Rozwiązanie zadania 8. (A) U jest otwarty jako przeciwobraz $(-\infty, 0)$ przy ciągłej funkcji $d_A - d_B$. Dla $a \in A$ mamy oczywiście $d_A(a) = 0$ oraz $d_B(a) > 0$, ponieważ $a \notin \mathrm{cl}(B)$ (a więc $B(a,\varepsilon) \cap \mathrm{cl}(B) = \emptyset$), czyli $A \subseteq U$.

Niech $V = \{x \in X \mid d_A(x) > d_B(x)\}$. Tak jak powyżej pokazujemy, że $B \subseteq V$. Oczywiście $U \cap V = \emptyset$, więc z otwartości V wnosimy $\emptyset = \mathrm{cl}(U) \cap V \supseteq \mathrm{cl}(U) \cap B$.

(B) $\Longrightarrow$ Gdyby istniał otwarty zbiór U jak w treści zadania taki, którego brzeg ∂U jest rozłączny z S, to $\mathrm{cl}_S(U \cap S) \subseteq \mathrm{cl}(U) \cap S = (U \cup \partial U) \cap S = U \cap S$, czyli zbiór $U \cap S$ jest otwarto-domknięty w S, zaprzeczając spójności S (bo z założenia $U \cap S \neq \emptyset \neq (X \setminus U) \cap S$).

$\Longleftarrow$ Załóżmy nie wprost, że istnieje nietrywialny rozkład S na relatywnie domknięte podzbiory A, B. Ponieważ $\mathrm{cl}_S(A) = \mathrm{cl}(A) \cap S$, więc mamy: $\emptyset = A \cap B = \mathrm{cl}_S(A) \cap B = \mathrm{cl}(A) \cap S \cap B = \mathrm{cl}(A) \cap B$ oraz symetrycznie $A \cap \mathrm{cl}(B) = \emptyset$. (Można też powołać się na Uwagę 2b) z pierwszego paragrafu poświęconego spójności w skrypcie.)

Zbiory A, B spełniają więc założenia punktu (A), czyli istnieje zbiór $U \in \tau_X$ spełniający $A \subseteq U$ oraz $B \subseteq X \setminus \mathrm{cl}(U)$, czyli S przecina U oraz $X \setminus U$ a ponadto $S \subseteq U \cup (X \setminus \mathrm{cl}(U))$, czyli $S \cap \partial U = \emptyset$, sprzeczność. $\square$

Łaskawej uwadze osób, które twierdziły, że ∂U z części (A) jest *równy* zbiorowi tych punktów x, dla których $d_A(x) = d_B(x)$ polecam następujący podzbiór X prostej rzeczywistej ze standardową metryką $X = \{-1, 0, 1\}$ oraz jego podzbiory $A = \{-1\}$, $B = \{1\}$.

Proszę też zauważyć, że podpunkt (B) zadania nie jest prawdziwy (implikacja $\Longleftarrow$) dla dowolnej przestrzeni topologicznej X (żeby nie odbierać Państwu przyjemności, napiszę tylko, że istnieje kontrprzykład, gdzie X składa się z 3 punktów). Tym samym surowo traktowałem rozwiązania, w których (bez powoływania się na metrykę) było na przykład napisane, że niespójny podzbiór $S \subseteq X$ można nietrywialnie rozłożyć na ślady *rozłącznych* otwartych podzbiorów X.

Skoro już o ocenach, to przypomnę, że przedmiotem oceny jest również redakcja rozwiązania. Istotnym elementem dobrego stylu jest zwięzłość (proszę spojrzeć na „wzorcówki"). Zdania rozpoczynamy wielką literą, kończymy kropką, a jeśli już zdanie musi ciągnąć się przez pół strony, to na pewno będzie mu lżej, gdy zostanie przyozdobione znakami interpunkcyjnymi.