PDEs I: Tutorial 10.

13.05.2021

Zadanie C5 / PS B2.

klasyczna obserwacja:

u' istnieje $\Rightarrow$ u jest ciągła

(AM I)

(u staje się lepsza)

$$\boxed{u \in W^{1,p} \Rightarrow u \text{ jest nie tylko w } L^p}$$

$u \in W^{1,p} \implies u$ jest nie tylko w L^p

My pokażemy:

$u \in W^{1,p}(0,1) \implies u$ ma ciągłego reprezentanta

$1 < p < \infty$

(" u jest ciągła ")

Rozwiązanie tego zadania to przykład arg.

$\boxed{\text{wskazywanie ciągłego reprezentanta}}$

TO JEST WAŻNE!

(1) u jest gładka na $[0,1]$ to

$$|u(x)-u(y)| \leq \|u'\|_p \, |x-y|^{1-1/p}.$$

Dowód:

$$\int_x^y u'(z)\,dz = u(y)-u(x)$$

$$|u(x)-u(y)| \leq \int_x^y |u'(z)|\,dz \leq$$

$$\leq \int_0^1 |u'(z)| \, \mathbb{1}_{[x,y]}(z)\,dz \leq$$

$$\leq \int_0^1 |u'(z)| \, \mathbb{1}_{[x,y]}(z) \, dz \leq$$

$$\leq \|u'\|_p \left(\int_0^1 \underbrace{\mathbb{1}_{[x,y]}^{p'}}_{1} \right)^{1/p'} \qquad 1/p' = 1 - 1/p$$

$$\leq \|u'\|_p \, |x-y|^{1-1/p}$$

$\square$.

① u jest gładka na $[0,1]$ to

$$|u(x)-u(y)| \leq \|u'\|_p \, |x-y|^{1-1/p}.$$

② u jest w $W^{1,p}(0,1)$ to dla p.w. $x,y \in (0,1)$

$$|u(x)-u(y)| \leq \|u'\|_p \, |x-y|^{1-1/p}$$

Dowód: $\exists\, u_n \in C^\infty([0,1])$ $\quad u_n \to u$ p.w.,

$u_n \to u$ w $L^p(0,1)$

$u_n' \to u'$ w $L^p(0,1)$

(2) u jest w $W^{1,p}(0,1)$ to dla p.w. $x,y \in [0,$

$$|u(x)-u(y)| \leq \|u'\|_p \, |x-y|^{1-1/p}$$

Dowód: $\exists\, u_n \in C^\infty([0,1])$ $\quad u_n \to u$ p.w.,

$u_n \to u$ w $L^p(0,1)$

$u_n' \to u'$ w $L^p(0,1)$

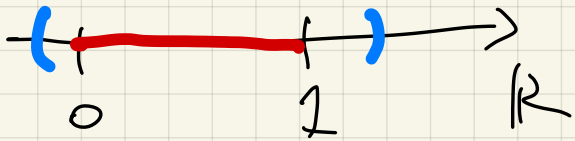
Z kroku 1 $\quad |u_n(x)-u_n(y)| \leq \|u_n'\|_p \, |x-y|^{1-1/p}$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$|u(x)-u(y)| \qquad \|u'\|_p \, |x-y|^{1-1/p},$$

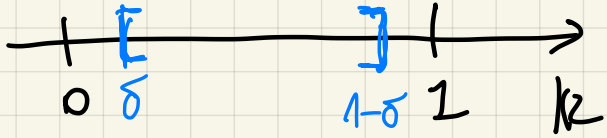
③ Wskazać ciąg funkcji ciągłych $\{u^n\}$ zbieżnych jednostajnie takich, że $\lim_{n\to\infty} u^n(x) = u(x)$ p.w.

u jest zdef. na $[0,1]$



ale rozp. u na $[\delta, 1-\delta]$

$\delta > 0$



$u^\varepsilon = u * \eta_\varepsilon$ $\left(\begin{array}{c}\text{dla} \\ 0<\varepsilon<\delta/4\end{array}\right)$ (problem ze zdefiniowaniem splotu),

$\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ spełnia zał. tw. A-A:

- $\exists_C \quad |u^\varepsilon(x)| \leq C$ niezal. od x, ε. ✓
- $|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \leq \|u'\|_p \, |x-y|^{1-1/p}$.

$$u^\varepsilon = u * \eta_\varepsilon$$

$$|u^\varepsilon(x)| = \left| \int_{[0,1]} u(y)\, \eta_\varepsilon(x-y)\, dy \right| \leq \|u\|_\infty \underbrace{\int_{[0,1]} \eta_\varepsilon(x-y)\, dy}_{=1}.$$

$$u^\varepsilon = u * \eta_\varepsilon$$

$$|u^\varepsilon(x)| = \left| \int_{[0,1]} u(y)\, \eta_\varepsilon(x-y)\, dy \right| \leq \|u\|_\infty \underbrace{\int_{[0,1]} \eta_\varepsilon(x-y)\, dy}_{=1.}$$

dlaczego to jest ok?

$$u \in W^{1,p}(0,1)$$

p.w. $x,y \in (0,1)$ $\quad |u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_p \underbrace{|x-y|^{1-1/p'}}_{\leq 1} \leq \|u'\|_p$

$$|u(x)| \leq |u(x_0)| + |u(x) - u(x_0)| \leq$$
$$\leq |u(x_0)| + \|u'\|_p.$$

- $|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \leq \|u'\|_p \, |x-y|^{1-1/p}.$

$$\left| u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y) \right| = \left| \int_{B(0,\varepsilon)} u(x-z)\, \eta^\varepsilon(z)\, dz - \int_{B(0,\varepsilon)} u(y-z)\, \underbrace{\eta^\varepsilon(z)}_{\text{ma nosnik } B(0,\varepsilon)}\, dz \right|$$

$$\leq \int |u(x-z) - u(y-z)|\, \eta^\varepsilon(z)\, dz \leq$$

$$\leq \|u'\|_p \, |x-y|^{1-1/p} \underbrace{\int \eta^\varepsilon(z)\, dz}_{=1.} \qquad \square.$$

$\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ spełnia zał. tw. A-A : u^ε był zdef. na $[\delta, 1-\delta]$

- $\exists_C \quad |u^\varepsilon(x)| \leq C$ niezal. od x, ε.
- $|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \leq \|u'\|_p \, |x-y|^{1-1/p}$.

4 Pokazać, że u ma ciągłego reprezentanta $\tilde{u}$ i ponadto

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \|u'\|_p \, |x-y|^{1-1/p}$$

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(z)\,dz \qquad \forall_{x,y \in (0,1)}.$$

$\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ spełnia A-A $\Rightarrow$ $\exists$ podciąg zbieżny

w $C[\delta, 1-\delta]$

$\delta = \frac{1}{100}$

$\delta = \frac{1}{1000}$

$$u^\varepsilon \rightrightarrows \tilde{u} \quad \text{na } [\delta, 1-\delta].$$

$$u^\varepsilon \to u \quad \text{p.w. na } [\delta, 1-\delta].$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{u} = u \quad \text{p.w. na } [\delta, 1-\delta].$$

z dowolności δ dostajemy to na $(0,1)$.

MINI-CEL:

$$\boxed{\begin{aligned} &|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \|u'\|_p |x-y|^{1-1/p} \\ &\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_{\cancel{x}\,y}^{\cancel{y}\,x} u'(z)\,dz \end{aligned}}$$

$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \leq \|u'\|_p |x-y|^{1-1/p}$$

przechodzimy do granicy

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \|u'\|_p |x-y|^{1-1/p}$$

dla u^ε: $\quad u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y) = \boxed{\int_y^x (u^\varepsilon)'(z)\,dz}$

znajdujemy δ ze $x, y \in [\delta, 1-\delta]$.

$$u^\varepsilon(x) \longrightarrow \tilde{u}(x)$$
$$u^\varepsilon(y) \longrightarrow \tilde{u}(y)$$

Było: $\quad (u * \eta_\varepsilon)' \underset{\text{AM II}}{=} u * \eta_\varepsilon' = u' * \eta_\varepsilon = (u')^\varepsilon$

to wybraliśmy ostatnie

$$\int_x^y (u^\varepsilon)'(z)\,dz = \int_x^y (u')^\varepsilon(z)\,dz$$

$$u' \in L^p(0,1)$$

$$\Rightarrow (u')^\varepsilon \to u' \quad w \; L^p(0,1) \qquad (AF)$$

$$\Rightarrow (u')^\varepsilon \to u' \quad w \; L^1(0,1)$$

$$\Rightarrow \int (u')^\varepsilon \to \int u' \quad \Big| \quad \left| \int (u')^\varepsilon - u \right| \leq$$

$$\leq \|u' - u\|_1 .$$

$$\boxed{\begin{aligned} |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| &\leq \|u'\|_p |x-y|^{1-1/p} \\ \tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) &= \int_y^x u'(z)\,dz \end{aligned}}$$

Mamy ciągłego repr. na $(0,1)$.

Co zrobić w 0 i w 1?

Jak $x_n \to 0 \Rightarrow \{\tilde{u}(x_n)\}_{n\geq 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego $|\tilde{u}(x_n) - \tilde{u}(x_m)| \leq \|u'\|_p |x_n - x_m|^{1-1/p}$,

$\Rightarrow \{\tilde{u}(x_n)\}_{k\geq 1}$ ma granicę

Kładziemy $\tilde{u}(0) = \lim_{n\to\infty} \tilde{u}(x_n)$

<u>Na Topologii</u> u jest jednostajnie ciągła na X to istnieje dokł. jedno przedłużenie do funkcji podn. ciągłej na $\overline{X}$.

$(X \subset Y,\ Y$ jest zupełna$)$

Gdzie korzystaliśmy z wymiaru 1?

Na wykł. we wtorek uogólnienie na wiele wym.

(nierówność Morreya)

To w 1D: $|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_p \, |x-y|^{1-1/p}$.

jak to już mamy to reszta argumentacji analogiczna.

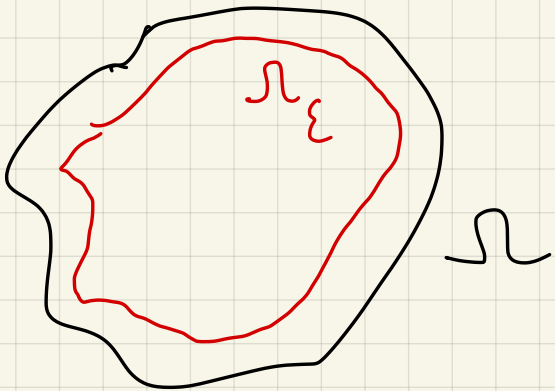
Jesteśmy w PS B3.

(A2) $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $Du = 0$ p.w. na Ω

$\Rightarrow$ u jest stała p.w.

Dowód:

$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \delta\}$.



$u * \eta_\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \delta/4$.

$u * \eta_\varepsilon, \; 0 < \varepsilon < \delta/4.$

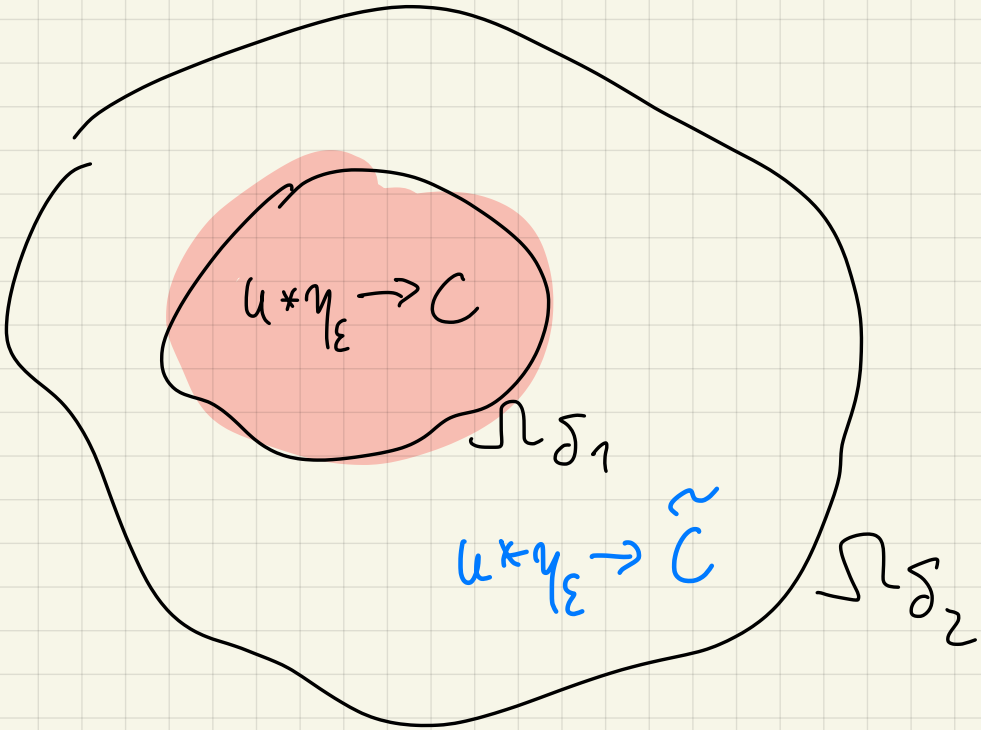
$$D(u * \eta_\varepsilon) = Du * \eta_\varepsilon = 0 \quad \text{p.w. dla } x \in \Omega_\delta.$$

$$\Rightarrow \underbrace{u * \eta_\varepsilon}_{\downarrow \; u \text{ p.w.}} = \underbrace{C_\varepsilon}_{\downarrow \; C} \quad \text{dla } x \in \Omega_\delta$$

$$\Rightarrow u = C \quad \text{p.w. na } \Omega_\delta.$$

Mamy ciąg $\{C_\varepsilon\}$ który jest zbieżny do jakiegoś C.

$u = C$ p.v. na Ω_δ.



$\Rightarrow \quad C = \tilde{C}.$

$\square.$

A3

$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$: $\exists (u_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$

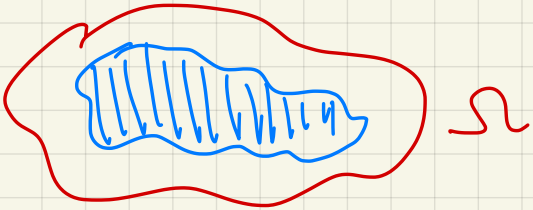
$u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$

$u \in W^{1,p}(\Omega)$: $\exists (u_n) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$

$u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$

$u \in L^p(\Omega)$: $\exists (u_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$

$u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$



(AF)

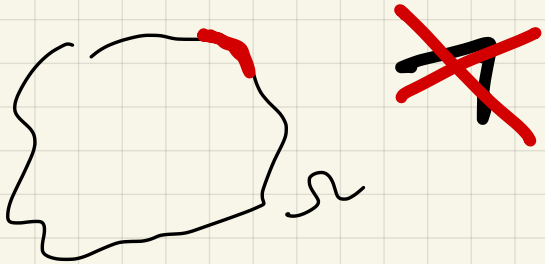
Twierdzenie o przedłużeniu:

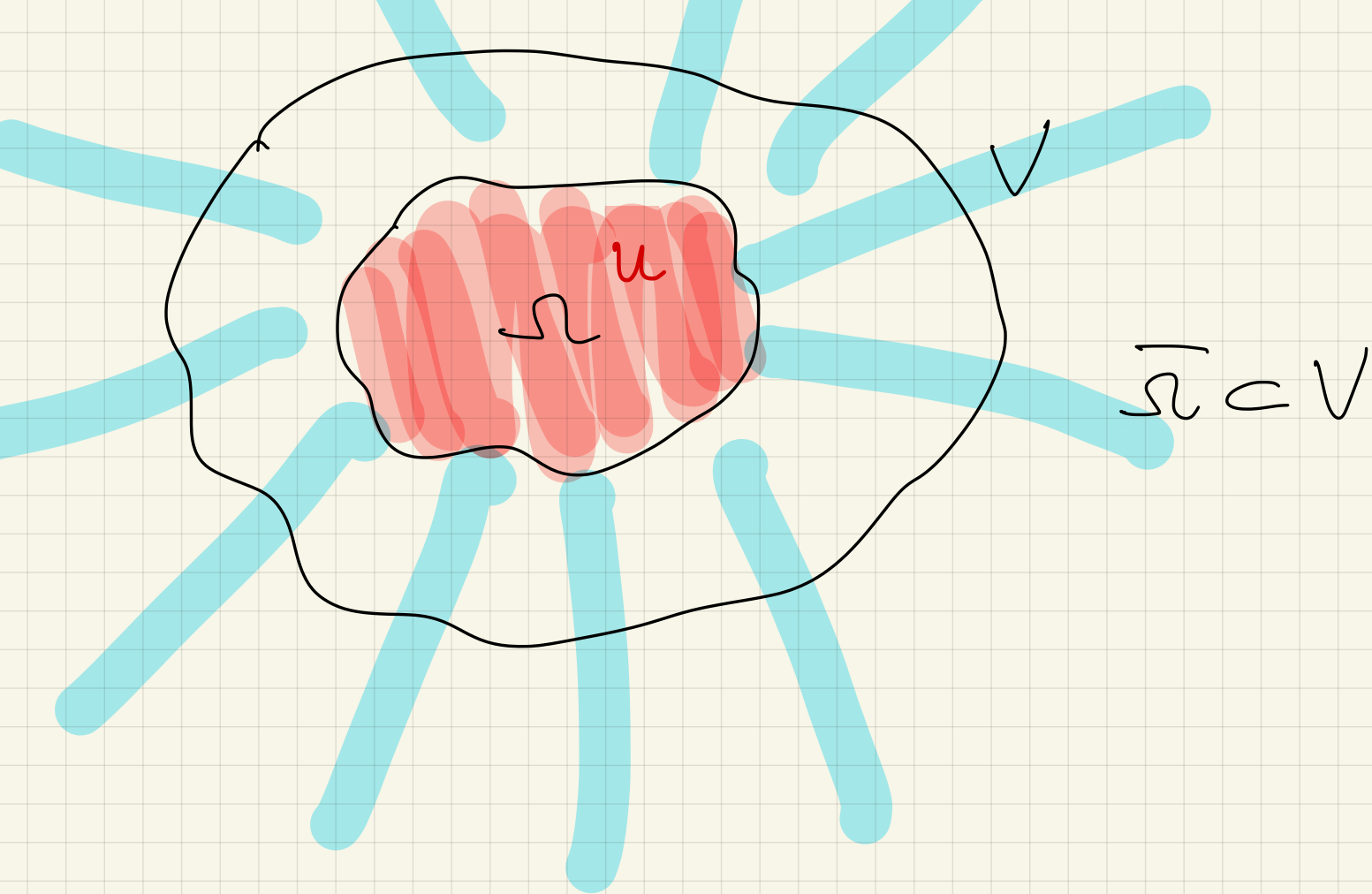
$1 \leq p \leq \infty$, Ω jest ogr., $\partial\Omega$ jest C^1.

Wybieramy V takie, że Ω jest zwarto zawarte w V. Wówczas istnieje ograniczony operator

$$E: W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

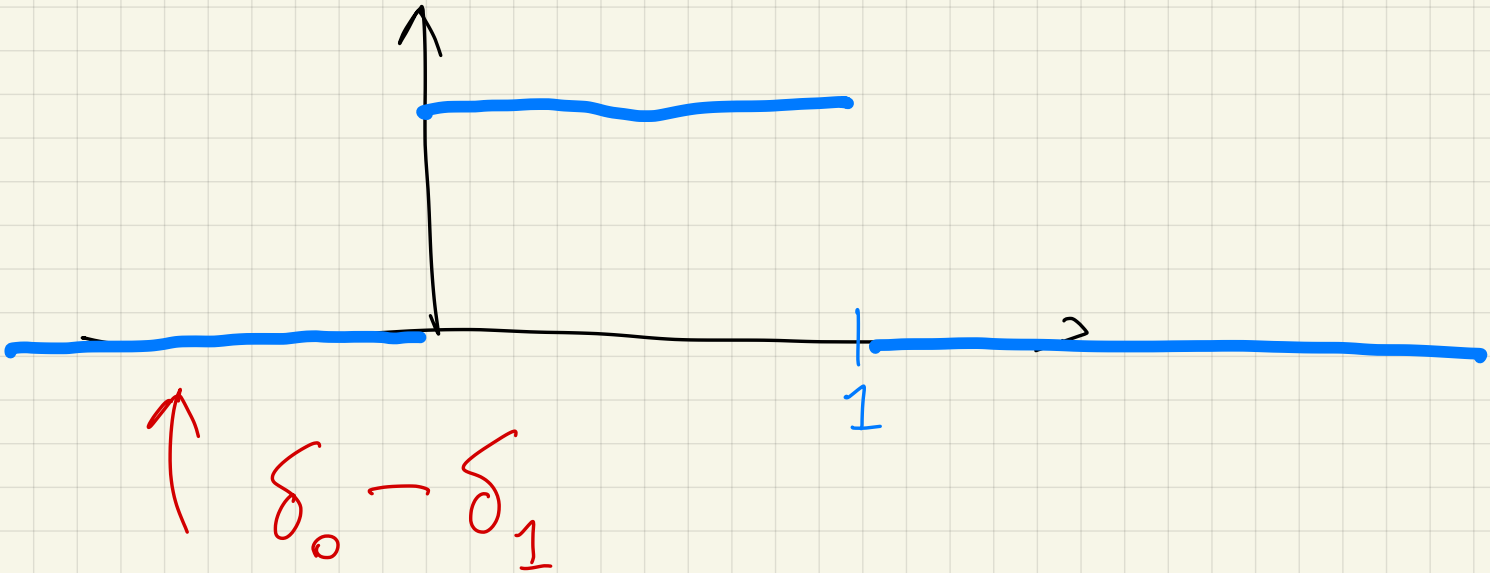
taki że $Eu = u$ na Ω, Eu ma zwarty nośnik w V.

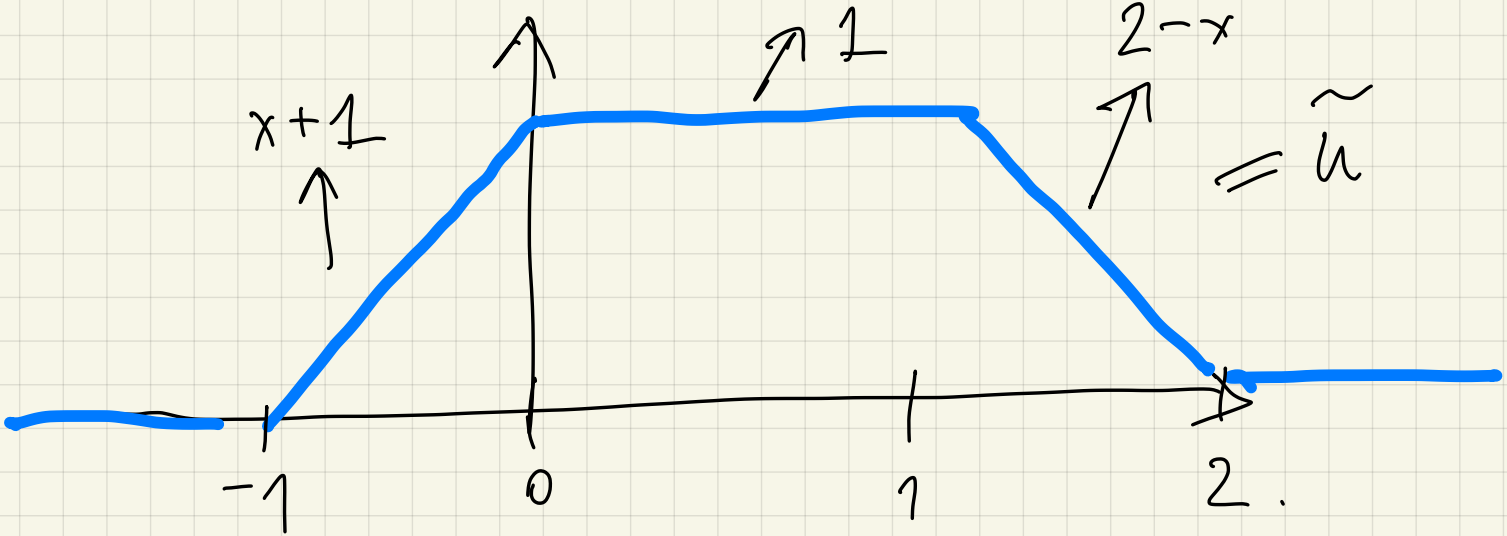



V
u
Ω
$\bar{\Omega} \subset V$

B1 $u = \mathbb{1}_{[0,1]} \in W^{1,1}(0,1)$

Chcemy przedłużyć do $W^{1,1}(\mathbb{R})$.





$$(\tilde{u})' = \begin{cases} 0 & (-\infty, -1) \\ 1 & (-1, 0) \\ 0 & (0, 1) \\ -1 & (1, 2) \\ 0 & (2, \infty) \end{cases}$$

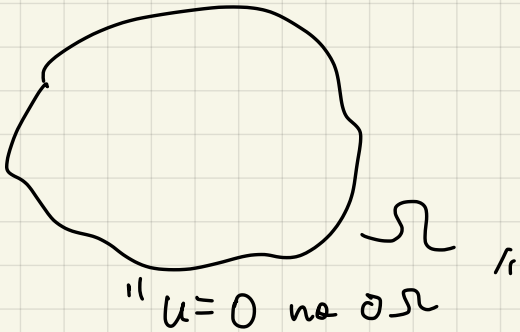
(kandydat na $\tilde{u}'$).

Powinniśmy sprawdzić $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\int \tilde{u}\, \varphi' = -\int \tilde{u}'\, \varphi.$$

(rachunek w notatkach).

B2 $\Uparrow$



$$u \in \underbrace{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

! Twierdzenie o śladzie

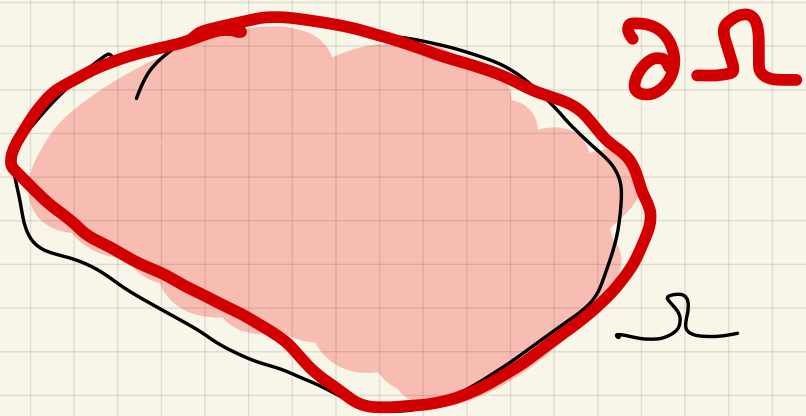
$1 \leq p < \infty$, Ω jest ogr, $\partial\Omega$ jest C^1

Wówczas istnieje operator T ograniczony

Ślad $T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$

taki, że $Tu = u|_{\partial\Omega}$ dla wszystkich u

ciągłych na $\overline{\Omega}$



<u>Problem</u>: $\partial\Omega$ jest zbiorem miary 0.

$$L^p(\partial\Omega) = \left\{ f \text{ mierzalne wzgl. miary pow: } \int_{\partial\Omega} |f|^p \, d\sigma < \infty \right\}.$$

(C2) Ślad $T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$

istnieje na $W^{1,p}(\Omega)$

takiego operatora nie ma na $L^p(\Omega)$.

ciągłego

- $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}$

  T jest ciągły ...

- $Tu = u|_{\partial\Omega}$ $\quad u \in C(\overline{\Omega})$.

Niech $u \in L^p(\Omega)$. Istnieje $(u_n)_{n\geq 1} \subset C_c^\infty(\Omega)$ taki że $u_n \to u$ w $L^p(\Omega)$.

$$Tu_n = 0$$

$$\|Tu\| \leq \underbrace{\|T(u_n - u)\|}_{\leq \|T\| \, \|u_n - u\| \to 0} + \overset{0}{\cancel{\|Tu_n\|}}$$

$$\Rightarrow Tu = 0 \quad \forall u \in L^p(\Omega)$$

$u = 1 \in L^p(\Omega)$

Sprzeczność bo Tu powinno być stałe 1 a jest 0 wg naszego rachunku.

(Samo L^p nie wystarcza).

(C3) $1 < p < \infty$

Istnieje ciągły $\varphi : W^{1,p}(0,1) \to \mathbb{R}$ taki, że

$\varphi(u) = u(0)$. "jednowymiarowy ślad"

Gdy $u \in C([0,1])$.

Każde $u \in W^{1,p}(0,1)$ ma ciągłego reprezentanta

$\tilde{u} \in C([0,1])$.

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(0) = \int_0^x u'(z)\,dz.$$

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(0) = \int_0^x u'(z)\,dz.$$

$$|\tilde{u}(0)| \leq |\tilde{u}(x)| + \int_0^x |u'(z)|\,dz$$

Możemy wzięć. $\varphi(u) = \tilde{u}(0)$.

$$\underbrace{|\varphi(u)|}_{\text{nie zal. od } x} \leq |\tilde{u}(x)| + \int_0^x |u'(z)|\,dz \qquad \forall_x$$

$$|\varphi(u)| = \int_0^1 |\varphi(u)|\,dx \leq \int_0^1 |\tilde{u}(x)|\,dx + \int_0^1 \int_0^x |u'(z)|\,dz$$

$$\int_0^1 |\tilde{u}(x)|\,dx + \int_0^1 \int_0^x |u'(z)|\,dz \leq$$

$$\leq \|\tilde{u}\|_p + \int_0^1 \int_0^1 |u'(z)|\,dz \leq$$

$$\leq \|\tilde{u}\|_p + \|u'\|_1 \leq$$

$$\leq \underbrace{\|\tilde{u}\|_p}_{\substack{\| \\ \|u\|_p}} + \|u'\|_p = \|u\|_{W^{1,p}(0,1)}.$$

$\tilde{u} = u$ p.w.

$\square$.

Widzimy się w piątek

16 – 18 :

[za tydzień].