathcal{K}\|$.*

Definicja 2.14. *Przekształcenie $f : X \to \|\mathcal{K}\|$ z przestrzeni metrycznej w kompleks symplicjalny jest jednostajnie koograniczone, jeżeli rodzina przeciwobrazów gwiazd wokół wierzchołków $|\mathcal{K}|$ w kompleksie $|\mathcal{K}|$ jest jednostajnie ograniczona.*[6]

Wreszcie jesteśmy gotowi do przedstawienia najważniejszego twierdzenia tej sekcji. Przedstawiamy jedynie częściowy dowód, którego fragment prezentujemy bezpośrednio pod twierdzeniem, a jedną implikację (jedyną nieco trudniejszą) omawiamy w formie osobnej uwagi 2.16. W dowodzie warto zwrócić uwagę na istnienie liniowych zależności między stałymi z twierdzenia – te zależności są przyczyną, dla której wprowadzono uwagę 2.16, gdyż pełny dowód z [BD05] nie traktuje osobno odpowiedniej implikacji (uzasadnia ją jako konsekwencję innych), nie gwarantując równie dobrych zależności między stałymi.

Twierdzenie 2.15 (Charakteryzacja wymiaru asymptotycznego, [BD05])**.** *Niech X będzie przestrzenią metryczną. Następujące warunki są równoważne:*

1. $\mathrm{asdim} X \leqslant n$
2. *dla każdego $r < \infty$ istnieje $n + 1$ jednostajnie ograniczonych r-rozłącznych rodzin $\mathcal{U}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ podzbiorów X takich, że ich suma $\bigcup_i \mathcal{U}_i$ pokrywa X.*
3. *dla każdego $d < \infty$ istnieje jednostajnie ograniczona rodzina $\mathcal{V}$ pokrywająca przestrzeń X, której d-krotność nie przekracza $\leqslant n + 1$*
4. *dla każdej $\lambda < \infty$ istnieje jednostajnie ograniczone pokrycie[7] $\mathcal{W}$ przestrzeni X, którego liczba Lebesgue'a $\mathcal{L}(\mathcal{W}) \geqslant \lambda$, a krotność nie przekracza $\leqslant n + 1$*
5. *dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje kompleks symplicjalny wymiaru n i jednostajnie koograniczone, ϵ-Lipschitzowskie przekształcenie w geometryczną realizację tego kompleksu.*

---

[4] Uważny Czytelnik zauważy niejednoznaczność wprowadzonych tu pojęć, jednak następna definicja uzasadni ową wieloznaczność. Gdy chcemy uniknąć wieloznaczności, można użyć sformułowania „abstrakcyjny sympleks” dla odróżniania od geometrycznego sympleksu z 2.10.

[5] Często pomija się rozróżnienie na abstrakcyjny kompleks i jego geometryczną realizację podobnie, jak w przypadku „abstrakcyjnego sympleksu” (patrz poprzedni przypis) i geometrycznego sympleksu.

[6] Zgodnie z obowiązującymi konwencjami i wcześniejszymi zapowiedziami, w definicji utożsamiamy kompleks oraz gwiazdę z ich sumami mnogościowymi.

[7] Zamiast pokrycia wystarczy wziąć rodzinę pokrywającą. Aby z rodziny pokrywajacej otrzymać pokrycie o tej samej liczbie Lebesgue'a, wystarczy zastąpić rodzinę zbiorów rodziną wnętrz tych zbiorów.

Dowód. Dowodzimy jedynie $2 \implies 3 \implies 4 \iff 1$.

Implikacja $2 \implies 3$ wynika z tego, że suma $n+1$ r-rozłącznych rodzin jest rodziną o $\frac{r}{2}$-krotności nie przekraczającej $n+1$.

$3 \implies 4$ Wystarczy zauważyć, że jeśli d-krotność rodziny $\mathcal{V}$ nie przekracza $n+1$, to krotność rodziny d-otoczek elementów rodziny $\mathcal{V}$ również nie przekracza $n+1$ (a liczba Lebesgue'a to przynajmniej d).

Równoważność $1 \iff 4$ wynika z tego, że z jednej strony dla znalezienia rodziny $\mathcal{U}$ takiej, że dana rodzina $\mathcal{V}$ rozdrabnia $\mathcal{U}$, wystarczy wziąć pokrycie o liczbie Lebesgue'a większej niż ograniczenie średnic elementów pokrycia $\mathcal{V}$. Z drugiej zaś, jeżeli potrafimy znaleźć pokrycie „grubsze" od dowolnego, to w szczególności mamy pokrycie grubsze od pokrycia kulami o promieniu λ, czyli pokrycie o liczbie Lebesgue'a $\geqslant \lambda$.

Pomijamy dowody implikacji dotykających warunku nr 5, ponieważ znane autorowi dowody[8] są dość techniczne lub wymagają dodatkowych obserwacji dotyczących kompleksów symplicjalnych. □

Uwaga 2.16 (O odchudzaniu, implikacja $4 \implies 3$)**.** [9] *Jeśli warunek nr 4 z 2.15 jest prawdziwy ze stałą λ, to prawdziwy jest również warunek nr 3 ze stałą $d = \frac{\lambda}{2}$.*

Dowód. Niech $\mathcal{W}$ będzie pokryciem X o liczbie Legesgue'a λ (lub większej). Wykażemy najpierw, że kula o promieniu $\lambda/2$ wokół dowolnego $x \in X$ zawiera się w pewnym elemencie pokrycia $W \in \mathcal{W}$ (*). Rozpatrzmy rodzinę kul $B_n = B(x, \lambda/2 - \frac{1}{n})$. Każda taka kula, jako zbiór o średnicy $< \lambda$ zawiera się w pewnym $W \in \mathcal{W}$. Ponieważ krotność $\mathcal{W}$ to maksymalnie $n+1$ (w szczególności w x przecina się skończenie wiele elementów pokrycia), więc istnieje zbiór $W_0 \in \mathcal{W}$ taki, że nieskończenie wiele spośród kul B_n zawiera się w nim. Zatem suma tych kul, czyli kula $B(x, \lambda/2)$ również zawiera się w W_0.

Rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{V} = \{W' \mid W \in \mathcal{W}\}$, gdzie W' jest zdefiniowane następująco:

$$W' = \{x \in w \ \mid B(x, \lambda/2) \subseteq w \ \}.$$

Wobec (*), $\mathcal{V}$ pokrywa X. Sprawdźmy, czy jej $\frac{\lambda}{2}$-krotność nie przekracza $n+1$. Weźmy dowolny $y \in X$ i rozpatrzmy kulę $B(y, \frac{\lambda}{2})$. Ustalmy dowolne $W' \in \mathcal{V}$ nietrywialnie przecinające $B(y, \frac{\lambda}{2})$. Dla każdego $x \in W' \cap B(y, \frac{\lambda}{2})$ mamy oczywiście $d(y, x) < \lambda/2$, a jednocześnie z konstrukcji W' wiemy, że $B(x, \lambda/2) \subseteq W$, a zatem $y \in W$. Zbiorów W' przecinających $B(y, \frac{\lambda}{2})$ jest więc nie więcej niż zbiorów W, do których należy y. □

Powyższa uwaga kończy częściowy dowód 2.15 w ogólnym przypadku. Poniżej przedstawiamy uwagę mówiącą o równoważności warunków 2, 3 i 4 w przypadku $n = 0$, uznając, że studiowanie szczególnych przypadków bywa pomocne w głębszym zrozumieniu badanych zagadnień.

Uwaga 2.17 (O trywialnych równoważnościach)**.** *Warto zauważyć, że w przypadku $n = 0$ warunki 2, 3 i 4 są trywialnie równoważne. To znaczy, że gdy w ich sformułowaniach pominąć kwantyfikatory ogólne i przyjąć $r = d = \lambda$, to pozostają one równoważne. Można też przyjąć $\bigcup_{i=0}^{0} \mathcal{U}_i = \mathcal{V} = \mathcal{W}$ i wskazać najdrobniejszą*[10] *rodzinę $\mathcal{U}_0 = \mathcal{V} = \mathcal{W}$ spełniającą te warunki.*

[8] Mamy na myśli dowody $4 \implies 5$ oraz $5 \implies 2$ z [BD05].

[9] Uwaga 2.16 została napomknięta w [DS10] (w nieco innym sformułowaniu). Dowód w całości pochodzi od autora.

[10] W sensie 2.3.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że każdy warunek jest równoważny temu, że podział na $r = d = \lambda$-składowe (przypomnijmy: klasy abstrakcji relacji równoważności indukowanej przez utożsamienie punktów odległych o mniej niż $< r = d = \lambda$ (1.14)), jest jednostajnie ograniczony. Jest tak, ponieważ ($\Longrightarrow$) każda relacja równoważności wyznaczona przez podział $\bigcup_{i=0}^{0} \mathcal{U}_i = \mathcal{V} = \mathcal{W}$ jest nadzbiorem relacji bycia w $r = d = \lambda$-składowej (mówiąc poglądowo: każdy element podziału jest sumą pewnej liczby składowych). Ponadto ($\Longleftarrow$) podział na składowe, o ile jest jednostajnie ograniczony, to spełnia zadane warunki.

Dla warunku 2 jest oczywiste, że ($\Longrightarrow$) dowolny r-rozłączny podział skleja r-składowe oraz ($\Longleftarrow$) podział na r-składowe jest r-rozłączny. Podobnie jest dla 3: ($\Longrightarrow$) rozpatrzmy dowolny punkt x, należy on do jakiegoś elementu rodziny, zatem cała d-kula wokół x należy do tego samego elementu; ($\Longleftarrow$) ponieważ każdy punkt należy do jakiejś d-składowej wraz z całą d-kulą, a składowe są rozłączne, więc d-krotność rodziny składowych to 1. W przypadku 4: ($\Longrightarrow$) krotność 1 wymusza to, że wraz z punktem w elemencie pokrycia znajduje się cała λ-kula; ($\Longleftarrow$) λ-składowe oczywiście tworzą pokrycie o liczbie Lebesgue'a przynajmniej λ.

Z tego, że

1. każdy podział spełniający 2 lub 3 lub 4 jest jednostajnie ograniczony i jest „grubszy" niż podział na $r/d/\lambda$-składowe (implikacja $\Longrightarrow$);
2. podział na $r = d = \lambda$-składowe spełnia 2, 3 i 4 (implikacja $\Longleftarrow$);
3. spełnianie 2, 3, 4 przenosi się na „grubsze" podziały (odpowiadające większym relacjom równoważności), o ile są jednostajnie ograniczone (łatwo widać);

wynika, że można przyjąć $U_0 = \mathcal{V} = \mathcal{W}$ (niekoniecznie równe podziałowi na składowe). $\square$

2.3. Funkcja wymiaru

Istnieje wiele przestrzeni o nieskończonym wymiarze asymptotycznym. Co więcej, skończoność wymiaru asymptotycznego nie zachowuje się przy tak naturalnej operacji jak branie przestrzeni ilorazowej (nawet w przypadku ilorazu grup[11]). Dlatego poszukiwano własności słabszych niż skończoność wymiaru asymptotycznego – jedną z takich własności jest asymptotyczna własność C [Dr00]. Poprzez bardziej wnikliwą analizę przestrzeni z asymptotyczną własnością C, uogólniono przyjmujący wartości naturalne wymiar asymptotyczny asdim do tzw. pozaskończonego wymiaru asymptotycznego trasdim[12], [Ra06].

Inną wartą badania (o czym wspominaliśmy już we Wprowadzeniu) cechą przestrzeni o nieskończonym wymiarze asymptotycznym jest jej funkcja wymiaru, a dokładniej tempo wzrostu tej funkcji, które jest niezmiennikiem quasi-izometrii.

Definicja 2.18. *Funkcję wymiaru przestrzeni metrycznej X określamy następującą formułą:*

$$d_X(\lambda) = \min\left\{m(\mathcal{U}) - 1 \mid \mathcal{L}(\mathcal{U}) \geqslant \lambda,\ \sup_{U \in \mathcal{U}} \operatorname{diam}(U) < \infty,\ \mathcal{U} \text{ pokrywa } X\right\},$$

gdzie $m(\mathcal{U})$ to krotność rodziny $\mathcal{U}$, a $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ to jej liczba Lebesgue'a. Jest to najmniejsza krotność jednostajnie ograniczonej rodziny pokrywającej X o liczbie Lebesgue'a przynajmniej λ – pomniejszona o jeden.

[11]Konkretny przykład można znaleźć w [BD05], a po więcej szczegółów Autorzy odsyłają do [Ro03].

[12]Na marginesie warto dodać, że podobnych rozszerzeń dokonywano również w stosunku do asind i asInd, jednak te rozszerzenia okazywały się trywialne, patrz odpowiednio [Ra06] i [Ra05].

Funkcja wymiaru jest oczywiście niemalejąca i w nieskończoności zbiega do asymptotycznego wymiaru przestrzeni.

Zauważmy, że definicja funkcji wymiaru ściśle nawiązuje do warunku nr 4 z twierdzenia charakteryzującego wymiar asymptotyczny 2.15. Powyższa definicja została przyjęta za starszymi pracami Dranishnikova (patrz [Dr04], [BD05]) i wydaje się standardowa, chociaż w literaturze można spotkać również definicje nawiązujące do innych warunków z 2.15: w [CSY8] pojawia się definicja nawiązująca do warunku nr 3, a w 2010 roku w [DS10] sam Dranishnikov używa definicji nawiązującej do warunku nr 2.[13]

Zauważmy, że z częściowego dowodu 2.15 oraz z uwagi 2.16 wynika odpowiednio, że przejście od warunku nr 2 do warunku nr 3 i dalej do warunku nr 4 oraz od warunku nr 4 do warunku nr 3 może odbyć się kosztem zmniejszenia stałej $r \to d \to \lambda$ i odpowiednio $\lambda \to d$ o stały multiplikatywny czynnik. Konkretnie mamy oszacowania: $d_{X,2}(x) \geqslant d_{X,3}(\frac{x}{2}) \geqslant d_{X,4}(\frac{x}{2})$ oraz $d_{X,4}(x) \geqslant d_{X,3}(\frac{x}{2})$, czyli tempo wzrostu funkcji wymiaru zdefiniowanej przez warunek 3 i 4 jest takie samo i nie większe niż tempo wzrostu funkcji zdefiniowanej przez warunek 2. Niestety znane autorowi przejście (patrz [BD05]) od warunków nr 3 i 4 do warunku nr 2 odbywa się kosztem stałej $c(n)$ (przynajmniej rzędu $n\sqrt{n}$), co a priori (!) oznacza, że gdy złożenie funkcji wymiaru $d_X(\lambda)$ wg warunku 3 lub 4 i funkcji c jest przynajmniej liniowe: $c(d_X(\lambda)) = \Omega(\lambda)$ (a więc np. $d_X(\lambda) = \Omega(\lambda^{2/3})$), to od pewnego miejsca nie mamy żadnych oszacowań na funkcję wymiaru wg warunku 2 (może być np. od tego miejsca nieskończona). W [DS10] Autorzy prowadzą podobną dyskusję, również pozostawiając ostatnie pytanie bez odpowiedzi.

Podążając za [BD05] w 2.19 i 2.21 pokażemy, że tempo wzrostu funkcji wymiaru jest niezmiennikiem quasi-izometrii.

Stwierdzenie 2.19. *Dla quasi-izometrycznych przestrzeni X, Y istnieją pewne stałe B, C, że prawdziwe jest następujące oszacowanie:*

$$d_Y(\lambda) \leqslant d_X(C\lambda + B).$$

Dowód. Wiemy, że istnieje quasi-izometria $f : Y \to X$ spełniająca:

$$c \cdot d(y, y') - a \ \leqslant d(f(y), f(y')) \leqslant C \cdot d(y, y') + B.$$

Mając n-krotną rodzinę $\mathcal{V}$ pokrywającą X, możemy poprzez wzięcie przeciwobrazów skonstruować co najwyżej n-krotną rodzinę $\mathcal{W}$ pokrywającą Y (*). Co dzieje się ze stałymi? Jeżeli średnice zbiorów $V \in \mathcal{V}$ były ograniczone przez M, to $N = \frac{M+A}{c}$ ogranicza średnice zbiorów $W \in \mathcal{W}$, a zatem dostajemy jednostajnie ograniczoną rodzinę. Podobnie, jeżeli liczba Lebesgue'a dla $\mathcal{V}$ to λ, to liczba Lebesgue'a dla $\mathcal{W}$ to przynajmniej $\frac{\lambda - B}{C}$. □

Uwaga 2.20. *Zauważmy, że jeśli w powyższym dowodzie zastąpić pojęcia „liczba Lebesgue'a λ" oraz „krotność n" przez „r-rozłączne" „rodziny w liczbie $n+1$" lub „d-krotność co najwyżej $n+1$", to otrzymamy dowody analogicznej uwagi dla definicji funkcji wzrostu nawiązującej do warunków odpowiednio 2 i 3 z 2.15.*

Z powyższych uwag wynika następujący

Wniosek 2.21. *Tempo wzrostu funkcji wymiaru d_X jest niezmiennikiem quasi-izometrii (niezależnie, czy definicję funkcji wymiaru oprzemy na warunku 2, 3 lub 4 z 2.15).*

[13] Dla uniknięcia kompletnego chaosu w ramach jednej pracy nadaje się tym funkcjom nieco inne oznaczenia i nazwy jak „dimension function", „dimension growth" czy „asymptotic dimension growth", jednak zupełnie brak tu konsekwencji między pracami czy autorami. Użyte w niniejszej pracy oznaczenie i nazwa są zgodne z [BD05].

Dowód / komentarz. Sprecyzujmy, co mówi powyższy wniosek. W [DS10] dwie monotoniczne funkcje f, g mają ten sam wzrost, gdy istnieją takie stałe a, t_0, że dla $t > t_0$ zachodzą nierówności: $f(t) \leqslant g(at)$ oraz $g(t) \leqslant f(at)$. Przy takich definicjach wniosek jest trywialny. My jednak chcemy pokazać, jak powyższe zależności przekładają się na asymptotykę.

Otóż, jeżeli prawdziwa jest któraś z równości $d_X(\lambda) = O(\lambda^p),\ o(\lambda^p),\ \Omega(\lambda^p)$ lub $\omega(\lambda^p)$ dla $p > 0$, to dla przestrzeni Y quasi-izometrycznej z X prawdziwa będzie analogiczna równość dla d_Y. Podobnie będzie dla innych niezbyt szybko rosnących funkcji np. $\lambda^k \ln^l \lambda$ Ponadto zachowywane jest wykładnicze tempo wzrostu, tzn. jeśli $d_X(\lambda) = O(a^\lambda),\ o(a^\lambda),\ \Omega(a^\lambda)$ lub $\omega(a^\lambda)$ dla $a > 1$, to istnieje takie $b > 1$, że $d_Y = O(b^\lambda),\ o(b^\lambda),\ \Omega(b^\lambda)$ lub $\omega(b^\lambda)$.

Z uwagi 2.19 łatwo wynikają oszacowania używające notacji O oraz o (w przypadku funkcji wykładniczych można wziąć $b = a^C$). W przypadku notacji Ω oraz ω stosujemy uwagę 2.19 dla przestrzeni X i Y zamienionych rolami, dostając $d_X(\lambda) \leqslant d_Y(C'\lambda + B')$, z czego natychmiast otrzymujemy tezę (dla funkcji wykładniczych można przyjąć $b = a^{\frac{1}{C'}}$). □

Z powyższego wynika natychmiast wniosek:

Wniosek 2.22. *Tempo wzrostu funkcji wymiaru skończenie generowanej grupy jest niezależne od obranej metryki długości słowa. [NoDFW[14]]*

Przykład 2.23 ([BD05]). *dla skończenie generowanej grupy G z metryką długości słowa istnieje takie α, że prawdziwa jest nierówność:*

$$d_G(\lambda) \ \leqslant\ e^{\alpha\lambda}.$$

Dowód. Niech S będzie zbiorem generatorów G wyznaczającym metrykę długości słowa na G. Niech $H = \{g^{-1} \mid g \in S\} \cup G$ i $n = |H|$. Wówczas moc kuli o promieniu λ jest mniejsza niż $(n+1)^\lambda$. Rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{U} = \{\mathrm{B}(\gamma, \lambda) \mid \gamma \in G\}$. Liczba Lebesgue'a takiego pokrycia to przynajmniej λ a krotność nie przekracza $(n+1)^\lambda$. □

W [Dr04] można też znaleźć twierdzenie pozwalające stwierdzić, że tempo wzrostu funkcji wymiaru grupy spełniającej określone założenia jest co najwyżej wielomianowe.

2.4. Wzrost funkcji wymiaru – zależność od wyboru przestrzeni zgrubnie równoważnej

W twierdzeniu 2.28 pokażemy, że przestrzeń o dowolnie wolno rosnącej funkcji wymiaru jest zgrubnie równoważna pewnej przestrzeni o dowolnie szybko rosnącej funkcji wymiaru. Tym samym udowodnimy, że choć wzrost funkcji wymiaru jest niezmiennikiem quasi-izometrii, to nie jest zgrubnym niezmiennikiem. Dla kompletności naszego rezultatu pokażmy najpierw, że istnieją przestrzenie o dowolnie wolno rosnącej funkcji wymiaru.

Przykład 2.24. *Dla dowolnej monotonicznej i nieograniczonej funkcji $f : [0, \infty) \to \mathbb{N}$ istnieje przestrzeń X o funkcji wymiaru $d_X(\lambda) \leqslant f(\lambda)$ i taka, że* $\mathrm{asdim} X = \infty$*. [NoDFW]*

[14] NoDFW - niezależnie od definicji funkcji wymiaru. Znaczy to, że twierdzenie jest prawdziwe niezależnie od tego, czy definicję funkcji wymiaru oprzemy na warunku 2, 3 czy 4 z tw. 2.15. Będziemy tę notację stosować w kolejnych twierdzeniach.

Dowód. Bez straty ogólności załóżmy, że f jest prawostronnie ciągła. Dla każdego $n \in \mathrm{im}(f)$ mamy więc najmniejszą liczbę $l(n) \geqslant 0$ taką, że $f(l(n)) = n$. Niech $\{n_m\} = \mathrm{im}(f)$ będzie ciągiem rosnącym. Rozpatrzmy przestrzeń

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} l(n_m) \cdot (\{1\} \times \mathbb{Z}^{n_m}) \subseteq \ell^2$$

(zanurzamy tak, by funkcje z różnych zbiorów postaci $\{1\} \times \mathbb{Z}^n$ miały rozłączne nośniki). Zauważmy, że $d_A(\lambda) = \sup(d_{A_i}(\lambda))$, jeśli A jest λ-rozłączną sumą A_i [NoDFW]. Ponieważ

$$\mathrm{asdim} X_{j,k} \overset{def.}{=\!=} \mathrm{asdim}\Big(\bigcup_{m=j}^{k} l(n_m) \cdot (\{1\} \times \mathbb{Z}^{n_m})\Big) \leqslant n_k \quad ^{15}$$

oraz

$$d_{X_{k+1,\infty}}(l(n_{k+1})) = \sup(0) = 0,$$

a X jest $l(n_{k+1})$-rozłączną sumą $X_{1,k}$ i $X_{k+1,\infty}$, więc $d_X(l(n_{k+1})) \leqslant n_k$, co kończy dowód. □

Lemat 2.25 (O zmianie metryki). *Jeżeli dla funkcji $c : [0, \infty) \to [0, \infty)$ zachodzi:*

1. $c(0) = 0$,
2. *c nie jest tożsamościowo równa zero,*
3. *c jest wklęsła;*

to dla dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d), para $(X, c \circ d)$ również jest przestrzenią metryczną.

Dowód. Trzeba sprawdzić czy $c \circ d$ spełnia definicję metryki. Z 1. wynika, że $c \circ d(x, x) = 0$. Z 2. i 3. mamy: $c(r) = 0 \implies r = 0$, a zatem $c \circ d(x, y) > 0$ dla $x \neq y$. Symetria jest oczywista. Pozostaje sprawdzić nierówność trójkąta. Niech $d(x, y) = p$, $d(y, z) = q$, $d(x, z) = r \leqslant p + q$ oraz $p, q, r \neq 0$. Wobec 2. i 3. funkcja c jest niemalejąca, a zatem, gdy $r \leqslant p$ lub $r \leqslant q$, to natychmiast dostajemy nierówność trójkąta $c(r) \leqslant c(p) + c(q)$. Załómy zatem $p, q \leqslant r$. Korzystając z monotoniczności ilorazów różnicowych funkcji wklęsłej dostajemy:

$$c \circ d(x, z) = c(r) = r \cdot \frac{c(r)}{r} \overset{\text{nier.}\Delta}{\leqslant} p \cdot \frac{c(r)}{r} + q \cdot \frac{c(r)}{r} \overset{\text{wklęsłość}}{\leqslant} p \cdot \frac{c(p)}{p} + q \frac{c(q)}{q} = c \circ d(x, y) + c \circ d(y, z).$$

□

Lemat 2.26. *Przy założeniach poprzedniego lematu, gdy ponadto c jest funkcją nieograniczoną, przestrzenie (X, d) oraz $(X, c \circ d)$ są zgrubnie równoważne. Gdy ponadto c jest ciągła w zerze, to są one homeomorficzne.*

Dowód. Wystarczy wykazać, że identyczność $id : (X, c \circ d) \to (X, d)$ $(x' \mapsto x)$ jest zgrubną równoważnością i homeomorfizmem. Dzięki założeniu o nieograniczoności c istnieje c^{-1} (również monotoniczne i rozbieżne do nieskończoności)[16]. Oznaczmy $c \circ d$ przez d'.

$$c^{-1}\Big(d'(x', y')\Big) \leqslant d(x, y) \leqslant c^{-1}\Big(d'(x', y')\Big)$$

Jeśli c jest ciągła w zerze, to identyczność $id^{-1} : (X, d) \to (X, c \circ d)$ jest ciągła. Ponadto c^{-1} jest ciągła jako monotoniczna i wypukła, więc identyczność id jest ciągła. □

[15] Korzystamy z tego, że $\mathrm{asdim}\mathbb{Z}^n \leqslant n$ oraz $\mathrm{asdim}\big(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\big) = \max(\mathrm{asdim} X_i)$. Dowód obu faktów można znaleźć np. w [BD05]. Ponadto powyższa nierówność wynika z tw. 4.4, a dowód równości można potraktować jako ćwiczenie (wskazówka: warunek nr 2 z 2.15).

Lemat 2.27 (O wpisywaniu funkcji wklęsłej). *Dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ monotonicznie rozbieżnej do nieskończoności istnieje funkcja $c : [0, \infty) \to [0, \infty)$ spełniająca:*

1. *$c(0) = 0$ i c jest liniowa na pewnym otoczeniu zera,*
2. *c rozbieżna do nieskończoności,*
3. *c wklęsła,*

a ponadto od pewnego momentu $c \leqslant f$.

Dowód. Bez straty ogólności załóżmy, że f jest lewostronnie ciągła. Dla każdego $n \in \mathrm{im}(f) = (n_i)_{i=1}^{\infty}$ mamy więc największą liczbę $r(n) \in \mathbb{R}^+$ taką, że $f(r(n)) = n$. Zauważmy, że $r(n_i)$ rozbiega monotonicznie do nieskończoności oraz $n_2 > 0$. Niech c na przedziale $[0, r(n_2)]$ będzie liniowa taka, że $c(0) = 0$ i $c(r(n_2)) = n_2$. Zauważmy, że c dla $x > r(n_1)$ jest nie większa niż f. Kontynuujemy indukcyjnie.

Załóżmy że funkcja jest określona do $r(n_k)$ i $c(r(n_k)) = n_k$. Jeżeli przedłużenie liniowe do punktu $c(r(n_{k+1})) = n_{k+1}$ powoduje, że c przestaje być wklęsła, to próbujemy przedłużyć do punktu $c(r(n_{k+2})) = n_{k+2}$ itd. Jeżeli w końcu uda się, to krok indukcyjny uznajemy za zakończony. Jeżeli żadne przedłużenie nie jest możliwe, to funkcję na $(r(n_k), \infty)$ przedłużamy liniowo tak, by miała pochodną w $r(n_k)$. □

Jesteśmy już gotowi, by udowodnić twierdzenie o zgrubnej równoważności przestrzeni o wolnym i szybkim wzroście funkcji wymiaru.

Twierdzenie 2.28 (O ogromnej funkcji wymiaru). *Dla dowolnej przestrzeni (X, d) takiej, że $\mathrm{asdim} X = \infty$, istnieje zgrubnie i homeomorficznie równoważna metryka $d' = c \circ d$ taka, że funkcja wymiaru dla $Y = (X, d')$ rośnie nie wolniej niż dowolny ustalony homeomorfizm B półprostej nieujemnej $[0, \infty)$. [NoDFW]*

Dowód. Z lematu 2.27 istnieje funkcja c spełniająca założenia lematu 2.26 taka, że od pewnego miejsca $c \leqslant \lfloor B^{-1} \circ d_X \rfloor$, gdzie d_X jest funkcją wymiaru dla X. Wobec lematu 2.26 przestrzeń $(Y, e) = (X, c \circ d)$ jest zgrubnie równoważna przestrzeni X. Ponadto z liniowości c na otoczeniu zera dostajemy, że ta zgrubna równoważność jest homeomorfizmem. Udowodnimy, że $d_Y(\lambda) = \Omega(B(\lambda))$.

Zauważmy, że jednostajnie ograniczona rodzina o liczbie Lebesgue'a λ i ustalonej krotności istnieje dla X wtedy i tylko wtedy, gdy dla Y istnieje analogiczna rodzina o liczbie Lebesgue'a $c(\lambda)$ (używamy ścisłej monotoniczności c). Tak samo jest dla rodziny o ustalonej d- lub $c(d)$-krotności (warunek 3 z 2.15) oraz dla r- i $c(r)$-rozłącznych rodzin (których liczba jest ustalona) (warunek 2).

Zatem $d_Y(\lambda) = d_X(c^{-1}(\lambda))$. Z tego, że od pewnego miejsca $c \leqslant \lfloor B^{-1} \circ d_X \rfloor$ mamy (nierówności są prawdziwe na pewnych półprostych w $[0, \infty)$):

$$id = c \circ c^{-1} \leqslant B^{-1} \circ d_X \circ c^{-1}$$

$$B \leqslant d_X \circ c^{-1} = d_Y$$

□

Dostajemy zatem:

[16] Jeśli c jest nieciągła w 0, to $c^{-1} : \mathrm{im}(c) \to [0, \infty)$ można przedłużyć do funkcji z $[0, \infty)$, przyjmując 0 na $[0, \infty) \setminus \mathrm{im}(c) = \big(0, \lim_{x \to 0^+} c(0)\big)$.

Wniosek 2.29 (O dwóch funkcjach wymiaru)**.** *dla dowolnych monotonicznych funkcji* $f, F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ *rozbieżnych do nieskończoności istnieje para zgrubnie i homeomorficznie równoważnych przestrzeni metrycznych* X, Y *takich, że* $d_X = O(f)$ *oraz* $d_Y = \Omega(F)$[17]*. W szczególności tempo wzrostu funkcji wymiaru nie jest zgrubnym niezmiennikiem. [NoDFW]*

Dowód. Wynika natychmiast z przykładu 2.24 oraz ostatniego twierdzenia wobec tego, że dla dowolnej funkcji monotonicznej $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ istnieje homeomorfizm $B : [0, \infty) \to [0, \infty)$ taki, że $B = \Omega(F)$. □

Uwaga 2.30. *Twierdzenia 2.28 nie można odwrócić, tzn. nie dla każdej przestrzeni metrycznej o* asdim $= \infty$ *i homeomorfizmu s półprostej nieujemnej, istnieje zgrubnie równoważna przestrzeń, której funkcja wymiaru to* $O(s)$.
Więcej: dla każdej przestrzeni quasi-geodezyjnej X *i dowolnej zgrubnie równoważnej przestrzeni* Y *istnieje takie* D*, że od pewnego miejsca* $d_Y(\lambda) \geqslant d_X(\frac{\lambda}{D})$*. W szczególności istnieje taka rozbieżna monotonicznie do nieskończoności funkcja* $s_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$*, że dla dowolnego* Y *jw. od pewnego miejsca* $d_Y(\lambda) \geqslant s_0$*. [NoDFW]*

Dowód. Niech X będzie quasi-geodezyjna, a zgrubną równoważność wyznacza funkcja $f : X \to Y$. Ponieważ każda zgrubnie jednostajna funkcja z przestrzeni quasi-izometrycznej jest ws-lipschitzowska (z pewnymi parametrami C, A), dostajemy, że $d_X(\lambda) \leqslant d_Y(C\lambda + A)$ (rodzinę/rodziny dla X znajdujemy biorąc przeciwobrazy rodziny/rodzin dla Y[18]). Jeśli $\frac{\lambda - A}{C} > 0$, to możemy napisać $d_X(\frac{\lambda - A}{C}) \leqslant d_Y(\lambda)$. Dla dostatecznie dużych λ zachodzi więc $d_X(\frac{\lambda}{C+1}) \leqslant d_Y(\lambda)$. Dowód w zasadzie można uznać za zakończony, pozostał szczegół techniczny w postaci konstrukcji funkcji s_0.

Niech $s_{0|[0,1]} = d_X$. Niech $s_{0|(1,a_2]}(\lambda) = \max(s_0(1), d_X(\frac{\lambda}{2}))$ i niech a_2 będzie takie, że $s_0(1) \leqslant d_X(\frac{a_2}{2}) \geqslant 2$. Na przedziale $(a_2, a_3]$ niech zachodzi $s_{0|(a_2,a_3]}(\lambda) = \max(s_0(a_2), d_X(\frac{\lambda}{3}))$ i niech a_3 będzie takie, że $s_0(a_2) \leqslant d_X(\frac{a_3}{3}) \geqslant 3$. Dalej analogicznie. Łatwo widzieć, że na $[a_k, \infty)$ zachodzi nierówność $s_{0|[a_k,\infty)}(\lambda) \leqslant d_X(\frac{\lambda}{k})$, a zatem dla każdego Y i dostatecznie dużego λ oraz k zachodzi: $d_Y(\lambda) \geqslant d_X(\frac{\lambda}{C+1}) \geqslant d_X(\frac{\lambda}{k}) \geqslant s_0(\lambda)$. □

[17] Dla O, Ω można przyjąć stałą multiplikatywną 1. Dla O nierówność jest prawdziwa na całej półprostej dodatniej.

[18] Mowa o rodzinie z warunku 3 lub 4 z 2.15 lub o rodzinach z warunku 2. Jak wielokrotnie pisano warunków tych używa się do definiowania różnych wariantów funkcji wymiaru.

Rozdział 3

Warianty pojęcia wymiaru, których definicje odnoszą się do funkcji liniowych: $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}$, $\dim_{\mathrm{AN}}$, $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$, l-asdim

3.1. Funkcja Gromova i funkcja kontroli

Zaczniemy od pojęć pierwotnych dla wariantów pojęcia wymiaru, które omawiamy w tej sekcji. Zaczniemy of funkcji Gromova wprowadzonej w [Gr93].

Definicja 3.1. *Funkcją Gromova dla nierówności* $\mathrm{asdim} X \leqslant n$ *nazywamy funkcję daną następującym wzorem:*

$$\gamma_X(\lambda) = \inf\Big\{\mathrm{diam}(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \text{ jest pokryciem } X,\ \mathcal{L}(\mathcal{U}) \geqslant \lambda,\ m(\mathcal{U}) \leqslant n+1\Big\},$$

gdzie przez $\mathrm{diam}(\mathcal{U})$ *rozumiemy* $\sup_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{diam}(U)$.

Uwaga 3.2. *Warunek* $\mathrm{asdim} X \leqslant n$ *jest równoważny temu, że funkcja Gromova dla nierówności* $\mathrm{asdim} X \leqslant n$ *przyjmuje tylko skończone wartości.*

W dalszej części tej sekcji używać będziemy definicji funkcji podobnej do funkcji Gromova, ale niejednoznacznej – to znaczy: funkcja nie będzie wyrażała się przez infimum po zbiorze, ale przez liczbę ze zbioru lub większą. Szczegóły poniżej.

Definicja 3.3. *n-wymiarową funkcją kontroli wg warunku $i = 2$, 3 lub 4 (odpowiednio) nazywamy dowolną funkcję* $D_X = D^n_{Xi} : \mathbb{R}^+ \to [0,\infty]$ *spełniającą:*

$$\forall_{\lambda\in\mathbb{R}^+} \exists_{\mathcal{U}\subseteq 2^X} : \mathrm{diam}(\mathcal{U}) \leqslant D_X(\lambda),$$

gdzie $\mathcal{U}$ jest odpowiednio:

2. *sumą $n+1$ λ-rozłącznych rodzin pokrywającą X,*
3. *rodziną o λ-krotności ograniczonej przez $n+1$ pokrywającą X,*
4. *rodziną pokrywającą X o liczbie Lebesgue'a przynajmniej λ i krotności ograniczonej przez $n+1$.*

Z dowodu 2.15 wynika następujące szacowanie: $D_{X2}(2\lambda) \geqslant D_{X3}(\lambda) \geqslant D_{X4}(\lambda) - 2\lambda$, a z dowodu 2.16 kolejne: $D_{X4}(2\lambda) \geqslant D_{X3}(\lambda)$. Ponadto analiza pełnego dowodu twierdzenia 2.15 w [BD05] daje oszacowanie $C_1 \cdot D_{X4}(C_2 \cdot \lambda) \geqslant D_{X2}(\lambda)$ dla pewnych stałych dodatnich C_1, C_2 (stała C_2 zależy od n). Tym samym potrafimy przejść od definicji 4 do 2 i 3 bez zmiany asymptotyki funkcji oraz z 2 do 3, jednak metody, którymi dysponujemy przy przechodzeniu z 2 lub 3 do 4 (zatem również z 3 do 2), powodują, że funkcja rośnie o składnik liniowy. Nie da się tego uniknąć, ponieważ z jednej strony łatwo widać, że dla dowolnej nieograniczonej przestrzeni metrycznej funkcja kontroli wg warunku 4 nigdy nie będzie $o(\lambda)$ (rodzina o liczbie Lebesgue'a $\lambda + \varepsilon$ musi mieć średnicę przynajmniej λ – oczywiście pod warunkiem, że w przestrzeni istnieją zbiory o średnicy λ). Z drugiej strony nie jest to prawdą dla warunku nr 2 (a w myśl nierówności $D_{X2}(2\lambda) \geqslant D_{X3}(\lambda)$ również dla warunku nr 3).

Przykład 3.4 (podliniowa funkcja kontroli). *Przestrzeń $X = \{2^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ma 1-wymiarową funkcję kontroli wg warunku 2 rzędu mniejszego niż liniowy*[1].

Dowód. Wystarczy zauważyć, że D_X dana wzorem

$$D_X(r) = 2^{2^{n-1}} \text{ dla } 2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} < r \leqslant 2^{2^{n+1}} - 2^{2^n}$$

jest funkcją kontroli wg warunku 2 oraz $\frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Rodzina rodzin z definicji funkcji kontroli to: $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$, gdzie $\mathcal{U}_1 = \left\{ \{2^{2^m} \mid m \leqslant n-1\} \right\}$ oraz $\mathcal{U}_2 = \left\{ \{2^{2^m}\} \mid m \geqslant n \right\}$. $\square$

Mamy następujący oczywisty fakt:

Uwaga 3.5. *Funkcja kontroli jest monotoniczna, tzn. jeśli $Y \subseteq X$ i D_X jest n-wymiarową funkcją kontroli wg warunku 2, 3 lub 4 dla przestrzeni X, to $D_Y = D_X$ jest n-wymiarową funkcją kontroli wg warunku 2, 3 lub 4 (odpowiednio) dla przestrzeni Y. Jako infimum funkcji wymiaru wg warunku 4 funkcja Gromova jest również monotoniczna w tym sensie.*

Dla funkcji kontroli zachodzi następujący analog twierdzenia o ogromnej funkcji wymiaru (2.28).

Twierdzenie 3.6 (O liniowej funkcji kontroli). *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną a D_X n-wymiarową funkcją kontroli wg warunku 2, 3 lub 4. Wówczas istnieje zgrubnie i homeomorficznie równoważna metryka d', że dla przestrzeni $Y = (X, d')$ mamy $D_Y(\lambda) = \Theta(\lambda)$.*

Dowód. Dzięki temu, że funkcję wymiaru można dowolnie powiększać wystarczy udowodnić, że istnieje Y taka, że $D_Y(\lambda) = O(\lambda)$. Wykorzystamy lemat 2.26 – wystarczy znaleźć odpowiednią funkcję c. Postępujemy indukcyjnie. Niech $c_{|[0,1]}(r) = r$ (to gwarantuje, że otrzymamy homeomorfizm).

Zakładamy więc $D_X(1) = \sup_{r\in[0,1]} D(r)$. Niech $c(r)$ na $[a_1, a_2]$ będzie liniowa i na końcach przedziału przyjmuje wartości 1 oraz 2, gdzie $a_1 = 1$ a $a_2 \in \mathbb{N}$ wynosi przynajmniej $D(a_1)$ i jest takie, by $c_{|[0,a_2]}$ była funkcją wklęsłą. Na $[a_i, a_{i+1}]$ definiujemy c jako afiniczną funkcję łączącą wartości i oraz $i+1$, przyjmując $a_{i+1} \in \mathbb{N}$ takie, by $a_{i+1} \geqslant D(a_i)$ oraz $c_{|[0,a_{i+1}]}$ była funkcją wklęsłą. Używając lematu 2.26 określamy Y jako X z metryką $d' = c \circ d$.

Bez starty ogólności możemy zakładać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $D_X(n) = \sup_{r\in[0,n]} D_X(r)$ – jeśli tak nie jest, to mogę zdefiniować D'_X takie, że $D'_X(r) = \min\left(D_X(r), D_X(n)\right)$ dla $r \in [0, n]$. Oczywiście, żeby brać minimum i nie podpierać się przejściami granicznymi operację zmniejszenia wartości możemy wykonać w każdym punkcie tylko skończenie wiele razy. Gdyby indukcyjne zmniejszanie prowadziło do nieskończenie wielu zmian w jakimś

[1] Oczywiście przestrzeń X ma asdim $= 0$, więc przykład jest nieco sztuczny.

punkcie, to mielibyśmy podciąg n_k taki, że $D_X(n_k) \leqslant M$ dla pewnego M i moglibyśmy przyjąć $D_X(\lambda) = M = O(\lambda)$, co natychmiast kończyłoby dowód.

Przy powyższym założeniu z konstrukcji łatwo widać, że $D_Y(\lambda) \leqslant \lfloor \lambda \rfloor + 2$, dowód został zakończony. □

Po przedstawieniu przykładu i twierdzenia o charakterze negatywnym nadszedł czas na zaprezentowanie wyników pozytywnych. Pokażemy, że rząd funkcji kontroli jest niezmiennikiem quasi-izometrii.

Stwierdzenie 3.7. *Dla pary przestrzeni quasi-izometrycznych X, Y i ustalonej n-wymiarowej funkcji kontroli D_X wg warunku 2, 3 lub 4 istnieją takie stałe dodatnie B, C, K, L, że prawdziwa jest nierówność:*

$$D_Y(\lambda) \leqslant K \cdot D_X(C\lambda + B) + L.$$

Dowód. Niech $f : X \to Y$ będzie zgrubną równoważnością przestrzeni X, Y spełniającą nierówność:

$$c \cdot d(x_1, x_2) - a \ \leqslant d'(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C \cdot d(x_1, x_2) + B$$

(dla pewnych stałych c, C, A, B). Biorąc przeciwobraz rodziny $\mathcal{V}$ (wg warunku 2, 3 lub 4) dla Y i stałej $C\lambda + B$ dostaniemy rodzinę $\mathcal{U}$ dla stałej λ. Jeśli $\operatorname{diam}(\mathcal{U}) = R$, to $\operatorname{diam}(\mathcal{V}) \geqslant cR - A$, zatem $R \leqslant \frac{\operatorname{diam}(\mathcal{V})+A}{c}$. Ostatecznie mamy: $D_Y(\lambda) \leqslant \frac{D_X(C\lambda+B)+A}{c}$. □

Natychmiast dostajemy więc:

Wniosek 3.8. *Tempo wzrostu infimum n-wymiarowych funkcji kontroli wg warunku 2, 3 lub 4 dla nierówności jest niezmiennikiem quasi-izometrii. W szczególności tempo wzrostu funkcji Gromova dla nierówności* asdim $\leqslant n$ *jest niezmiennikiem quasi-izometrii.*

Stwierdzenie 3.7 można uogólnić w następujący sposób.

Uwaga 3.9. *dla zgrubnie równoważnych przestrzeni metrycznych X, Y, istnieją pewne rozbieżne monotonicznie do nieskończoności funkcje $c, C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, że $c\,(D_Y(\lambda)) \leqslant D_X(C(\lambda))$.*

Dowód. Analogiczny jak dla 3.7. Jeśli mamy

$$c\,(d(x_1, x_2)) \leqslant d'(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C'\,(d(x_1, x_2))\,,$$

dla pewnych monotonicznych i rozbieżnych do nieskończoności funkcji c, C', to, biorąc przeciwobraz rodziny $\mathcal{V}$ dla przestrzeni Y i stałej $C'(\lambda) + \varepsilon$ (epsilon jest potrzebny dla warunków 3 i 4, gdyż nie mamy gwarancji, że funkcja C jest ściśle monotoniczna) dostaniemy rodzinę $\mathcal{U}$ dla przestrzeni X i stałej λ. Gdy $\operatorname{diam}\mathcal{U} \leqslant R$, to $\operatorname{diam}\mathcal{V} \geqslant \lim_{r \to R^-} c'(r)$, zatem przyjmując $c(R) = \lim_{r \to R^-} c'(r)$ oraz $C(\lambda) = C'(\lambda) + \varepsilon$, dostajemy tezę. □

3.2. Definicje, przykłady i zależności dla wymiarów $\operatorname{micdim}_{\mathrm{AN}}$, $\dim_{\mathrm{AN}}$, $\operatorname{asdim}_{\mathrm{AN}}$, l-asdim

Po krótkim wstępie dotyczącym funkcji Gromova oraz funkcji kontroli jesteśmy przygotowani, by zdefiniować różne warianty pojęcia wymiaru (asymptotycznego).

Ze względu na to, że zajmować się będziemy funkcjami kontroli o charakterze liniowym rozróżnianie między funkcjami kontroli wg warunków 2, 3 lub 4 jest niepotrzebne.

Konwencja 3.10. *od tej chwili przez funkcję kontroli będziemy rozumieli funkcję kontroli wg warunku 2.*

3.2.1. Definicja i natychmiastowe obserwacje

Definicja 3.11. *Niech X będzie przestrzenią metryczną.*

Mówimy, że wymiar Assouada-Nagaty *przestrzeni X nie przekracza n, gdy ma ona* ***liniową*** *n-wymiarową funkcję kontroli. Piszemy* $\mathrm{dim}_{\mathrm{AN}} X \leqslant n$.

Mówimy, że mikroskopijny wymiar Assouada-Nagaty *przestrzeni X nie przekracza n, gdy ma ona n-wymiarową funkcję kontroli* ***liniową na pewnym otoczeniu zera****. Piszemy* $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}} X \leqslant n$.

Mówimy, że asymptotyczny wymiar Assouada-Nagaty *przestrzeni X nie przekracza n, gdy ma ona* ***afiniczną*** *n-wymiarową funkcję kontroli. Piszemy* $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} X \leqslant n$.

Mówimy, że liniowo kontrolowany wymiar asymptotyczny *przestrzeni X nie przekracza n, gdy ma ona n-wymiarową funkcję kontroli* ***liniową na pewnym nieograniczonym zbiorze*** *$S \subseteq \mathbb{R}^+$, tzn. $\exists_{c \in R^+} \forall_{s \in S} D_X(s) = c \cdot s$. Piszemy* $\text{l-asdim} X \leqslant n$.

Zauważmy, że w definicji l-asdim możemy równie dobrze użyć funkcji afinicznych – jeśli istnieje funkcja kontroli spełniająca $D_{X|S} = cs + A$, to istnieje też funkcja kontroli D'_X spełniająca $D'_{X|S\setminus(0,s_0)}(s) = \frac{D_X(s_0)}{s_0} s$, gdzie s_0 jest dowolnym elementem S.

Podobnie można argumentować, że w definicji $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$ można równoważnie żądać, by istniała funkcja kontroli liniowa na pewnej (dowolnej lub z góry ustalonej) półprostej. Przejście od oryginalnej definicji do zmodyfikowanej wykonujemy jak dla l-asdim, a przechodząc od zmodyfikowanej do oryginalnej, definiujemy $D'_X(r) = cr + D_X(s_0)$, gdzie c jest stałą zaświadczającą o liniowości D_X na pewnej półprostej $[s_0, \infty)$.

Wobec powyższych obserwacji z definicji natychmiast wynikają następujące fakty.

Stwierdzenie 3.12.

$$\max(\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}} X, \mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} X) = \mathrm{dim}_{\mathrm{AN}} X$$

Stwierdzenie 3.13.

$$\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} X \geqslant \text{l-asdim} X \geqslant \mathrm{asdim} X$$

Odnotujmy ponadto następującą własność:

Przykład 3.14. *dla przestrzeni liniowej X z metryką generowaną przez quasi-normę (tzn. normę r-jednorodną) warunki:* $\mathrm{dim}_{\mathrm{AN}} X \leqslant n$, $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}} X \leqslant n$, $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} X \leqslant n$, $\text{l-asdim} X \leqslant n$, $\mathrm{asdim} X \leqslant n$ *są równoważne temu, że dla pewnego R istnieje $n+1$ R-rozłącznych i jednostajnie ograniczonych rodzin pokrywających X.*

Dowód. Rodziny dla $R' \neq R$ uzyskujemy poddając wyjściową rodzinę jednokładności (o skali $(\frac{R'}{R})^{\frac{1}{r}}$). Ograniczenie zmienia się proporocjonalnie do R', czyli funkcja kontroli jest liniowa. □

Dzięki rozważaniom z poprzedniego rozdziału natychmiast dostajemy też kolejne wnioski:

Wniosek 3.15. *Wymiar* asdim, l-asdim, $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$, $\mathrm{dim}_{\mathrm{AN}}$ *oraz* $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}$ *jest monotoniczny, to znaczy wymiar podprzestrzeni nie przekracza wymiaru przestrzeni.*

Dowód. Natychmiast z uwagi 3.5. □

Wniosek 3.16. *Wymiar* l-asdim *oraz* $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$ *są niezmiennikami quasi-izometrii.*

Dowód. Natychmiast ze stwierdzenia 3.7. □

Wniosek 3.17. *Wymiar* asdim *jest zgrubnym niezmiennikiem.*

Dowód. Natychmiast z uwagi 3.9. □

Wniosek 3.18 (O zgrubnej trywialności wymiaru Assouada-Nagaty)**.**
dla dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d)*, której wymiar asymptotyczny* asdim$X$ *nie przekracza* n *istnieje zgrubnie równoważna metryka* d' *taka, że dla* $Y = (X, d')$

$$\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} Y \ \leqslant\ n.$$

Ponadto można wybrać taką metrykę d' *, która jest funkcją* d*, a zgrubna równoważność jest homeomorfizmem.*

Dowód. Korzystając z twierdzenia 3.6 dostajemy przestrzeń $Y = (X, d')$ taką, że $D_Y(r) = \Theta(r)$. Zatem istnieje takie R oraz c, że $D_Y(r) \leqslant cr$ dla $r \geqslant R$. Dla $r < R$ możemy oczywiście przyjąć $D_Y(r) \leqslant D_Y(R)$. Funkcja $D'_Y(r) = c \cdot r + D_Y(R)$, jest funkcją kontroli dla Y. □

Komentarz.
Powyższy wniosek, chociaż niepozorny, może być uznany za centralne i największe osiągnięcie niniejszej pracy. Mówi on, że dowolna przestrzeń o wymiarze asymptotycznym n jest – z dokładnością do zgrubnie równoważnej zmiany metryki – przestrzenią o asymptotycznym wymiarze Assouada-Nagaty równym n. Wobec 3.24 możemy też dalej zmodyfikować metrykę (w sposób nieciągły) lub wziąć 1-dyskretny i 1-gęsty podzbiór i dostać zgrubnie równoważną przestrzeń o wymiarze Assouada-Nagaty $\dim_{\mathrm{AN}}$ równym n. Uogólniamy więc i wzmacniamy wyniki z [DZ04] i [BDLM], uzyskując rezultat podobny do twierdzenia z [BDLM2].

W [DZ04] Dranishnikov i Zarichnyi skonstruowali przestrzeń uniwersalną M_n dla przestrzeni właściwych o asdim $= n$ mającą $\dim_{\mathrm{AN}} M_n = n$, tym samym udowodnili główną część naszego wniosku[2](wzmocnionego o 3.24) dla przestrzeni właściwych.

W [BDLM] udowodniono główną część naszego wniosku w przypadku przeliczalnej grupy z dowolną właściwą i lewo-niezmienniczą metryką, zachowując przy tym własność lewo-niezmienniczości[3].[4]

W [BDLM2] dla dowolnej przestrzeni metrycznej ustalonego wymiaru asymptotycznego znaleziono zgrubnie równoważną i hiperboliczną metrykę, dla której wymiar Assouada-Nagaty $\dim_{\mathrm{AN}}$ jest równy wyjściowemu wymiarowi asymptotycznemu. Metryka ta przyjmuje jedynie wartości naturalne, więc nie ma tu mowy o homeomorfizmach, z konstrukcji nie wynikają też pewne dobre własności tej metryki, które charakteryzują naszą metrykę (patrz niżej). W rozdziale 3.3 pokazujemy, jak metodami lematu 2.26 przy zastosowaniu pomysłu z [BDLM2] zmodyfikować dowolną metrykę do hiperbolicznej, co pozwala połączyć w jednym twierdzeniu 3.39 zalety naszego wniosku i twierdzenia z [BDLM2].

Uważna lektura rozumowań, na których opiera się nasz wniosek oraz konstrukcja z [BDLM2], pokazuje, że oba w gruncie rzeczy opierają się na tej samej idei. Odnotujmy jednak, ża autor nie znał wyniku z [BDLM2], gdy dowodził swój wniosek.

Zauważmy, że bardzo prosta zależność metryki d' od wyjściowej metryki d (i ogólniej, prosta zależność Y od X) gwarantuje różne dobre własności otrzymanej przestrzeni Y. Na przykład dla grup, czyli częstego obiektu badań geometrii zgrubnej, dostajemy, że: otrzymana przestrzeń ma identyczną strukturę grupową, zgrubna równoważność jest homeomorfizmem, zachowywana jest własność lewo-niezmienniczości i właściwości metryki. Można jednak znaleźć warunek, który nie musi być zachowany: d' pochodząca od metryki długości słowa d nie

[2]Z tym zastrzeżeniem, że ich twierdzenie daje zgrubnie równoważną przestrzeń, a nie metrykę.
[3]Właściwość jest również zachowywana, ale jest to ogólna własność zgrubnych równoważności.
[4]Nasza metryka oczywiście też ma tę własność.

musi być metryką długości słowa[5]. W przykładzie 4.1 korzystamy zaś z tego, że jeżeli $d^{X\times Y}$ jest metryką produktową, tzn. $d^{X\times Y}\Big((x,y),(x',y')\Big) = \max\Big(d^X(x,x'),d^Y(y,y')\Big)$, to $d^{X\times Y'}$ również jest metryką produktową.

Moralnie wniosek można interpretować na dwa sposoby. Z jednej strony okazuje się, że pozornie mocny warunek mówiący o afiniczności funkcji kontroli jest łatwo spełnić. Z drugiej strony wnioskujemy, że ze zgrubnego punktu widzenia (!) wprowadzanie pojęcia wymiaru asymptotycznego Assouada-Nagaty obok pojęcia wymiaru asymptotycznego jest trywialne.

Komentowane twierdzenie może mieć pewne znaczenie praktyczne – pozwala sprowadzić dowodzenie twierdzeń o wymiarze asymptotycznym asdim (przy założeniach dotyczących tego wymiaru) do dowodzenia twierdzeń o wymiarze asymptotycznym Assouada-Nagaty $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$ (przy pozornie mocniejszych założeniach). Ponadto pozwala z niektórych wyników dla asdim otrzymywać wyniki dla $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$ – patrz np. 4.1. □

3.2.2. $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}$

Przyjrzyjmy się po kolei zdefiniowanym przed chwilą wariantom pojęcia wymiaru, konfrontując je z wymiarem pokryciowym dim oraz asymptotycznym asdim, a także ze sobą nawzajem. Zacznijmy od niemającego zgrubnego charakteru wymiaru mikroskopijnego.

Twierdzenie 3.19. *Metryczna i zwarta przestrzeń X taka, że $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}} X \leqslant N$ ma wymiar co najwyżej n:* $\dim X \leqslant N$.

Dowód. Wystarczy pokazać, że dla dowolnego pokrycia $\mathcal{U}$ istnieje pokrycie rozdrabniające $\mathcal{V}$ o krotności co najwyżej $N+1$. Ze zwartości X dla pokrycia $\mathcal{U}$ istnieje pewna liczba Lebesgue'a λ. Na pewnym otoczniu zera mamy też $D_X(r) = cr$. Dla $r < \frac{\lambda}{2c}$ istnieje $N+1$ rodzin r-rozłącznych, których suma pokrywa X i których średnica jest ostro mniejsza niż $\frac{\lambda}{2}$. Biorąc ich otoczki o promieniu $R = \min(\frac{r}{2}, \frac{\lambda}{4})$, dostajemy $N+1$ rodzin rozłącznych zbiorów otwartych o średnicach mniejszych niż λ. Sumując te rodziny dostajemy pokrycie $\mathcal{V}$. □

Uwaga 3.20. *Powyższe twierdzenie jest również prawdziwe dla*

a. *ośrodkowych przestrzeni metrycznych, które przedstawiają się jako przeliczalna suma podzbiorów zwartych,*

b. *(szczególny przypadek a) przestrzeni właściwych, tj. takich, w których dowolna kula domknięta jest zwarta.*

Dowód. Ad a. Wystarczy użyć twierdzenia o wymiarze przeliczalnej sumy zbiorów domkniętych dla przestrzeni ośrodkowych. Oto jego treść ([BD07]): „Niech X będzie przestrzenią ośrodkową i niech $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, gdzie $X_i = \overline{X_i}$. Wówczas $\dim X = \sup_i(\dim X_i)$." Wpierw używamy poprzedniego twierdzenia dla zbiorów zwartych X_i (używamy monotoniczności wymiaru – 3.15), a następnie, stosując cytowane twierdzenie, dostajemy tezę (zbiór zwarty w przestrzeni metrycznej, czyli Hausdorffa, jest domknięty).

Ad b. Dowód w tym przypadku jest bezpośredni, ale za to techniczny. Niech $x \in X$ i niech $B(x,r,0)$ oznacza kulę otwartą o środku w x i promieniu r a $\overline{B}(x,r,0)$ odpowiednią kulę domkniętą. Niech ponadto $\overline{B}(x,n,m) = \overline{B}(x,n) \setminus B(x,m)$.

Rozpatrujemy dane pokrycie $\mathcal{U}$ przestrzeni X i szukamy jego rozdrobnienia o krotności ograniczonej przez $N+1$. Niech λ'_n będzie liczbą Lebesgue'a dla $\mathcal{U}$ obciętego do $\overline{B}(x,n,0)$

[5] W praktyce często przestanie być metryką długości słowa, ponieważ dwie metryki długości słowa wyznaczone przez skończone zbiory generatorów są quasi-izometryczne, a nasza zgrubna równoważność nie może być quasi-izometrią, jeśli ma zmieniać wymiar asymptotyczny Assouada-Nagaty.

i niech $\lambda_n = \min(1, \lambda'_n)$. Stosując rozumowanie z dowodu poprzedniego twierdzenia, dla dowolnie małego r możemy znaleźć r-ograniczone pokrycie X o krotności co najwyżej $N+1$. Jeśli λ_n jest ciągiem oddzielonym od zera, to wspomniane pokrycie dla $r < \inf \lambda_n$ rozdrabnia $\mathcal{U}$. W przeciwnym przypadku postępujemy jak następuje.

Dla $\overline{B}(x,1)$ znajdujemy $R_1 = \frac{\lambda_2}{4}$-ograniczone (zatem rozdrabniajace $\mathcal{U}$) pokrycie $\mathcal{V}_{1,0}$ o krotności nie przekraczającej $N+1$. To pokrycie ma pewną liczbę Lebesgue'a l_1. Dla $\overline{B}(x,2,1) \subseteq \overline{B}(x,2,0)$ znajdujemy $R_2 = \min\left(\frac{\lambda_3}{4}, \frac{l_1}{2}\right)$-ograniczone (zatem rozdrabniajace $\mathcal{U}$) pokrycie $\mathcal{V}_{2,1}$ (o krotności co najwyżej $N+1$). Rodziny $\mathcal{V}_{1,0}$ i $\mathcal{V}_{2,1}$ dla $\overline{B}(x,1,0)$ i $\overline{B}(x,2,1)$ należy przerobić do otwartego w $\overline{B}(x,2,0)$ pokrycia $\mathcal{V}_2$ o krotności co najwyżej $N+1$ rozdrabniającego $\mathcal{U}$.

Podzielmy $\mathcal{V}_{2,1}$ na zbiory $\mathcal{V}_{2,1}^{in}$ przecinające się z $\overline{B}(x,1,0)$ oraz pozostałe $\mathcal{V}_{2,1}^{out}$. Ponieważ rodzina $\mathcal{V}_{2,1}^{in}$ jako podrodzina $\mathcal{V}_{2,1}$ ma średnicę co najwyżej $\frac{l_1}{2}$, więc każdy zbiór $V_{2,1} \in \mathcal{V}_{2,1}^{in}$ po przecięciu z $\overline{B}(x,1,0)$ zawiera się w pewnym zbiorze $V'_{2,1} \in \mathcal{V}_{1,0}$ (być może zawiera się w wielu, ale decydujemy się na jeden z nich). Niech zatem

$$\mathcal{V}_{2,0} = \left\{ \left(V_{1,0} \setminus \overline{B}(x,1,1)\right) \cup \bigcup_{V'_{2,1}=V_{1,0}} V_{2,1} \;\middle|\; V_{1,0} \in \mathcal{V}_{1,0},\ V_{2,1} \in \mathcal{V}_{2,1}^{in} \right\} \cup \mathcal{V}_{2,1}^{out}.$$

Oznaczmy pierwszy ze składników przez $\mathcal{V}_{2,0}^1$. Rodzina $\mathcal{V}_{2,0}$ pokrywa $\overline{B}(x,2,0)$, ponieważ zbiory z $\mathcal{V}_{1,0}$ pokrywają $B(x,1,0)$, a zbiory z $\mathcal{V}_{2,1}$ pokrywają $\overline{B}(x,2,1)$. Jest też ograniczona przez $R_1 + 2R_2 \leqslant \frac{3}{4}\lambda_2$, czyli rozdrabnia $\mathcal{U}$. Pozostało pytanie o otwartość. Dla $x \notin \overline{B}(x,1,1)$ zawieranie się pewnego otoczenia w ustalonym zbiorze $V_{2,0} \in \mathcal{V}_{2,0}$ zawierającym x jest oczywiste. Rozpatrzmy $x \in \overline{B}(x,1,1)$ i zbiór $V_{2,0} \in \mathcal{V}_{2,0}$ zawierający x. Istnieją pewne zbiory $V_{1,0} \in \mathcal{V}_{1,0}$ oraz $V_{2,1} \in \mathcal{V}_{2,1}^{in}$ zawierające x i będące „składnikami" $V_{2,0}$. Oba te zbiory są śladami zbiorów otwartych w $\overline{B}(x,2,0)$, a więc zawierających pewne kule wokół x. Z konstrukcji widzimy, że mniejsza z tych kul jest zawarta w $V_{2,0}$.

Kontynuujemy indukcyjnie. Wyjaśnić jednak trzeba kilka rzeczy. Po pierwsze, że można kontunuować. Otóż zbiory rodziny $\mathcal{V}_{2,0}^1$ są zawarte w $\overline{B}(x, 1+R_2, 0)$, a zatem, dzięki temu, że $R_2 \leqslant \frac{\lambda_3}{4} \leqslant \frac{1}{4}$, są rozłączne z $\overline{B}(x,2,2)$. Zatem tylko zbiory z $\mathcal{V}_{2,1}^{out}$ mogą niepusto przecinać się z $\overline{B}(x,2,2)$. Wynika z tego, że zdefiniowane analogicznie $\mathcal{V}_3$ będzie składać się z $\mathcal{V}_{2,0}^1$, elementów pochodzących ze sklejania $\mathcal{V}_{2,1}^{out}$ z $V_{3,2}^{in}$ (których średnica jest ogranioczona przez $R_2 + 2R_3 \leqslant \frac{3}{4}\lambda_3$) oraz z $\mathcal{V}_{3,2}^{out}$ (diam $\leqslant R_3 \leqslant \frac{\lambda_3}{4}$), czyli faktycznie będzie rozdrabniać $\mathcal{U}$. Ponownie tylko zbiory z $\mathcal{V}_{3,2}^{out}$ będą mogły niepusto przecinać się z $\overline{B}(x,3,3)$, więc można kontynuować analogicznie. Po drugie, dzięki temu, że elementy rodziny $\mathcal{V}_{n,0}^1 \subseteq \mathcal{V}_{n+1,0}^1$ należą do wszystkich $\mathcal{V}_m$ dla $m \geqslant n$ możemy zdefiniować $\mathcal{V}$ jako infimum zbiorów $\mathcal{V}_n$. □

Uwaga 3.21. *Warto odnotować, że w dowodzie części b powyższej uwagi nie korzystaliśmy bezpośrednio z* $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}} X \leqslant n$, *a jedynie z tego, że dla dowolnej kuli domkniętej istnieje pokrycie o dowolnie małej średnicy i krotności nie przekraczającej* $n+1$, *co jest konsekwencją* $\dim \overline{B}(x,n) \leqslant n$. *Tym samym udowodniliśmy, że dla przestrzeni właściwych prawdziwa jest równość*

$$\dim X = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim \overline{B}(x,n).^{6}$$

Przeanalizujmy kilka przykładów. W myśl uwagi 3.14 dla pokazania powyższych własności dla $\mathbb{R}^n$ wystarczy sprawdzić warunek dla ustalonego R. Dla $\mathbb{R}$ wystarczy rozpatrzeć dwie rodziny $\{[2n, 2n+1] \mid n \in \mathbb{N}\}$ oraz $\{[2n+1, 2n+2] \mid n \in \mathbb{N}\}$, które są 1-ograniczone

[6] Udowodniliśmy nierówność $\leqslant$ natomiast nierówność przeciwna wynika z nierówności $\dim X \geqslant \dim \overline{A}$ (gdzie $\mathcal{A} \subseteq X$), która jest trywialnym faktem teorii wymiaru.

i 1-rozłączne. Dla $\mathbb{R}^2$ można wziąć domknięte sześciokąty formene pokrywające płaszczyznę (podzielone na 3 R-rozłączne rodziny – wystarczy by stykające się sześciokąty były w różnych rodzinach). Dla $\mathbb{R}^3$ można tak samo użyć ośmiościanów ściętych: można nimi tak wypełnić przestrzeń, by ich środki znajdowały się w punktach $\mathbb{Z}^3$ (pierwsza grupa) oraz $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^3$ (druga grupa). Wówczas w ramach jednej grupy stykają się tylko te ośmiościany ścięte, których środki są odległe o 1 (w normie suma modułów współrzędnych), można więc tę grupę podzielić na dwie rodziny ośmiościanów ściętych o środkach w punktach (ew. punktach przesuniętych o $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$), których norma jest parzysta lub nieparzysta odpowiednio. Tak utworzone rodziny są 1-rozłączne i jednostajnie ograniczone.

Skrupulatne przeliczenie przykładu dla $\mathbb{R}^3$ mogłoby być żmudne, a w wyższych wymiarach wyobraźnia zaczyna zawodzić, więc jasne jest, że potrzebujemy jakiegoś narzędzia do szacowania wymiaru przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Tym narzędziem będzie twierdzenie 4.4 o wymiarze produktu. Mówi ono, że dla $\dim_{\mathrm{AN}}$, $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}$, $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$, oraz $\mathrm{asdim}X$ wymiar skończonego produktu jest ograniczony przez sumę wymiarów mnożonych przestrzeni. W szczególności wymiar $\mathbb{R}^n$ jest nie większy niż n. Korzystając z uwagi 3.20 (punkt a lub b, oba stosują się do $\mathbb{R}^n$), gdyby wymiar $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}$ (wobec 3.14 równoważnie: każdy inny wyżej wymieniony wymiar a ponadto l-asdim) był mniejszy niż n, to $\dim \mathbb{R}^n$ byłby mniejszy niż n, co zgodnie z klasyczną teorią wymiaru jest nieprawdą. Mamy więc przykład:

Przykład 3.22 (podstawowy)**.**

$$\dim \mathbb{R}^n = \mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}\mathbb{R}^n = \dim_{\mathrm{AN}}\mathbb{R}^n = \mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}\mathbb{R}^n = \text{l-asdim}\mathbb{R}^n = n$$

Tak samo uzasadniamy:

Przykład 3.23. $\dim[0,1]^n = \mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}[0,1]^n = n$

Udowodnimy teraz uprzednio wspomniany fakt, że wymiar $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}$ nie ma charakteru asymptotycznego.

Przykład 3.24. *dla dowolnej niepustej przestrzeni X istnieje przestrzeń Y quasi-izometryczna taka, że* $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}Y = 0$.

Dowód. Podajemy 3 różne przykłady przestrzeni Y. Konstrukcja pierwsza (podstawowa). Niech Y będzie zgrubnie gęstym w X podzbiorem 1-dyskretnym, tzn. takim, że $d(y, y') \geqslant 1$ dla dowolnych różnych $y, y' \in Y$. Taka podprzestrzeń istnieje dzieki lematowi Kuratowskiego-Zorna: rozpatrujemy wszystkie podzbiory 1-dyskretne uporządkowane przez inkluzję. Każdy łańcuch w takiej rodzinie jest ograniczony przez swoją sumę, która jest oczywiście 1-dyskretna. Istnieje zatem element maksymalny. Element maksymalny Y musi być 1-gęsty, bo w przeciwnym przypadku istniałby punkt w X, którego odległość od Y wynosi przynajmniej 1.

Dla niepustej przestrzeni c-dyskretnej Y istnieje 0-wymiarowa funkcja kontroli spełniająca $D_{Y\,|[0,c]}(r) = 0$ (i nie istnieje żadna -1-wymiarowa funkcja kontroli).

Konstrukcja druga.

Zmodyfikujemy metrykę na X. Niech A będzie maksymalnym 1-dyskretnym podzbiorem X. Dowolnemu punktowi $x \in X$ przyporządkujmy pewien punkt $a(x) \in A$ spełniający $d(x, a(x)) < 1$. (Funkcja a jest identycznością na A.) dla $x \neq y$ niech $d'(x, y) = d(a(x), a(y)) + [x \neq a(x)] + [y \neq a(y)]$, gdzie $[\phi] = 1$, gdy ϕ jest prawdziwe i 0 w przeciwnym przypadku. Jest jasne, że tak zdefiniowana funkcja jest metryką. Ponadto $Y = (X, d')$ jest przestrzenią 1-dyskretną, a więc $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}Y = 0$. Ponieważ $A \subseteq Y$ jest podzbiorem $(1+\varepsilon)$-gęstym i $A \subseteq X$ jest podzbiorem 1-gęstym, więc Y, A oraz X są quasi-izometryczne.

Konstrukcja trzecia.
Zmodyfikujemy metrykę na X. Niech $d'(x,y) = d(x,y) + [d(x,y) > 0]$. Przestrzeń $Y = (X, d')$ jest oczywiście 1-dyskretna i quasi-izometryczna z X.

Ostatnia konstrukcja jest deterministyczna, więc d' ma pewne dobre własności, np. w przypadku grup dziedziczy po d niezmienniczość na przesunięcia. $\square$

Z drugiej strony dowolna przestrzeń X o $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}X = 0$ jest quasi-izometryczna wobec (bo gęsta w) pewnej przestrzeni o $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}} = n$ lub ∞. Wystarczy wziąć produkt przestrzeni X z ograniczoną przestrzenią o odpowiednim wymiarze $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}$ (dla n wystarczy wziąć $[0,1]^n$ a dla ∞ zadziała $[0,1]^\infty$ z metryką supremum, zawierająca $[0,1]^m$ dla każdego m).

3.2.3. l-asdim

Zauważyliśmy, że $\text{l-asdim}X \leqslant \mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}X$. Naturalnym pytaniem jest, czy (kiedy?) tę nierówność można odwrócić. Zainteresował się nim Dranishnikov, a kontrprzykład został przedstawiony w [BDLM]. My zaprezentujemy własny kontrprzykład[7], ale najpierw udowodnimy pewien ogólny fakt, który przy okazji pokazuje, jak można użyć pojęć wielkiej skali do formułowania twierdzeń wielkiej skali.

Uwaga 3.25. *Niech* $\text{l-asdim}X = n$. $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}X = \text{l-asdim}X$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje* $R < \infty$ *oraz* n*-wymiarowa funkcja kontroli dla* X*, która jest liniowa na pewnym* R*-spójnym i nieograniczonym podzbiorze* S *półprostej* $\mathbb{R}^+$.

Dowód. Jeśli $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}X = \text{l-asdim}X = n$, to istnieje afiniczna n-wymiarowa funkcja wymiaru, a zatem istnieje n-wymiarowa funkcja wymiaru liniowa na $[1,\infty)$ – zbiorze nieograniczonym i spójnym (zatem R-spójnym dla dowolnego $R > 0$).

Gdy zaś mamy n-wymiarową funkcję kontroli spełniającą $D_{X|S}(r) = cr$, gdzie S jest R-spójny i nieograniczony, to istnieje funkcja kontroli spełniająca $D'_{X|[s_0,\infty)}(r) = cr + cR$ (gdzie $s_0 \in S$), a zatem również funkcja kontroli spełniająca $D''_X(r) = cr + cs_0 + cR$, a więc afiniczna. $\square$

Powyższa uwaga jest wskazówką w konstrukcji kontrprzykładu dla szacowania $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$ przez l-asdim.

Problem 3.26 (Pierwszy problem Dranishnikova)**.** *Istnieje przestrzń* $X \subseteq \mathbb{N}$ *taka, że* $\text{l-asdim}X < \mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}X$*. Konkretnie mamy:* $\text{l-asdim}X = 0$ *oraz* $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}X = 1$.

Dowód. Niech $X_1 = \{0,1\}$. Dla $n \geqslant 2$ niech

$$X_n = \bigcup_{k=2}^{n} \left\{ k \cdot \max_{x \in X_{n-1}} (x) \right\}.$$

Niech $X = \bigcup X_n = \{0,1;2;4,6;12,18,24;48,72,96,120;240,360,480,600,720;1440,\ldots\}$. Łatwo widzieć, że dla dowolnego $x_n^{max} = \max_{x\in X_n}(x)$ podział na x_n^{max}-składowe jest x_n^{max}-ograniczony, zatem istnieje funkcja kontroli taka, że $D_{X|X^{max}}(r) = r$, gdzie $\mathbb{R}^+ \supset X^{max} = \{x_n^{max} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$. Jednakże dowolny podział na r-rozłączne podzbiory łączy r-spójne składowe (patrz też 2.17), a dla dowolnego $r > x_n^{max}$ podział na r-składowe ma średnicę przynajmniej $(n+1)\cdot x_n^{max}$, z czego wynika, że nie może istnieć 0-wymiarowa funkcja kontroli, która na jakiejkolwiek półprostej byłaby liniowa, czyli $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}X > 0$. Oczywiście $X \subseteq \mathbb{R}$, więc w myśl 3.22 oraz 3.15 mamy $1 = \mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}\mathbb{R} \geqslant \mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}X > 0$. $\square$

[7]Przykład z [BDLM] jest o tyle ciekawszy, że dotyczy torsyjnej grupy abelowej G z właściwą metryką niezmienniczą na przesunięcia i jest bardzo mocny, ponieważ $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}G = \infty$, natomiast $\text{l-asdim}G = 0$. Nasz przykład (i dowód) jest jednak istotnie prostszy, dotyczy podzbioru liczb naturalnych z naturalną metryką.

Innym zagadnieniem związanym z l-asdim jest pytanie dualne do poprzedniego: czy można szacować l-asdim przez asdim. Pochodzi od Dranishnikova i tak zostało sformułowane w [BDLM]:

Problem 3.27 (Drugi problem Dranishnikova)**.** *Znaleźć przestrzeń X o minimalnym* asdim$X$ *taką, że* asdim$X <$ l-asdim$X$.

Rozwiązanie. Stosowny przykład omawiamy w 3.32. □

Poniżej prezentujemy rozwiązanie z [BDLM].

Twierdzenie 3.28. *Istnieje właściwa, niezmiennicza na przesunięcia metryka d na $G = \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{Z}_n$ taka, że* $0 =$ asdim$G <$ l-asdim$G$.

Dowód. Niech $g_n = 1_{\mathbb{Z}_n}$ będzie generatorem $\mathbb{Z}_n$. Przypiszmy mu długość $len(g_n) = n$. Rozszerzmy tę definicję długości na G: $len(g) = \min\left(\sum |k_n| \cdot len(g_n)\right)$, gdzie minimum bierzemy po takich $k_n \in \mathbb{Z}$, że $g = \sum k_n \cdot g_n$ (przez mnożenie rozumiemy takie mnożenie jak w G rozumianym jako moduł nad $\mathbb{Z}$). Łatwo widać, że $d(g, h) = len(g - h)$ jest niezmienniczą na przesunięcia i właściwą (dzięki temu, że długości kolejnych generatorów rosną) metryką na G.

Podział na n-składowe składa się z przesunięć zbioru $\bigoplus_{k=2}^{n-1} \mathbb{Z}_k$, a zatem jest jednostajnie ograniczony, asdim$G = 0$.

Pokażmy, że minimalna 0-wymiarowa funkcja kontroli D_G dla G nie szacuje się przez liniową na żadnym nieograniczonym podzbiorze $\mathbb{R}^+$. Zauważmy, że w $(n + \varepsilon)$-składowej zera znajduje się g_i, dla $i \leqslant n$, a więc również $g^n = \sum_{i=2}^{n} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \cdot g_i$. Mamy $d(0, g^n) = \sum_{i=2}^{n} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \cdot i \geqslant cn^3$, dla pewnego $c > 0$. Zatem $D_G(r) \geqslant c(\lceil r \rceil - 1)^3 = \Theta(r^3)$, więc D_X nie szacuje się przez funkcję liniową na żadnym nieograniczonym podzbiorze $\mathbb{R}^+$, l-asdim$G > 0$. □

Dla porządku odnotujmy:

Wniosek 3.29. *Istnieje przestrzeń X spełniająca* asdim$X <$ l-asdim$X \leqslant$ asdim$_{\mathrm{AN}}X$, *a więc wobec 3.18 wymiar* asdim$_{\mathrm{AN}}$ *oraz* l-asdim *nie są zgrubnymi niezmiennikami.*

3.2.4. Przykłady

Przestrzenie prezentowane w tym rozdziale są to mniej więcej te same przestrzenie, które z punktu widzenia quasi-izometrii i zgrubnych równoważności omawialiśmy w rozdziale 1.3 (pomijamy przykłady dotyczące grup, gdzie obliczanie wymiaru jest nietrywialne). Inne ciekawe przykłady obliczeń wymiarów można znaleźć w poprzednich podrozdziałach o wymiarze micdim$_{\mathrm{AN}}$ oraz l-asdim (obliczenia nie zawsze dotyczą jedynie wymiaru z tytułu rozdziału).

Przykład 3.30. *Dowolne nietrywialne drzewo T ma* dim$_{\mathrm{AN}}T = 1$.

Dowód. Użyjemy dowodu z [BD05] (dowodzi się tam, że asdim$T \leqslant 1$, ale rozumowanie stosuje się również do dim$_{\mathrm{AN}}T \leqslant 1$). Warto zauważyć na początek, że ponieważ $[0, 1] \subseteq T$, więc $1 = \dim[0, 1] \leqslant$ micdim$_{\mathrm{AN}}[0, 1] \leqslant$ micdim$_{\mathrm{AN}}T$. Ponadto jeśli T jest nieograniczone to jako przestrzeń spójna ma $0 <$ asdim$T \leqslant$ asdim$_{\mathrm{AN}}T$.

Ustalmy pewien wierzchołek $v \in T$. Ustalmy r i poszukajmy $D_T(r)$. Podzielmy drzewo na pierścienie o środku w v: $A_k = \left\{x \in T \mid d(x, v) \in \left[kr, (k{+}1)r\right)\right\}$. Dzieląc pierścienie na dwie rodziny dla parzystych i nieparzystych k odpowiednio dostajemy dwie r-rozłączne rodziny $\mathcal{U}'_0, \mathcal{U}'_1$ pokrywajace T. Rozmiary pierścieni mogą być jednak nieograniczone, w szczególności nie szacować się liniowo przez r.

Ustalmy $k > 0$ ($\mathrm{diam} A_0 \leqslant 2r$) i dokonajmy podziału A_k na r-rozłączne podzbiory. Określmy relację równoważności: $x \sim y$, jeśli geodezyjne łączące x z v oraz y z v zawierają ten sam punkt z będący w odległości $(k - \frac{1}{2})r$ od v. Rodzina klas równoważności tej relacji jest r-rozłączna i $3r$-ograniczona.

Dzieląc A_k ($k > 0$) w U_i' na klasy równoważnośc jw. dostajemy dwie r-rozłączne i $3r$-ograniczone rodziny $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ pokrywajace T. Mamy więc $D_T(r) = 3r$. □

Powyższy przykład jest o tyle ciekawy, że np. drzewa o stałym rozgałęzieniu T_n ($n \geqslant 3$) dalece nie zanurzają się w żadnym $\mathbb{R}^m$. T_n w kuli domkniętej wokół korzenia o promieniu k zawiera $1+n\Big(1+(n-1)+\ldots+(n-1)^{k-1}\Big) = 1+n\frac{(n-1)^k}{n-2} \geqslant (n-1)^k$ wierzchołków (wykładniczo dużo), tymczasem dowolny podzbiór $\mathbb{R}^m$ o średnicy $2k$ ma objętość rzędu co najwyżej k^m (wielomianową), a zatem nie może zawierać 1-dyskretnego podzbioru wykładniczej mocy. Widać więc, że przestrzenie o małym wymiarze mogą nie zanurzać się w – wydawałoby się kanonicznych – przestrzeniach o dużym wymiarze. Pokazuje to, że pojęcia objętości (rozumianej wg naszej definicji lub jako moc kuli w przestrzeni 1-dyskretnej, np. $\mathbb{Z}^n$, przestrzeni wierzchołków drzewa lub grupie z metryką długości słowa) oraz wymiaru są dość odległe[8].

Przykład 3.31. *Przestrzeń $A(a_i) = \{\sum_{i=1}^n a_i \mid n \in \mathbb{N}\}$ dla dodatniego ciągu (a_i) rozbieżnego do nieskończoności ma wymiar asymptotyczny zero. Gdy $(a_i) = i^\alpha$ ($\alpha > 0$) jest ciągiem o wzroście wielomianowym, to wymiar* $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$ *oraz* l-asdim *wynosi 1, gdy ciągiem o wzroście wykładnoczym $(a_i) = \beta^i$ ($\beta > 1$), to* l-asdim$a$ $\leqslant$ asdim$_{\mathrm{AN}}a$ $= 0$. *Jako przestrzenie a_1-dyskretne, mają* micdim$_{\mathrm{AN}}a$ $= 0$*, zatem* $\dim_{\mathrm{AN}} = \mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$.

Dowód. do asdim$a$ $= 0$, wystarczy nam by podział na r-składowe był jednostajnie ograniczony. Oczywiście jest, bo $a_n \to \infty$.

Ciągi o wzroście wielomianowym i^α, $\alpha > 0$. Do pokazania l-asdim$a$ $= 1 = \mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}A$, wystarczy pokazać l-asdim$a$ > 0, bo oczywiście l-asdim$a$ $\leqslant$ asdim$_{\mathrm{AN}}a$ $\leqslant \mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}\mathbb{R} = 1$. Najmniejsza możliwa 0-wymiarowa funkcja kontroli (pochodząca od podziału na r-składowe) wyraża się wzorem:

$$D_X(r) = \sum_{i=1}^{\lceil \sqrt[\alpha]{r}\rceil - 1} i^\alpha = \Theta\Big((\lceil \sqrt[\alpha]{r}\rceil - 1)^{\alpha+1}\Big) = \Theta(r^{1+\frac{1}{\alpha}}),$$

a zatem nie jest co najwyżej liniowa na żadnym nieograniczonym podzbiorze $\mathbb{R}^+$.

Ciągi o wzroście wykładniczym $(a_i) = \beta^i$, $\beta > 1$. Aby otrzymać $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}A = 0$, wystarczy oszacować D_X przez funkcję liniową od pewnego miejsca.

$$D_X(r) = \sum_{i=1}^{\lceil \log_\beta r\rceil - 1} \beta^i = \Theta\Big(\beta^{\lceil \log_\beta r\rceil - 1}\Big) = \Theta(\beta^{\log_\beta r}) = \Theta(r)$$

□

Wniosek 3.32. *Przestrzeń $A(a_n)$ dla $a_n = n^\alpha$ ($\alpha > 0$) ma wymiar* $1 = $ l-asdim $>$ asdim $= 0$, *tym samym stanowi rozwiązanie drugiego problemu Dranishnikova 3.27.*

Przykład 3.33. *Wymiar asymptotyczny* asdim *wykresu dowolnego wielomianu, funkcji postaci $|x|^m$, oraz funkcji postaci* $\mathrm{sgn}(x)|x|^m$ ($m \in \mathbb{R}^+$) *wynosi 1.*

[8] Chociaż wniosek 2.22 pokazuje pewną (luźną) zależność.

Dowód. w przykładach 1.42 i 1.46 pokazujemy quasi-izometrię między wykresem funkcji postaci $\operatorname{sgn}(x)|x|^m$ dla $m \in \mathbb{R}^+$ lub wielomianu nieparzystego stopnia a prostą oraz zgrubną równoważność między wykresem funkcji postaci $|x|^m$ dla $m \in \mathbb{R}^+$ a prostą. Wystarczy więc wiedzieć, że $\operatorname{asdim}\mathbb{R} = 1$, a to zostało pokazane w 3.22[9]. $\square$

Przykład 3.34. *Wymiary* $\operatorname{asdim}_{\mathrm{AN}}, \text{l-asdim}$ *wykresów wielomianów, funkcji postaci* $|x|^m$*, oraz funkcji postaci* $\operatorname{sgn}(x)|x|^m$ *(*$m \in \mathbb{R}^+$*) są równe 1.*

Dowód. Wobec (1) 1.42 oraz (2) 1.46 mamy (1) quasi-izometrię z prostą wykresów wielomianów nieparzystego stopnia i funkcji $\operatorname{sgn}(x)|x|^m$ dla $m \in \mathbb{R}^+$ oraz (2) wykresów funkcji $|x|^m$ dla $m \leqslant 1$, możemy więc powołać się na 3.22: $\text{l-asdim}\mathbb{R} = \operatorname{asdim}_{\mathrm{AN}}\mathbb{R} = 1$. Pozostało wykazać twierdzenie w przypadku $|x|^m$ dla $m > 1$ i wielomianów parzystego stopnia. Wykres wielomianu parzystego stopnia n wobec 1.43 jest quasi-izometryczny z wykresem wielomianu x^n, czyli wykresem $|x|^m$ dla $m = n$.

Oczywiście $\operatorname{asdim}_{\mathrm{AN}}, \text{l-asdim} > 0$, ponieważ wykres ciągłej funkcji rzeczywistej jest spójną nieograniczoną przestrzenią. Wystarczy zatem pokazać, $\operatorname{asdim}_{\mathrm{AN}} \leqslant 1$. Ustalmy $r \in \mathbb{R}^+$. Podzielmy wykres funkcji $f(x) = |x|^m$ $Graph(f)$ na poziome „plastry”:

$$P_k = \{(x, y) \in Graph(f) \mid y \in [kr, (k+1)r)\} \ \forall_{k \in \mathbb{N}}$$

Każdy plaster P_k rozpada się na części P_k^-, P_k^+, gdzie $x < 0$ oraz $x \geqslant 0$ odpowiednio. Zauważmy, że średnica każdego $P_k^{+/-}$ nie przekracza $r + (1 + r)$, (wysokość + szerokość, korzystamy z tego, że poza $[-1, 1]$ pochodna ma moduł przynajmniej niż 1, więc szerokość szacuje się przez wysokość). Dzieląc zbiory P_k na dwie rodziny dla parzystych i nieparzystych k odpowiednio, dostajemy dwie r-rozłączne rodziny pokywające $Graph(f)$. Zbiory P_k nie są jednak jednostajnie ograniczone, ponieważ składają się z odległych zbiorów P_k^+ i P_k^- – jeśli więc $\operatorname{dist}(P_k^+, P_k^-) \geqslant r$, to zamiast zbioru P_k bierzemy obie jego części. W ten sposób średnica zbiorów szacuje się przez $\operatorname{dist}(P_k^+, P_k^-) + \sup \operatorname{diam}(P_k^{+/-}) \leqslant 3r + 1$, czyli $D_X(r) = 3r + 1$ jest afiniczną funkcją kontroli. $\square$

Przykład 3.35. *Wymiar* $\operatorname{micdim}_{\mathrm{AN}}$ *wykresu wielomianu lub funkcji* $|x|^m$*, lub funkcji* $\operatorname{sgn}(x)|x|^m$ *(*$m \in \mathbb{R}^+$*) wynosi 1.*

Dowód. dla wielomianów stopnia -1, 0 i 1 twierdzenie jest trywialne.

Rozaptrzmy najpierw przypadek $m \geqslant 1$ (i wielomianów przynajmniej kwadratowych). Funkcja taka jest Lipschitzowska na dowolnym zwartym podzbiorze, a jej pochodna jest monotoniczna na półprostej dodatniej i ujemnej (po usunięciu pewnego zwartego otoczenia zera). Możemy więc wybrać takie $M > 0$, że $|f'(x)| \geqslant 1$ dla $|x| \geqslant M$. Niech $0 < r < M$. Wówczas istnieje pewien przedział $[-K, K]$ zawarty w $[-2M, 2M]$ i zawierający $[M, M]$, którego długość jest nieparzystą wielokrotnością r. Podzielmy przedział $[-K, K]$ na rodzinę $\mathcal{U}'$ kolejnych przedziałów $[-K, -K + r], [-K + r, -K + 2r], \dots, [K - r, K]$. Rodzinę $\mathcal{U}'$ można w oczywisty sposób podzielić na dwie r-rozłączne podrodziny $\mathcal{U}_1'$, $\mathcal{U}_2'$ (niech $\mathcal{U}_1'$ zawiera nieparzyście wiele przedziałów). Na $[-2M, 2M] \supseteq [-K, K]$ funkcja f jest Lipschitzowska z pewną stałą L, więc fragment wykresu odpowiadający przedziałowi $[-K + kr, -K + (k + 1)r]$ ma średnicę ograniczoną przez $(1 + L)r$. Rodzinom $\mathcal{U}_i'$ odpowiadają więc r-rozłączne i $(1 + L)r$-ograniczone

[9] W ogólności w 3.22 odwoływaliśmy się klasycznej teorii wymiaru, żeby udowodnić, że $\operatorname{asdim}\mathbb{R}^n \geqslant n$, jednak w przypadku $n = 1$ wystarczy zauważyć, że $\mathbb{R}$ jest spójną i nieograniczoną przestrzenią, więc jej wymiar jest większy niż 0.

rodziny $\mathcal{V}_i'$ podzbiorów $Graph(f)$. Jeśli więc $\mathcal{V}_i'$ uzupełnimy o fragmenty wykresu o wysokości r ($n \in \mathbb{N}$) (ich rzuty na oś OX są przedziałami domkniętymi):

$$P_n^+ = \{(x,y) \in Graph(f) \mid x > 0,\ y - f(K+r) \in [nr,(n+1)r]\}$$
$$P_n^- = \{(x,y) \in Graph(f) \mid x < 0,\ y - f(-K-r) \in [nr,(n+1)r]\},$$

gdzie do $\mathcal{V}_1$ dodajemy $P_n^{+/-}$ dla nieparzystych n i do $\mathcal{V}_2$ dla parzystych n; to otrzymane rodziny $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ będą r-rozłączne i $\max((1+L)r, 2r)$-ograniczone (rzuty zbiorów $P_k^{+/-}$ na OY mają średnicę r a na OX mają średnicę co najwyżej r, ponieważ moduł pochodnej $|f'|$ wynosi tam przynajmniej 1). $D_X(r)_{|(0,M)}(r) = (2+L)r$.

Przypadek $m < 1$ dowodzimy analogicznie: tym razem poza pewnym ograniczonym przedziałem wykres dzielimy „poziomo” (ponieważ pochodna dąży do zera, więc rzuty na OY szacują sie przez rzuty na OX). Wewnąrz przedziału ograniczonego dzielimy „pionowo” i dla funkcji $|x|^m$ (dla $\mathrm{sgn}(x)|x|^m$ jest to zbędne) stosujemy trick z poprzedniego przykładu: jeśli dwie części „plastra” są od siebie odległe o więcej niż r to dzielimy „plaster” na dwie części, w przeciwnym przypadku jego średnica szacuje się przez r+średnica części. □

3.3. Hiperboliczność metryki z zachowaniem liniowej kontroli

W tym rozdziale, używając pomysłu z [BDLM2] i lematu 2.26, pokażemy, jak dla metryki d znaleźć zgrubnie i homeomorficznie równoważną metrykę $d' = c \circ d$, która jest hiperboliczna. Jako wniosek dostajemy wzmocnione twierdzenie 3.18, gdzie metryka d' jest hiperboliczna.

Definicja 3.36. *Niech $x, y, p \in X$. Produktem Gromova x, y względem p nazywamy liczbę*

$$(x|y)_p = \frac{d(x,p) + d(y,p) - d(x,y)}{2}.$$

Definicja 3.37. *Przestrzeń (X,d) lub metrykę d na X nazywamy hiperboliczną, gdy istnieje liczba $\delta < \infty$, że dla dowolnych $x, y, z, p \in X$ spełniona jest nierówność:*

$$(x|z)_p \geqslant \min((x|y)_p, (y|z)_p) - \delta$$

(dla każdego trójkąta najmniejszy produkt szacuje się przez średni minus δ).

Twierdzenie 3.38. *Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Wówczas, dla $c(x) = \log_2(1+x)$ i metryki $d' = c \circ d$, przestrzeń $Y = (X, d')$ jest zgrubnie i homeomorficznie równoważną przestrzenią hiperboliczną. Ponadto, jeśli wyjściowa przestrzeń ma $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}} X = n$ lub $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} X = n$, to Y również.*

Dowód. Zgrubna równoważność wynika natychmiast z 2.26, homeomorfizm z tego, że c oraz c^{-1} są ciągłe w zerze.

Wykażmy punkty dotyczące $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}$ i $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$. Jeśli $D_X(\lambda) \leqslant C\lambda + A$, to

$$D_Y(\log(1+\lambda)) \leqslant \log(1 + C\lambda + A) \leqslant \log(\max(C, A+1) \cdot (1+\lambda)) \leqslant A' + \log(1+\lambda),$$

a zatem $D_Y(\lambda) \leqslant \lambda + A'$. Jeśli zaś na pewnym przedziale $[0,a]$ mamy $D_{X|[0,a]}(\lambda) \leqslant C\lambda$, to na przedziale $[0, c(a)]$ będzie: $D_{Y|[0,c(a)]}(c(\lambda)) \leqslant c(C\lambda) \leqslant C \cdot c(\lambda)$, ponieważ c jest wklęsła i $c(0) = 0$.

Pozostało wykazać hiperboliczność. Użyjemy pomysłu z [BDLM2]. Dowolną trójkę punktów nazwiemy wierzchołkami trójkąta, a odległości między nimi – bokami trójkąta. Rozpatrzmy dowolny trójkąt i oznaczmy jego boki jako $a \geqslant b \geqslant c$. Niech $a = \log_2(1+A)$,

$b = \log_2(1+B)$, $c = \log_2(1+C)$ $(A = c^{-1}(a))$ Zauważmy, najdłuższy bok trójkąta jest o co najwyżej jeden dłuższy od średniego (*):

$$a = \log_2(1+A) \leqslant \log_2(1+B+C) \leqslant \log_2\Big(2(1+B)\Big) \leqslant 1 + \log_2(1+B) = 1+b.$$

Ustalmy $x, y, z, p \in Y$ i pokażmy, że $(x|z)_p \geqslant \min((x|y)_p, (y|z)_p) - 3$.

Przypadek 1: wszystkie liczby $d'(x,p)$, $d'(y,p)$, $d'(z,p)$ są odległe o nie więcej niż 1 od pewnej liczby t (tzn. $\max - \min \leqslant 2$). Jeśli $d(x,z)$ nie jest najdłuższym bokiem trójkąta xyz, to bez straty ogólności załóżmy $d(x,z) \leqslant d(x,y)$; gdy jest najdłuższym, to wobec (*) bez straty ogólności $d(x,z) \leqslant d(x,y)+1$. Możemy więc szacować:

$$(x|z) \geqslant \frac{(t-1)+(t-1)-(d'(x,y)+1)}{2} = \frac{(t+1)+(t+1)-d'(x,y)}{2} - 2.5 \geqslant (x|y) - 3.$$

Przypadek 2: takie t nie istnieje. Nadajmy x, y, z nazwy u, v, w tak, aby $d'(u,p) \leqslant d'(v,p) \leqslant d'(w,p)$ i niech te odległości będą oznaczone s, m, l (small, medium, large) odpowiednio. $\max - \min > 2$ oznacza zatem $s < l - 2$.

Podprzypadek a: $m < l-1$. Stosując (*) dla trójkąta pvw dostajemy, że $d(v,w)$ jest różni się o co najwyżej 1 od l. Zatem $2(v|w) = m + l - d'(v,w)$ różni się od m o co najwyżej 1. Ponieważ $s \leqslant m < l-1$, więc $d'(u,w)$ różni się od l o co najwyżej 1, a więc $2(u|w)$ jest różni się od s o co najwyżej 1. Ponieważ $d'(u,v) \leqslant m+1$, mamy $2(u|v) \geqslant s+m-(m+1) = s-1$. Jedyna hipotetycznie zła sytuacja jest wtedy, gdy $(u|w)$ jest najkrótszym produktem i $s < m-4$. Wówczas jednak $d'(u,v) \geqslant m-1$ i $s+1 = s+m-(m-1) \geqslant 2(u|v) \geqslant s-1$, więc $(u|w)$ różni się od $(u|v)$ o co najwyżej 1.

Podprzypadek b: $m \geqslant l-1$, czyli $s < m-1$. $d'(u,v)$ różni się o co najwyżej 1 od m, więc $2(u|v) = s+m-d'(u,v)$ różni się o co najwyżej 1 od s. Podobnie $d'(u,w)$ różni o co najwyżej 1 od l, więc $2(u|w)$ różni się o co najwyżej 1 od s. Ponieważ $d'(v,w) \leqslant l+1$, dostajemy: $2(v|w) \geqslant m+l-(l+1) = m-1 \geqslant s-1$ i najmniejszy produkt różni się od średniego o co najwyżej 1. $\square$

Wniosek 3.39. *w twierdzeniu 3.18 można żądać, by metryka d' była hiperboliczna.*

Rozdział 4

Uniwersalne twierdzenia teorii wymiaru

W tym rozdziale przedstawiamy ogólne konstrukcje, które pozwalają dowodzić twierdzenia dotyczące różnych wariantów pojęcia wymiaru: asdim, $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$, $\dim_{\mathrm{AN}}$ oraz $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}$.

4.1. Twierdzenie logarytmiczne o wymiarze produktu

W tej części udowodnimy zapowiedziane wcześniej twierdzenie, które pozwala szacować wymiar ($\mathrm{asdim}, \mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}, \dim_{\mathrm{AN}}, \mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}$ – oprócz l-asdim) produktu $A \times B$ przez sumę wymiarów przestrzeni A, B.

Naturalnym pytaniem pojawiającym się w tym kontekście jest pytanie o to, czy lub pod jakimi warunkami wymiar produktu jest dokładnie równy sumie wymiarów. Otóż, w [DSm6] udowodniono, że dla kozwartej[1], spójnej i właściwej przestrzeni metrycznej X zachodzi równość: $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} X \times \mathbb{R} = \mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} X + 1$ (twierdzenie typu Mority)[2]. Z drugiej strony znane są kontrprzykłady dla wymiaru asdim ([BuLe]). Jednym z nich jest skonstruowana w [Dr06] przestrzeń X o $\mathrm{asdim} X = 2$ taka, że $\mathrm{asdim} X \times \mathbb{R} = 2$.[3] Używając twierdzenia 3.18 za darmo dostajemy analogiczny kontrprzykład dla wymiaru $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$:

Przykład 4.1. *Istnieją przestrzenie Y, R spełniajace*[4] $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} Y = 2$, $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} R \geqslant 1$ *takie, że* $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} Y \times R = 2$.

Dowód. Bierzemy wyżej wspomnianą przestrzeń X z [Dr06]. Bez straty ogólności ustalmy na $X \times \mathbb{R}$ metrykę d poprzez formułę $d((x,r),(x',r')) = \max(d^X(x,x'), d^{\mathbb{R}}(r,r'))$. Stosujemy twierdzenie 3.18 dla przestrzeni $X \times \mathbb{R}$, dostając metrykę $d' = c \circ d$, w której przestrzeń ma wymiar $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$ równy 2. Metrykę d' można w naturalny sposób obciąć do X i do $\mathbb{R}$ – dostajemy w ten sposób przestrzenie Y, R zgrubnie równoważne wyjściowym. Mamy więc $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} R \geqslant \mathrm{asdim} R = \mathrm{asdim} \mathbb{R} = 1$ oraz $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} Y \geqslant \mathrm{asdim} Y = \mathrm{asdim} X = 2$. Z inkluzji $Y \subseteq Y \times R$ wnioskujemy $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} Y \leqslant 2$, co kończy dowód. □

[1] Przestrzeń metryczna X jest kozwarta, gdy istnieje jej zwarty podzbiór taki, że suma jego obrazów przy izometriach X jest całą przestrzenią X.

[2] W [BD07] stwierdzono (bez dowodu), że dla $\dim_{\mathrm{AN}}$ wystarczy założyć kozwartość X.

[3] Jest to więc kontrprzykład nie tylko dla równości w twierdzeniu logarytmicznym, ale także dla twierdzenia typu Mority. Twierdzenia typu Mority mówią o równości, gdy jednym z czynników produktu jest prosta $\mathbb{R}$.

[4] W istocie $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} R = 1$: wystarczy zauważyć, że $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}} \mathbb{R} = 1$ oraz że afiniczna funkcja kontroli dla $(\mathbb{R}, d^{\mathbb{R}})$ jest funkcją kontroli dla (R, d'^R). W ogólności zmieniając metrykę na produkcie w celu uzyskania równości asdim $= \mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$, można zażądać, by równość taka zachodziła również dla czynników produktu.

Twierdzenie o wymiarze produktu i poprzedzające go lemat oraz definicja pochodzą z [BDLM].

Definicja 4.2. *Niech $k \geqslant n+1 \geqslant 0$. (n,k)-wymiarową funkcją wymiaru dla X nazywamy dowolną funkcję $D_X : \mathbb{R}^+ \to [0,\infty]$ taką, że dla każdego $r \in \mathbb{R}^+$ istnieje k rodzin $\mathcal{U}_i$ ($i \in \{1,\ldots,k\}$), które są r-rozłączne, $D_X(r)$ ograniczone oraz dowolny element $x \in X$ należy do przynajmniej $k-n$ zbiorów $\bigcup \mathcal{U}_i$. Ostatni warunek jest równoważny temu, że dowolny $(n+1)$ elementowy podzbiór $\{\mathcal{U}_i\}$ pokrywa X.*

W szczególności $(n, n+1)$-wymiarowa funkcja kontroli to po prostu n-wymiarowa funkcja kontroli.

Lemat 4.3. *Niech D_X^{n+1} będzie n-wymiarową funkcją kontroli dla X. Zdefiniujemy indukcyjnie ciąg funkcji $(D_X^i)_{i \geqslant n+1}$ wzorem $D_X^{i+1}(r) = D_X^i(3r) + 2r$. Wówczas D_X^k jest (n,k)-wymiarową funkcją kontroli dla X ($k \geqslant n+1$).*

Dowód. Dowodzimy przez indukcję po k, baza indukcji jest trywialna.

Niech $(\mathcal{U}_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ będą $3r$-rozłączne i $[D_X^k(3r)]$-ograniczone i dowolny punkt $x \in X$ należy do przynajmniej $k-n$ z nich. Niech $\mathcal{U}_i' = \{N_r(U_i) \mid U_i \in \mathcal{U}_i\}$ będzie zbiorem r-otoczek zbiorów z $\mathcal{U}_i$. Otrzymane rodziny $\mathcal{U}_i'$ są r-rozłączne i $[D_X^k(3r) + 2r]$-ograniczone. Pozostało skonstruować dodatkową rodzinę. Niech zatem:

$$\mathcal{U}_{k+1}' = \Big\{ \bigcap_{s \in S} U_s \setminus \bigcup_{k \geqslant i \notin S} \mathcal{U}_i' \;\Big|\; S \subseteq \{1,\ldots,k\},\ |S| = k-n,\ U_s \in \mathcal{U}_s \Big\}.$$

Zauważmy, że dowolny zbiór $U_{k+1}' \in \mathcal{U}_{k+1}'$ jest zawarty w pewnym zbiorze $U_j \in \mathcal{U}_j$, w szczególności jest $[D_X^k(3r)]$-ograniczony. Potrzeba wykazać r-rozłączność $\mathcal{U}_{k+1}'$.

Rozpatrzmy $A = \bigcap_{s \in S} U_s \setminus \bigcup_{i \notin S} \mathcal{U}_i'$ oraz $B = \bigcap_{t \in T} U_t \setminus \bigcup_{i \notin T} \mathcal{U}_i'$ ($U_s \in \mathcal{U}_s$, $U_t \in \mathcal{U}_t$). Jeśli $S = T$, to A, B są trywialnie $3r$-rozłączne. W przeciwnym przypadku załóżmy istnienie elementów $a \in A, b \in B$ takich, że $d(a,b) < r$. Weźmy dowolne $s \in S \setminus T$ i zauważmy, że $a \in U_s$, a zatem $b \in N_r(U_s) = U_s' \subseteq \mathcal{U}_s'$, sprzeczność.

Pozostało wykazać, że dla dowolnego wyboru $n+1$ elementowego zbioru indeksów $J \subseteq \{1,\ldots,k+1\}$ rodzina $\mathcal{U}_J = \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j'$ pokrywa X. Kłopot jest jedynie w przypadku, gdy $k+1 \in J$ i pewien x nie należy do żadnego zbioru $\bigcup \mathcal{U}_j'$, gdzie $k+1 \neq j \in J$. Wtedy jednak x musi należeć do wszystkich zbiorów $\bigcup \mathcal{U}_i$ ($i \notin J$), a zatem należy do pewnego $A \in \mathcal{U}_{k+1}'$. □

Twierdzenie 4.4 (o wymiarze produktu)**.** *Niech D oznacza* asdim*,* $\mathrm{asdim_{AN}}$*,* $\mathrm{dim_{AN}}$ *lub* $\mathrm{micdim_{AN}}$*. Wówczas*

$$D(X \times Y) \leqslant D(X) + D(Y).$$

Dowód. Niech $D(X) = m$, $D(Y) = n$ oraz $k = m+n+1$. Wybierzmy m- oraz n-wymiarowe funkcje kontroli dla X oraz Y odpowiedniego typu[5]. Z lematu mamy (m,k)- i (n,k)-wymiarowe funkcje wymiaru tego samego typu. Mamy więc także odpowiednie rodziny $\mathcal{U}_i \subseteq 2^X$ i $\mathcal{V}_i \subseteq 2^Y$ ($i \leqslant k$) r-rozłączne i $D_X(r)$- i $D_Y(r)$-ograniczone, których krotności w każdym punkcie to przynajmniej $k-m$ i $k-n$ odpowiednio. Niech $\mathcal{UV}_i = \{U_i \times V_i \mid U_i \in \mathcal{U}_i, V_i \in \mathcal{V}_i\}$. Rozpatrzmy dowolny punkt $(x,y) \in X \times Y$. Ponieważ x znajduje się w przynajmniej $k-m = n+1$ zbiorach $\bigcup \mathcal{U}_i$ a y w przynajmniej $m+1$ zbiorach $\bigcup \mathcal{U}_i$, więc istnieje taki indeks j, że $(x,y) \in \mathcal{UV}_j$. Rodziny $\mathcal{UV}_i$ są r-rozłączne i $[D(X)(r) + D_Y(r)]$-ograniczone. □

[5] Odpowiedniego względem znaczenia D, a więc rzeczywiste dla asdim, afiniczne dla $\mathrm{asdim_{AN}}$ itd.

4.2. Twierdzenia typu Hurewicza

Twierdzenia prezentowane w tym rozdziale pochodzą z [BDLM], choć w definicjach (a zatem i dowodach) można znaleźć subtelne różnice. Oczywiście nie oznacza to, że wszystkie te twierdzenia pochodzą od Autorów [BDLM], część z nich była znana wcześniej.

4.2.1. Jeden lemat i kilka ciekawych wniosków

Zacznijmy od uogólnienia pojęć r-łańcucha, r-ograniczoności i r-spójności.

Definicja 4.5. *Niech X, Y - przestrzenie metryczne, $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $r_X, r_Y > 0$.*

Zbiór A jest (r_X, r_Y)-ograniczony, gdy dla dowolnych $x, x' \in A$ mamy $d^X(x, x') \leqslant r_X$ oraz $d^Y(f(x), f(x')) \leqslant r_Y$.

Dwa punkty $x, x' \in X$ są (r_X, r_Y)-bliskie, gdy $d^X(x, x') < r_X$ oraz $d^Y(f(x), f(x')) < r_Y$.

(r_X, r_Y)-łańcuchem w A nazwiemy ciąg punktów $x_0, \ldots, x_n$, z których każde dwa kolejne są (r_X, r_Y)-bliskie.

Zbiór A jest (r_X, r_Y)-spójny, gdy dowolne punkty z A można połączyć (r_X, r_Y)-łańcuchem. (r_X, r_Y)-składową zbioru A nazwiemy dowolny maksymalny (r_X, r_Y)-spójny podzbiór A.

Łatwo widzimy:

Uwaga 4.6. *Niech $f : X \to Y$ i niech C_f będzie funkcją kontroli dla f. Wówczas r-składowe X są równe jego $(r, \lim_{s \to r^-} C_f(s))$-składowym.*

Uwaga 4.7. *Niech $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Jeśli r_X-składowe zbioru A są R_X-ograniczone, a r_Y-składowe zbioru B są R_Y-ograniczone, to (r_X, r_Y)-składowe zbioru $A \cup f^{-1}(B)$ są (R_X, R_Y)-ograniczone.*

Dowodu wymaga jednak:

Lemat 4.8. *Niech $f : X \to Y$ i niech A, B będą podzbiorami X. Załóżmy, że (r^A_X, r^A_Y)-składowe zbioru A są (R^A_X, R^A_Y)-ograniczone oraz (r^B_X, r^B_Y)-składowe zbioru B są (R^B_X, R^B_Y)-ograniczone. Jeśli $R^B_X + 2r^B_X \leqslant r^A_X$ oraz $R^B_Y + 2r^B_Y \leqslant r^A_Y$, to (r^B_X, r^B_Y)-składowe $A \cup B$ są $(2R^B_X + 2r^B_X + R^A_X, 2R^B_Y + 2r^B_Y + R^A_Y)$-ograniczone, w szczególności $(R^A_X + 2r^A_X, R^A_Y + 2r^A_Y)$-ograniczone.*

Dowód. Niech $x = x_0, \ldots x_n = x'$ będzie (r^B_X, r^B_Y)-łańcuchem w $a \cup B$. Pokażemy, że punkty x, x' są $(2R^B_X + 2r^B_X + R^A_X, 2R^B_Y + 2r^B_Y + R^A_Y)$-bliskie.

Zauważmy, że jeśli dla pewnych indeksów $i + 1 < j$ wszystkie x_k dla $i < k < j$ należą do B, to x_{i+1} i x_{j-1} są w jednej (r^B_X, r^B_Y)-składowej B a więc $d^X(x_{i+1}, x_{j+1}) \leqslant R^B_X$ oraz $d^Y(f(x_{i+1}), f(x_{j+1})) \leqslant R^B_Y$.

Jeśli więc $x_i, x_j \in A$, $i + 1 < j$ i wszystkie x_k dla $i < k < j$ należą do B, to mamy szacowanie: $d^X(x_i, x_j) \leqslant d^X(x_i, x_{i+1}) + d^X(x_{i+1}, x_{j-1}) + d^X(x_{j-1}, x_j) < r^B_X + R^B_X + r^B_X \leqslant r^A_X$. Tak samo dostajemy szacowanie $d^Y(f(x_i), f(x_j)) < r^A_Y$. Analogiczne szacowania dla $i + 1 = j$ są oczywiste. Zatem wszystkie $x_i \in A$ należą do tej samej składowej (r^A_X, r^A_Y)-składowej zbioru A.

Niech x_s, x_t będą odpowiednio pierwszym i ostatnim punktem łańcucha należącym do A.

$$\begin{aligned} d^X(x, x') &\leqslant d^X(x_0, x_{s-1}) + d^X(x_{s-1}, x_s) + d^X(x_s, x_t) + d^X(x_t, x_{t+1}) + d_X(x_{t+1}, x_n) < \\ &< R^B_X + r^B_X + R^A_X + r^B_X + R^B_X = 2R^B_X + 2r^B_X + R^A_X \end{aligned}$$

Analogicznie dostajemy oszacowanie $d^Y(f(x), f(x')) < 2R^B_Y + 2r^B_Y + R^A_Y$. □

Z powyższego lematu wynikają dwa wnioski:

Wniosek 4.9. *Niech $f : X \to Y$ oraz $B_i \subseteq X$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$. Niech dla każdego i (r^i_X, r^i_Y)-składowe B_i będą (R^i_X, R^i_Y)-ograniczone. Jeśli dla każdego $i < n$ $R^{i+1}_X + 2r^{i+1}_X \leqslant r^i_X$ oraz $R^{i+1}_Y + 2r^{i+1}_Y \leqslant r^i_Y$, to (r^n_X, r^n_Y)-składowe $\bigcup B_i$ są $(R^1_X + 2r^1_X, R^1_Y + 2r^1_Y)$-ograniczone.*

Dowód. Przez $|a|$-składową lub $|a|$-ograniczenie rozumieć będziemy (a_X, a_Y)-składową lub (a_X, a_Y)-ograniczenie. Analogicznie $|a + b|$ rozumieć będziemy jako $(a_X + b_X, a_Y + b_Y)$ itd.

Z poprzedniego lematu dostajemy, że $|r^2|$-składowe $B_1 \cup B_2$ są $|2R^2 + 2r^2 + R^1|$-ograniczone i dalej indukcyjnie $|r^n|$-składowe $\bigcup B_i$ są $|R^1 + \sum_{i=2}^n 2(R^i + r^i)|$-ograniczone. Ostatecznie:

$$\begin{aligned} R^1 + \sum_{i=2}^n 2(R^i + r^i) &< R^1 + 2(R^2 + r^2) + \ldots + 2(R^{n-1} + r^{n-1}) + 2(R^n + 2r^n) \leqslant \\ &\leqslant R^1 + 2(R^2 + r^2) + \ldots + 2(R^{n-1} + r^{n-1}) + 2r^{n-1} = \\ &= R^1 + 2(R^2 + r^2) + \ldots + 2(R^{n-2} + r^{n-2}) + 2(R^{n-1} + 2r^{n-1}) \\ &\leqslant \ldots \leqslant R^1 + 2(R^2 + r^2) + 2r^2 = R^1 + 2(R^2 + 2r^2) \leqslant R^1 + 2r^1, \end{aligned}$$

gdzie R^i, r^i oznaczają R^i_X, r^i_X lub R^i_Y, r^i_Y. □

Wniosek 4.10. *Niech d_X będzie funkcją wymiaru dla X. Jeśli dla dowolnego $r > 0$ istnieje podzbiór $X_r \subseteq X$ taki, że $\mathrm{asdim} X_r \leqslant n$ oraz $d_{X \setminus X_r}(r) \leqslant n$, to $\mathrm{asdim} X \leqslant n$.*

Dowód. Niech r będzie dane, skonstruujemy $n + 1$ rodzin, których r-składowe są jednostajnie ograniczone. Podzielmy $X \setminus X_r$ na zbiory A_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, których r-składowe są R-ograniczone. Podzielmy X_r na zbiory B_i, których $(R + 2r)$-składowe są ograniczone przez pewne M. Z lematu 4.8 r-składowe $A_i \cup B_i$ są $(M + 2(R + 2r))$-ograniczone. □

Poniższa uwaga ma nieco sztuczne sformułowanie, podobnie jak kilka kolejnych, ale prowadzą one do eleganckiego wniosku: uwagi 4.18.

Uwaga 4.11. *Niech oznaczenia będą jak w powyższym wniosku. Jeśli istnieje jedna n-wymiarowa funkcja kontroli D_1 dla wszystkich X_r to dla dowolnego $r < \infty$ przestrzeń X można podzielić na $n+1$ zbiorów, których r-składowe są $(D_1 + 2Id_{\mathbb{R}})(D_2^{\{(X \setminus X_r, r)\}}(r) + 2r)$-ograniczone. Funkcja $D_2^{\{(A_r, r)\}}$ zdefiniowana jest następującym warunkiem: dla dowolnego r_0 istnieje podział zbioru A_{r_0} na $n + 1$ zbiorów, których r_0-składowe są $D_2^{\{(A_r, r)\}}(r_0)$-ograniczone.*

Z powyższego wniosku dostajemy zaś dwa kolejne, najpierw jednak wprowadźmy jedną definicję.

Definicja 4.12. *Niech $\{X_s\}$ będzie rodziną podzbiorów przestrzeni metrycznej. Powiemy, że $\mathrm{asdim} X_s \leqslant n$ jednostajnie, jeżeli istnieje jedna funkcja $D : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, która jest n-wymiarową funkcją kontroli dla każdego X_s.*

Wniosek 4.13. *Niech $X = \bigcup_{s \in S} X_s$ oraz $\mathrm{asdim} X_s \leqslant n$ jednostajnie. Jeśli dla każdego $r \leqslant \infty$ istnieje podzbiór $X_r \subseteq X$ taki, że $\mathrm{asdim} X_r \leqslant n$ oraz rodzina $\{X_s \setminus X_r\}$ jest r-rozłączna, to $\mathrm{asdim} X \leqslant n$.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że z r-rozłączności $\{X_s \setminus X_r\}$ wynika, że

$$d_{X \setminus X_r}(r) \leqslant \sup_{s \in S} d_{X_s \setminus X_r}(r) \leqslant n$$

i zastosować 4.10. □

Uwaga 4.14 (wniosek dla innych definicji wymiaru)**.** *Jeśli przy oznaczeniach 4.13 oraz 4.11 funkcje* D_1 *i* $D_2^{\{(\bigcup_s X_s \setminus X_r, r)\}}$ *są liniowe / afiniczne / liniowe na pewnym otoczeniu zera, to odpowiednio:* $\mathrm{dim_{AN}} X \leqslant n$ / $\mathrm{asdim_{AN}} X \leqslant n$ / $\mathrm{micdim_{AN}} X \leqslant n$.

Wniosek 4.15. *Niech* G *będzie grupą z metryką lewo-niezmienniczą, a* G_r *będzie podgrupą generowaną przez* $B(1_G, r)$*. Jeśli dla każdego* $r < \infty$ $\mathrm{asdim} G_r \leqslant n$*, to* $\mathrm{asdim} G \leqslant n$.

Dowód. Wybierzmy reprezentantów g_s warstw w przestrzeni ilorazowej G/G_r. Zauważmy, że $Y_r = \bigcup_{[g_s] \neq [1_G]} g_s \cdot G_r$ jest r-rozłączną sumą zbiorów izometrycznych z G_r, a więc $d_{Y_r}(r) = d_{G_r}(r) \leqslant \mathrm{asdim} G_r \leqslant n$. Ponieważ $G_r = G \setminus Y_r$, z wniosku 4.10 dostajemy tezę. □

Uwaga 4.16 (wniosek dla innych definicji wymiaru)**.** *Jeśli przy oznaczeniach 4.15 oraz 4.11 funkcje* D_1 *i* $D_2^{\{(Y_r, r)\}}$ *są liniowe / afiniczne / liniowe na pewnym otoczeniu zera, to odpowiednio:* $\mathrm{dim_{AN}} G \leqslant n$ / $\mathrm{asdim_{AN}} G \leqslant n$ / $\mathrm{micdim_{AN}} G \leqslant n$.

Z powyższego wniosku mamy natychmiast inny wniosek a z powyższej uwagi inną uwagę:

Wniosek 4.17. *Jeśli* G *jest grupą z właściwą lewo-niezmienniczą metryką, to* $\mathrm{asdim} G = \sup_H(\mathrm{asdim} H)$*, gdzie* H *są skończenie generowanymi podgrupami* G.

Dowód. Oczywiście wystarczy udowodnić nierówność $\leqslant$. Ponieważ metryka jest właściwa, czyli $B(1_G, r)$ jest zbiorem skończonym, więc w powyższym wniosku grupy G_r są skończenie generowane. □

Uwaga 4.18 (wniosek dla innych definicji wymiaru)**.** *dla grupy* G *z właściwą i lewo-niezmienniczą metryką następujące warunki są równoważne:*

a) $\mathrm{asdim} G \leqslant n$ / $\mathrm{asdim_{AN}} G \leqslant n$,

b) $\mathrm{asdim} H \leqslant n$ / $\mathrm{asdim_{AN}} H \leqslant n$ *jednostajnie dla wszystkich skończenie generowanych podgrup* $H < G$*, czyli istnieje funkcja* D *odpowiedniego typu, która jest* n*-wymiarową funkcją kontroli dla wszystkich* H.

Dowód. Implikacja $\Longrightarrow$ jest oczywista.

Implikacja $\Longleftarrow$ wynika z 4.16. Wprost z założeń wynika, że za D_1 można przyjąć D. Dzięki temu, że Y_r jest r-rozłączną sumą zbiorów izometrycznych z G_r, to również za D_2 można przyjąć D. □

W powyższej uwadze nie uwzględniono $\mathrm{micdim_{AN}}, \mathrm{dim_{AN}}$, ponieważ mamy do czynienia z przestrzenią dyskretną.

Przydatna będzie także następująca obserwacja:

Lemat 4.19. *Niech* A *będzie podzbiorem* X*,* $m \geqslant 0$*,* $R > 0$*. Jeśli* D_A *jest* m*-wymiarową funkcją kontroli dla* A*, to* $D_B(x) = D_A(x + 2R) + 2R$ *jest* m*-wymiarową funkcją kontroli dla „domkniętego"* R*-otoczenia* $B = \overline{N}_R(A) = \bigcup_{a \in A} \overline{B}(a, R)$ *zbioru* A.

Dowód. Niech $r > 0$. Przedstawiamy A jako $\bigcup_{i=0}^m A_i$, gdzie $(r + 2R)$-składowe A_i^t zbiorów A_i są $D_A(r + 2R)$-ograniczone. Niech $B_i = \overline{N}_R(A_i)$ będą podzielone na $B_i^t = \overline{N}_R(A_i^t)$. Łatwo widzimy, że B_i^t dla ustalonego i i różnych t są r-rozłączne oraz $D_A(x + 2R) + 2R$ ograniczone oraz że B_i pokrywają B. □

4.2.2. Twierdzenia typu Hurewicza dla asdim, $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$, $\dim_{\mathrm{AN}}$ i $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}$, wymiar funkcji

Twierdzenia typu Hurewicza mówią, że pod pewnymi warunkami, gdy $f : X \to Y$, to

$$D(X) \leqslant D(Y) + D(f),$$

gdzie D jest pewną funkcją wymiaru. Oczywiście nie jest jasne, co rozumiemy przez wymiar funkcji. W klasycznym twierdzeniu Hurewicza (dla dim) jest to supremum wymiarów przeciwobrazów punktu. W [BDLM] prowadzona jest dyskusja nad tym jak rozsądnie zdefiniować wymiar funkcji w przypadku zgrubnym. Poniższy przykład pokazuje, że nie wystarczy wziąć supremum wymiarów przeciwobrazów zbiorów ograniczonych, nawet gdy od f zażądamy, by była lipschitzowska. Autorzy proponują zamiast tego następującą definicję:

Definicja 4.20. *Niech $f : X \to Y$. Wymiarem asymptotycznym funkcji f nazywamy wartość* $\mathrm{asdim} f$ *równą supremum wymiarów asymptotycznych przeciwobrazów zbiorów $B \subseteq Y$ takich, że* $\mathrm{asdim} B = 0$

W świetle twierdzenia typu Hurewicza dla asdim okaże się, że ta elegancka definicja jest równoważna starszej definicji, która za wymiar funkcji przyjmowała najmniejszą taką wartość n, że przeciwobrazy zbiorów M-ograniczonych miały wymiar nieprzekraczający n jednostajnie (dla dowolnego M).

Warto odnotować, że znana przed [BDLM] wersja twierdzenia Hurewicza dla wymiaru asymptotycznego była istotnie słabsza: wymagała, by X była geodezyjna, a f lipschitzowska[6].

Przykład 4.21. *Istnieje lipschitzowska funkcja $f : X \to Y$ taka, że:*

$$\mathrm{asdim} Y \overset{a)}{=} 0 \overset{b)}{=} \sup\{\mathrm{asdim} f^{-1}(B) \mid B \subseteq Y \text{jest ograniczony}\},$$

ale $\mathrm{asdim} X > 0$.

Dowód. Niech Y skada się z punktów postaci $(2^n, 0) \in \mathbb{R}^2$, a X z pionowych odcinków długości n zaczynających się w punktach $(2^n, 0)$. Za f przyjmujemy rzut na Y. Oczywiście mamy $\mathrm{asdim} Y \overset{a)}{=} 0$. $f^{-1}(B)$ jest zawsze zbiorem ograniczonym, jeśli tylko B jest ograniczony, a zatem mamy też równość *b*). Jednakże dla dowolnego $r > 0$ nie da się ograniczyć rozmiaru r-składowych X (bo zawiera dowolnie długie odcinki), a zatem $\mathrm{asdim} X > 0$. □

Zdefiniujmy m-wymiarową funkcję kontroli dla *funkcji.*

Definicja 4.22. *Niech $f : X \to Y$ oraz $-1 \leqslant m$. m-wymiarową funkcją kontroli dla f nazwiemy funkcję $D_f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ taką, że dla dowolnych $r_X, R_Y < \infty$ przeciwobraz dowolnego zbioru $B \subseteq Y$ R_Y-ogarniczonego można podzielić na $m + 1$ zbiorów, których r_X-składowe są $D_f(r_X, R_Y)$ ograniczone.*

Wyżej wspomnianą definicję wymiaru funkcji odwołującą się do jednostajnego szacowania wymiaru można więc wyrazić w terminach powyższej definicji – wymiarem funkcji byłoby najmniejsze m dla którego istnieje m-wymiarowa funkcja kontroli. Udowodnimy teraz, że nasza definicja jest niesłabsza od definicji z jednostajnym szacowaniem wymiaru / m-wymiarową funkcją kontroli.

Uwaga 4.23. *Niech $f : X \to Y$ oraz $m \geqslant -1$. Jeśli* $\mathrm{asdim} f \leqslant m$, *to f ma m-wymiarową funkcję kontroli.*

[6] Nawet nie quasi-geodezyjna i ws-lipschitzowska odpowiednio!

Dowód. Przypadek $m = -1$ jest trywialny ($X = \emptyset$), zatem niech $m \geqslant 0$. Ustalmy $r_X, R_Y < \infty$ i przypuśćmy nie wprost, że dla dowolnie dużego n istnieje $y_n \in Y$ taki, że $f^{-1}\Big(B(y_n, R_Y+1)\Big)$ nie może być przedstawiony jako $m+1$ zbiorów, których r_X-składowe są n-ograniczone. Zatem dla $C = \bigcup B(y_n, R_Y + 1)$ mamy asdim$f^{-1}(C) > m$, a więc asdim$C > 0$, w szczególności zbiór C jest nieograniczony. Możemy więc (ewentualnie przechodząc do podciągu) zażądać, by $\mathrm{dist}(y_n, \{y_k \mid k < n\}) \geqslant 2^n$. Przy takim założeniu asdim$C = 0$, sprzeczność. □

Na wzór (m, k)-wymiarowych funkcji kontroli dla przestrzeni (4.2) zdefiniujmy (m, k)-wymiarowe funkcje kontroli dla przekształceń.

Definicja 4.24. *Niech $f : X \to Y$ oraz $-1 \leqslant m \leqslant k - 1$. (m, k)-wymiarową funkcją kontroli dla f nazwiemy funkcję $D_f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ taką, że dla dowolnych $r_X, R_Y < \infty$ i przeciwobrazu dowolnego zbioru $B \subseteq Y$ R_Y-ogarniczonego, istnieje k zbiorów $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$, których r_X-składowe są $D_f(r_X, R_Y)$ ograniczone, a ponadto takich, że dowolny $x \in A$ należy do przynajmniej $k - m$ spośród tych zbiorów.*

Uwaga 4.25. *Niech D_f^{n+1} będzie n-wymiarową funkcją kontroli dla f. Zdefiniujemy indukcyjnie ciąg funkcji $(D_f^i)_{i\geqslant n+1}$ wzorem $D_f^{i+1}(r, R) = D_f^i(3r, R) + 2r$. Wówczas D_f^k jest (n, k)-wymiarową funkcją kontroli dla f ($k \geqslant n + 1$).*

Dowód. Dowód identyczny jak dla 4.3. □

Łatwo widzimy też:

Uwaga 4.26. *Niech $f : X \to Y$. Jeśli D_f jest (m, k)-wymiarową funkcją kontroli dla f, to dla dowolnego $B \subset Y$, którego r_Y-składowe są R_Y-ograniczone, zbiór $f^{-1}(B)$ można pokryć k zbiorami, których (r_X, r_Y)-składowe są $D_f(r_X, R_Y)$-ograniczone i dowolny $x \in f^{-1}(B)$ należy do przynajmniej $k - m$ spośród tych zbiorów.*

Dowód. Z założeń (∞, r_Y)-składowe zbioru $f^{-1}(B)$ są (∞, R_Y)-ograniczone. Z definicji funkcji kontroli dla każdej takiej składowej A^t istnieje jej k podzbiorów $(A_i^t)_{1\leqslant i\leqslant k}$, których r_X-składowe są $D(r_X, R_Y)$-ograniczone i które pokrywają każdy punkt tej składowej przynajmniej $k - m$ razy. Tezę dostajemy, biorąc rodzinę $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$, gdzie $A_i = \bigcup_t A_i^t$. □

Twierdzenie 4.27 (Najważniejsze w rozdziale)**.**
Niech $k = m+n+1$, gdzie $m, n \geqslant 0$, $f : X \to Y$ będzie zgrubnie jednostajnym przekształceniem przestrzeni metrycznych oraz asdim$Y \leqslant n$.

$$\mathrm{asdim} X \leqslant m + n,$$

jeśli tylko istnieje (m, k)-wymiarowa funkcja kontroli D_f dla f. Ponadto, jeśli funkcja kontroli C_f dla f, n-wymiarowa funkcja kontroli D_Y^{n+1} dla Y oraz D_f są afiniczne / liniowe / liniowe na pewnych otoczeniach zera, to X ma $(n+m)$-wymiarową funkcję kontroli tego samego typu.

Dowód. Niech C_f będzie funkcją kontroli dla f, a D_Y (n, k)-wymiarową funkcją kontroli dla Y (mająca ten sam typ co n-wymiarowa funkcja kontroli D_Y^{n+1} dla Y, 4.3), a D_f (m, k)-wymiarową funkcją kontroli dla f. Możemy żądać, by $C_f(r) \geqslant r$, $D_Y(r) \geqslant r$ oraz $D_f(r, R) \geqslant r$.

Dla ustalonego $r < \infty$ znajdziemy $D_X(r)$ i przedstawienie przestrzeni X jako sumy k zbiorów $(D^j)_{1\leqslant j\leqslant k}$, których r-składowe będą $D_X(r)$-ograniczone.

Zdefiniujmy indukcyjnie ciąg liczb $r_Y^n \leqslant R_Y^n \leqslant \ldots \leqslant r_Y^0 \leqslant R_Y^0$, gdzie $r_Y^n = C_f(r)$, $R_Y^i = D_Y(r_Y^i)$ oraz $r_Y^{i-1} = 3R_Y^i$. Niech ponadto $r_Y = r_Y^0$ oraz $R_Y = D_Y^{n+1}(r_Y)$.

Korzystając z n-wymiarowej funkcji kontroli dla Y przedstawmy Y jako sumę $n+1$ zbiorów $(B_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, których r_Y-składowe są R_Y-ograniczone.

Korzystając z (n,k)-wymiarowej funkcji kontroli dla Y każdy zbiór $(B_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ można przedstawić jako sumę k podzbiorów $(B_i^j)_{1\leqslant j\leqslant k}$, tak, że dowolny $y\in B_i$ należy do przynajmniej $k-n=m+1$ zbiorów B_i^j, a ponadto ich r_Y^i-składowe są R_Y^i-ograniczone.

Zdefiniujmy indukcyjnie ciąg liczb $r_X^n\leqslant R_X^n\leqslant\ldots\leqslant r_X^0\leqslant R_X^0$, gdzie $r_X^n=r$, $R_X^i=D_f(r_X^i,R_Y)$ oraz $r_X^{i-1}=3R_X^i$.

Na mocy poprzedniej uwagi dla każdego $0\leqslant i\leqslant n$ przedstawiamy zbiór $f^{-1}(B_i)$ jako sumę zbiorów $(A_i^j)_{1\leqslant j\leqslant k}$ tak, aby ich (r_X^i,r_Y)-składowe były (R_X^i,R_Y)-ograniczone i by każdy $x\in f^{-1}(B_i)$ należał do przynajmniej $k-m=n+1$ zbiorów A_i^j.

Niech $D_i^j=A_i^j\cap f^{-1}(B_i^j)$ i niech D_j będzie sumą wszystkich $(D_i^j)_{0\leqslant i\leqslant n}$. Stosując trick Kolmogorova, wnioskujemy, że ponieważ dowolny $x\in f^{-1}(B_i)$ należy do przynajmniej $n+1$ zbiorów A_i^j oraz do przynajmniej $m+1$ zbiorów $f^{-1}(B_i^j)$, więc istnieje takie l, że $x\in A_i^l\cap f^{-1}(B_i^l)$
$\subseteq D^l$.

Zauważmy, że (r_X^i,r_Y^i)-składowe zbioru D_i^j są (R_X^i,R_Y^i)-ograniczone: po pierwsze (r_X^i,r_Y^i)-składowe D_i^j są drobniejsze niż (r_X^i,r_Y)-składowe A_i^j, które są (R_X^i,∞)-ograniczone, a po drugie są one drobniejsze od (∞,r_Y^i)-składowych $f^{-1}(B_i^j)$, które są (∞,R_Y^i)-ograniczone.

Z 4.9 wynika, że dla zbioru $D^j=\bigcup_{0\leqslant i\leqslant n}D_i^j$ jego (r_X^n,r_Y^n)-składowe są $(3R_X^0,3R_Y^0)$-ograniczone. Ponieważ $(r_X^n,r_Y^n)=(r,C_f(r))$, więc na mocy 4.7 r-składowe D^j są $3R_X^0$-ograniczone.

Zauważmy, że jeśli C_f, D_Y^{n+1}, D_Y, D_f są afiniczne / liniowe / liniowe na pewnym otoczeniu zera, to $3R_X^0$ jest afiniczną / liniową / liniową na jakimś otoczeniu zera funkcją r. $\square$

Natychmiast dostajemy więc wnioski:

Wniosek 4.28. asdim$f\leqslant m$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla* f *istnieje* m*-wymiarowa funkcja kontroli.*

Dowód. Implikacja $\Longrightarrow$ jest treścią 4.23.

Implikację $\Longleftarrow$ otrzymujemy jak następuje. Niech przekształcenie $f:X\to Y$ ma m-wymiarową funkcję kontroli D_f oraz $B\subseteq Y$ i niech asdim$B=0$. Możemy obciąć f do $A=f^{-1}(B)$ – wówczas przy oznaczeniach 4.27: $n=0$, $k=m+n+1=m+1$, więc D_f jest (k,m)-wymiarową funkcją kontroli z założeń twierdzenia 4.27. Wnioskujemy, że asdim$a\leqslant m+\text{asdim}B=m$, co kończy dowód. $\square$

Wniosek 4.29 (Twierdzenie typu Hurewicza dla asdim)**.**

$$\text{asdim}X\leqslant\text{asdim}f+\text{asdim}Y$$

dla dowolnego zgrubnie jednostajnego przekształcenia $f:X\to Y$*.*

Dowód. z 4.23 dostajemy m-wymiarową funkcję kontroli dla f, gdzie $m=\text{asdim}f$. Z 4.25 mamy (k,m)-wymiarową funkcję kontroli dla f, gdzie $n=\text{asdim}Y$ oraz $k=m+n+1$. Na koniec stosujemy powyższe twierdzenie 4.27. $\square$

Definicja 4.30. *Niech* $f:X\to Y$*.*

$\dim_{\mathrm{AN}}f$ *to infimum takich liczb* m*, że dla* f *istnieje* m*-wymiarowa funkcja kontroli* D_f *postaci* $D_f(r_X,R_Y)=a\cdot r_x+b\cdot R_Y$*.*

$\text{asdim}_{\mathrm{AN}}f$ *to infimum takich liczb* m*, że dla* f *istnieje* m*-wymiarowa funkcja kontroli* D_f *postaci* $D_f(r_X,R_Y)=a\cdot r_x+b\cdot R_Y+c$*.*

$\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}} f$ *to infimum takich liczb* m*, że dla* f *istnieje* $r_0 > 0$ *oraz* m*-wymiarowa funkcja kontroli* D_f*, która dla* $r_X, R_Y < r_0$ *jest postaci postaci* $D_f(r_X, R_Y) = a \ \cdot r_x + b \cdot R_Y$*.*

Wniosek 4.31 (Twierdzenie typu Hurewicza dla $\dim_{\mathrm{AN}}$, $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$ oraz $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}$)**.**

$$D(X) \leqslant D(f) + D(Y),$$

gdzie $f : X \to Y$*, a* D *oznacza* $\dim_{\mathrm{AN}}$*,* $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$ *lub* $\mathrm{micdim}_{\mathrm{AN}}$*.*

Dowód. Zauważmy, że twierdzenie 4.25 nie zmienia charakteru (funkcja liniowa, afiniczna, liniowa w otoczeniu zera) m-wymiarowej funkcji kontroli D_f dla f, gdy konstruuje z niej (k, m)-wymiarową funkcję kontroli D_f^k (chociaż otoczenie zera się zmniejsza). Teza wynika zatem z twierdzenia 4.27. □

Najprostszym wnioskiem z twierdzenia Hurewicza jest twierdzenie o wymiarze produktu (4.4). Jako bardziej interesujacy przykład możemy podać kolejne twierdzenie.

Wniosek 4.32. *Niech* $1 \to K \to G \xrightarrow{f} H \to 1$ *będzie krótkim ciągiem dokładnym grup, oraz metryki na* H *i* G *będą właściwe i lewo-niezmiennicze. Wówczas* $\mathrm{asdim} G \leqslant \mathrm{asdim} K + \mathrm{asdim} H$*.*

Dowód. Chcemy uzasadnić, że $\mathrm{asdim} f = k = \mathrm{asdim} K$. Wpierw upewnijmy się jednak, że f jest zgrubnie jednostajna – jest, ponieważ dowolna funkcja z przestrzeni właściwej jest zgrubnie właściwa, a zatem jako homomorfizm na mocy lematu 1.31 jest też zgrubnie jednostajna.

dla ustalonego $R_H < \infty$ zbiór $G_{1,R_H} = f^{-1}\Big(\overline{B}(1_H, R_H)\Big)$ zawiera się w pewnej R-otoczce zbioru $K \subseteq G$, ponieważ składa się ze skończenie wielu warstw podgrupy $K = f^{-1}(1_H)$, a więc jego wymiar nie przekracza $\mathrm{asdim} K$. W szczególności istnieje pewna k-wymiarowa funkcja kontroli $D(\cdot, R_H)$ dla G_{1,R_H}. Ponadto, wszystkie zbiory $f^{-1}\Big(\overline{B}(h, R_H)\Big)$ są izometryczne jako warstwy podgrupy G_{1,R_H}, więc $D(\cdot, R_H)$ jest k-wymiarową funkcją kontroli dla nich wszystkich. Zatem dla f istnieje k-wymiarowa funkcja kontroli, więc 4.28 i 4.29 konczą dowód. □

Podobne twierdzenie można sformułować dla $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$.

Lemat 4.33. *Niech* $1 \to K \to G \xrightarrow{f} H \to 1$ *będzie krótkim ciągiem dokładnym grup i niech* G *będzie skończenie generowana. Wówczas istnieją metryki długości słowa* d^G, d^H *na* G, H *odpowiednio takie, że funkcja* f *jest* 1*-lipschitzowska i dla dowolnej* m*-wymiarowej funkcji kontroli* D_K *dla* K *funkcja*

$$D_f(r_G, R_H) = D_K(r_G + 2R_H) + 2R_H$$

jest m*-wymiarową funkcją kontroli dla* f*.*

Dowód. Niech S będzie skończonym i symetrycznym zbiorem generatorów G. Niech d^G będzie metryką długości słowa indukowaną przez S, a d^H metryką długości słowa indukowaną przez $f(S)$. W tej sytuacji f jest oczywiście 1-lipschitzowska.

Niech $B = \overline{B}(1_H, R_H)$ i $A = f^{-1}(B)$. Zauważmy, że $A \subseteq \overline{N}_{R_H}(K)$. Faktycznie, gdy $d^H(f(a), 1_H) = l \leqslant R_H$, to $f(a) = \prod_{i=1}^{l} f(s_i)$, dla pewnych $s_i \in S$. Zatem $f(a) = f(\prod s_i)$, więc $a = l \cdot \prod s_i$ dla pewnego $k \in K = \ker f$, a więc $d^G(k \cdot \prod s_i,\ k) = d^G(\prod s_i,\ 1_G) \leqslant R_H$.

Z lematu 4.19 funkcja $D_f(\ \cdot\ , R^H)$ dana wzorem $D_f(r_G, R^H) = D_K(r_G + 2R_H) + 2R_H$ jest m-wymiarową funkcją kontroli dla $\overline{N}_{R_H}(K)$. Ponieważ wszystkie zbiory $f^{-1}\Big(\overline{B}(\ \cdot\ , R_H)\Big)$ są izometryczne, więc $D_f(\ \cdot\ , R_H)$ jest funkcją kontroli dla nich wszystkich i $D_f(\cdot, \cdot)$ jest funkcją kontroli dla f. □

Wniosek 4.34. *Niech* $1 \to K \to G \xrightarrow{f} H \to 1$ *będzie krótkim ciągiem dokładnym grup i niech* G *będzie skończenie generowana. Wówczas:*

$$\operatorname{asdim}_{\mathrm{AN}}(G, d^G) \leqslant \operatorname{asdim}_{\mathrm{AN}}(K, d^G_{|K}) + \operatorname{asdim}_{\mathrm{AN}}(H, d^H)$$

dla dowolnych metryk długości słowa d^G, d^H *na* G, H *odpowiednio.*

Dowód. Twierdzenie wystarczy udowodnić dla dowolnych metryk długości słowa, ponieważ wszystkie są quasi-izometryczne (1.33), a więc dają ten sam wymiar asymptotyczny Assouada-Nagaty (3.16). Ustalmy więc metryki jak w lemacie: ($k = \operatorname{asdim}_{\mathrm{AN}} K$)-wymiarowa funkcja kontroli dla K jest afiniczna, a zatem k-wymiarowa funkcja kontroli D_f z lematu jest afiniczna, czyli możemy użyć twierdzenia Hurewicza 4.31. □

Nieco inny charakter ma kolejny wniosek z twierdzenia Hurewicza. Zacznijmy od krótkiej definicji.

Definicja 4.35. *Niech grupa* G *działa na przestrzeni metrycznej* X*. R-stabilizatorem punktu* $x_0 \in X$ *nazywamy zbiór* $W_R(x_0) = \{\gamma \in G \mid d(\gamma x_0, x_0) \leqslant R\}$*.*

Twierdzenie 4.36. *Niech* G *będzie skończenie generowaną grupą działającą przez izometrie na* X *i niech* $\operatorname{asdim}_{\mathrm{AN}} X < \infty$*. Ustalmy punkt* x_0*. Jeśli istnieją stałe* $a, b, c > 0, k \in \mathbb{N}$ *takie, że* $D_{W_R}(r) = a \cdot r + b \cdot R + c$ *jest* k*-wymiarową funkcją kontroli dla dowolnego* R*-stabilizatora* W_R *punktu* x_0*, to:*

$$\operatorname{asdim}_{\mathrm{AN}} G \leqslant k + \operatorname{asdim}_{\mathrm{AN}} X.$$

Dowód. Niech S będzie skończonym i symtrycznym zbiorem generatorów G wyznaczającym metrykę na G. Niech $L = \max\{d^X(sx_0, x_0) \mid s \in S\}$. Zdefiniujmy $\pi : G \to X$ wzorem $\pi(\gamma) = \gamma x_0$. Zauważmy, że jeżeli $l = d^G(g,h) = d^G(1, g^{-1}h)$, to $g^{-1}h = \prod_{i=1}^{l} s_i$, gdzie $s_i \in S$, zatem:

$$d^X(\pi(g), \pi(h)) = d^X(gx_0, hx_0) \xlongequal[\text{izometrią}]{g^{-1}\text{ jest}} d^X(x_0, g^{-1}hx_0) = d^X\Big(x_0, \prod s_i \cdot x_0\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{l-1} d^X\left(\prod_{i=1}^{j} s_i \cdot x_0,\ \prod_{i=1}^{j+1} s_i \cdot x_0\right) \xlongequal{\text{jw.}} \sum_{j=0}^{l-1} d^X\Big(x_0,\ s_{j+1} \cdot x_0\Big) \leqslant l \cdot L = d^G(g,h) \cdot L,$$

czyli π jest L-lipschitzowska. Mamy $\pi^{-1}\Big(\overline{B}(x_0, R)\Big) = W_R(x_0)$ a więc również $\pi^{-1}\Big(\overline{B}(gx_0, R)\Big) = gW_R(x_0)$, czyli wszystkie te zbiory są izometryczne, a więc D_{W_R} jest funkcją kontroli dla nich wszystkich. Zatem D_π dane wzorem $D_\pi(r_G, R_X) = D_{W_{R_X}}(r_G) = a \cdot r_G + b \cdot R_X + c$ jest afiniczną k-wymiarową funkcją kontroli dla π i twierdzenie Hurewicza 4.31 kończy dowód. □

Rozdział 5

Podsumowanie

Praca konfrontuje geometrię zgrubną opartą o zgrubne równoważności i ich niezmienniki z teorią, u której podstawy leżą quasi-izometrie. Wiele naturalnych własności niezmienniczych względem quasi-izometrii (a więc charakteryzujących na przykład grupy skończenie generowane z dowolnie obraną metryką długości słowa) okazuje się być istotnie zmiennymi w ramach klasy przestrzeni zgrubnie równoważnych. W szczególności dla przestrzeni o ustalonym wymiarze asymptotycznym n i dowolnie szybko rosnącej funkcji kontroli istnieje zgrubnie równoważna hiperboliczna przestrzeń o afinicznej funkcji kontroli, a więc o asymptotycznym wymiarze Assouada-Nagaty równym n.

Ponadto prezentujemy pewne uniwersalne fakty dotyczące teorii wymiaru (asdim, $\mathrm{asdim}_{\mathrm{AN}}$, $\dim_{\mathrm{AN}}$), jak twierdzenie ograniczające wymiar produktu przez sumę wymiarów czynników oraz twierdzenie typu Hurewicza. Twierdzenia te prezentowane są przy słabych założeniach i z eleganckimi dowodami, które są owocem wieloletniego rozwoju dziedziny.

Bibliografia

[BD05] Greg Bell, Alexander Dranishnikov, *Asymptotic dimension in Będlewo*, Preprint, arXiv:math/0507570v2 [math.GR] (2005)

[BD07] __________________, *Asymptotic Dimension*, Preprint, arXiv:math/0703766v2 [math.GT] (2007)

[BDLM] N. Brodskiy, J. Dydak, M. Levin, A. Mitra, *Hurewicz Theorem for Assouad-Nagata dimension*, Preprint, arXiv:math/0605416v2 [math.MG] (2006)

[BDLM2] N. Brodskiy, J. Dydak, J. Higes, A. Mitra, *Nagata-Assouad dimension via Lipschitz extensions*, Preprint, arXiv.org:math.MG/0601226 (2006)

[BuLe] S. Buyalo, N. Lebedeva, Dimension of locally and asymptotically self-similar spaces., Preprint, arXiv.org:math.GT/0509433 (2005)

[Dr00] Alexander N. Dranishnikov, *Asymptotic topology*, Uspekhi Mat. Nauk, 55:6(336) (2000), 71–116 [Tłumaczenie angielskie: *Asymptotic topology*, Russian Mathematical Surveys, 2000, 55:6, 1085-1129]

[Dr04] __________________, *Groups with a polynomial dimension growth*, Preprint, arXiv:math/0405239v1 [math.MG] (2004)

[Dr06] __________________, *Cohomological approach to asymptotic dimension*, Preprint, arXiv:math/0608215 [math.MG] (2006)

[DSm6] Alexander Dranishnikov, Justin Smith, *On asymptotic Assouad-Nagata dimension*, Topology and its Applications, Volume 154, Issue 4, 15 February 2007, 934–952

[DS10] Alexander Dranishnikov, Mark Sapir, *On the dimension growth of groups*, Preprint, arXiv:1008.3868v3 [math.GR] (2010)

[DZ04] Alexander Dranishnikov, Michael Zarichnyi, *Universal spaces for asymptotic dimension*, Topology and its Applications, 140 (2004), no. 2-3, 203–225. MR MR2074917 (2005e:54032)

[Gr93] Mikhail Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups, Geometric group theory,* Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, ISBN 0-521-44680-5 (1993), 1–295

[NY12] Piotr Nowak, Guoliang Yu, *Large Scale Geometry*, EMS publishing house, w przygotowaniu, http://www.mimuw.edu.pl/~pnowak/index/book_files/BOOK_ETB.pdf (dostęp 20.05.2012) (2012)

[Ra05] Taras Radul, *Addition and subspace theorems for asymptotic large inductive dimension*, Preprint, arXiv:math/0507242v1 [math.GN] (2005)

[Ra06] __________, *On transfinite extension of asymptotic dimension*, Preprint, arXiv:math/0601235v1 [math.GN] (2006)

[Ro03] John Roe, *Lectures on coarse geometry,* University Lecture Series, vol. 31, AMS (2003)

[Sm05] Justin Smith, *On asymptotic dimension of countable abelian groups*, Preprint, arXiv:math/0504447v1 [math.GR] (2005)

[Yu98] Guoliang Yu, *The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension*, Ann. of Math 147, nr 2 (1998), 325-355

[Yu00] ___________, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Inventiones Mathematicae 139 (2000), 201-240

[CSY8] Stanley S. Chang, Steve Ferry, Guoliang Yu, *Bounded rigidity of manifolds and asymptotic dimension growth*, Journal of K-theory: K-theory and its Applications to Algebra, Geometry, and Topology, 1 (2008), 129-144