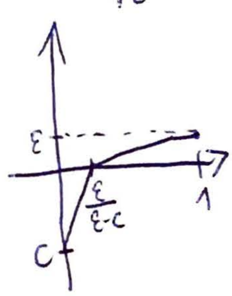
Szymon Zwara sz383558

P4*

1. Ustalmy $\varphi \in X^*$. Z zadania H3 wynika, że $\exists \Psi \in X^{**}$ $\Psi(\varphi) = \|\varphi\|^2$ i $\|\Psi\| = \|\varphi\|$.
Z tego, że $X \cong X^{**}$ wynika, że $\exists x \in X$ $\widetilde{\Psi} = x^*$, tj. $\varphi(x) = \|\varphi\|^2$ oraz $\|x\| = \|\varphi\|$, skąd mamy, że $\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|\varphi\|$, gdzie $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, więc $\frac{x}{\|x\|}$ jest szukanym punktem.

2. Z H10 dostajemy $\varphi \in X^*$ t. że $\varphi \neq 0$, $\|\varphi\| = 1$, $\varphi|_M = 0$. Z powyższego podpunktu mamy, że $\exists x \in X : \|x\| = 1$ i $\varphi(x) = \|\varphi\| = 1$. Zauważmy, że
$\forall m \in M$ $\|x - m\| \geq \frac{\varphi(x-m)}{\|\varphi\|} = \frac{\varphi(x) - \varphi(m)}{1} = \frac{1-0}{1} = 1$, więc $\operatorname{dist}(x, M) \geq 1$, ale $0 \in M$, więc $\operatorname{dist}(x, M) \leq \|x - 0\| = \|x\| = 1$. Stąd $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.

3. Ustalmy $u \in X$. Pokażemy, że $d(u, M) = \left|\int_0^1 u(x)dx\right|$. Po pierwsze
$\forall m \in M$ $\|u - m\|_\infty \geq \int_0^1 |u - m| \geq \left|\int_0^1 (u(x) - m(x))dx\right| = \left|\int_0^1 u(x)\,dx\right|$, bo $m \in M = \ker \varphi$, więc $d(u, M) \geq \left|\int_0^1 u\right|$.
Jeśli $\int_0^1 u(x)dx = 0$, to $u \in M$, więc $d(u, M) = 0 = \int_0^1 u(x)dx$. Załóżmy więc b.s.o. że $c = \int_0^1 u < 0$.
Ustalmy $\varepsilon > 0$.
Niech f_ε będzie funkcją liniową na odcinkach $[0, \frac{\varepsilon}{\varepsilon - c}]$, $[\frac{\varepsilon}{\varepsilon - c}, 1]$ o wykresie



. Punkty te są tak dobrane, żeby $\int_0^1 f_\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon - c}c + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - c}\right)\varepsilon = 0$.

Niech $u_\varepsilon = u - c + f_\varepsilon$. Wówczas u_ε jest funkcją ciągłą, $u_\varepsilon(0) = u(0) - c + f_\varepsilon(0) = 0 - c + c = 0$,
$\int_0^1 u_\varepsilon = \int_0^1 u - c + \int_0^1 f_\varepsilon = c - c + 0 = 0$, więc $u_\varepsilon \in M$.
Zauważmy, że $u_\varepsilon - u = f_\varepsilon - c$ jest f. nieujemną i rosnącą, więc
$\|u_\varepsilon - u\|_\infty = u_\varepsilon(1) - u(1) = f_\varepsilon(1) - c = \varepsilon - c = \varepsilon + \left|\int_0^1 u\right|$.
$u_\varepsilon \in M$, więc $d(u, M) \leq \|u_\varepsilon - u\|_\infty = \varepsilon + \left|\int_0^1 u\right| \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \left|\int_0^1 u\right|$. Zatem $d(u, M) = \left|\int_0^1 u\right|$.

4. Weźmy dowolny $u \in X$ t. że $\|u\|_\infty = 1$. Wówczas z tego, że $u(0) = 0$ i u jest ciągła wynika, że $\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{x \in [0, \varepsilon]} |u(x)| \leq \frac{1}{2}$. Wobec tego $d(u, M) = \left|\int_0^1 u\right| \leq \int_0^1 |u| = \int_0^\varepsilon |u| + \int_\varepsilon^1 |u| \leq \int_0^\varepsilon \frac{1}{2} + \int_\varepsilon^1 1 = \frac{\varepsilon}{2} + (1 - \varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$. M jest domkniętą, ściśle zawartą podprzestrzenią X, więc w X lemat Riesza nie zachodzi.

Szymon Zwara sz383558

P5.* str. 1/2

Ustalmy $\varepsilon > 0$.

1. Niech $g \in L^2(A)$. Wówczas istnieje funkcja schodkowa $f = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbb{1}_{(a_i, b_i)}$ t.że $\|g-f\|_{L^2(A)} <$

$a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq a_3 < \ldots \leq a_n < b_n$, $\forall_i (a_i, b_i) \subseteq A$. Rozważmy przedział (a_i, b_i). Dla dostatecznie

dużego n dzielimy go na podprzedziały $(a_i, a_i + \frac{1}{n}]$, $(a_i + \frac{1}{n}, a_i + \frac{2}{n})$, $\ldots$, $(a_i + \frac{s-1}{n}, a_i + \frac{s}{n})$, $(a_i + \frac{s}{n},$

gdzie $s = \lfloor n(b_i - a_i) \rfloor$, dzięki czemu długość ostatniego podprzedziału $b_i - (a_i + \frac{s}{n}) \leq b_i - a_i - \frac{n(b_i-a_i)}{n}$

$=$

$$\int_A \mathbb{1}_{(a_i,b_i)} u_n = \int_{a_i}^{b_i} u_n(x)dx = \sum_{k=1}^{s} \int_{a_i + \frac{k-1}{n}}^{a_i + \frac{k}{n}} u(nx)dx + \int_{a_i+\frac{s}{n}}^{b_i} u(nx)dx = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{s} \int_{na_i + (l-1)}^{na_i + l} u(x)dx + \int_{a_i + \frac{s}{n}}^{b_i} u(nx)dx =$$

$$\overset{\text{1-okresowa}}{=} \frac{s}{n} \int_0^1 u + \int_{a_i + \frac{s}{n}}^{b_i} u(nx)dx.$$

Zauważmy, że $\left| \int_{a_i+\frac{s}{n}}^{b_i} u(nx)dx \right| \leq (b_i - (a_i + \frac{s}{n})) \sup|u| \leq \frac{1}{n} \sup|u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ oraz

$$\frac{s}{n} = \frac{\lfloor n(b_i - a_i) \rfloor}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} (b_i - a_i).$$ Wobec tego

$$\int_A \mathbb{1}_{(a_i,b_i)} u_n \longrightarrow (b_i - a_i) \int_0^1 u = \int_A \mathbb{1}_{(a_i,b_i)} \cdot \int_0^1 u.$$

(Zwróćmy uwagę, że korzystamy z tw. Riesza o reprezentacji, które daje nam, że każdy element $L^2(A)$ ma postać $\langle \cdot, v \rangle_A$ dla pewnego $v \in L^2(A)$.)

Zatem $$\int_A f u_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \int_A \mathbb{1}_{(a_i,b_i)} u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{skończona suma}} \sum_{i=1}^{k} c_i \int_A \mathbb{1}_{(a_i,b_i)} \tilde{u} =$$

$$= \int_A f \tilde{u}, \text{ gdzie } \tilde{u} = \int_0^1 u.$$

Stąd $$\left| \int_A g(u_n - \tilde{u}) \right| = \left| \int_A f(u_n - \tilde{u}) + \int_A (g-f)(u_n - \tilde{u}) \right| \leq \left| \int_A f(u_n - \tilde{u}) \right| + \int_A |g-f||u_n - \tilde{u}| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left| \int_A f(u_n-\tilde{u}) \right| + \|g-f\|_{L^2(A)} \cdot \|u_n - \tilde{u}\|_{L^2(A)} \leq$$

$$\leq \left| \int_A f(u_n - \tilde{u}) \right| + \varepsilon \cdot \left(\int_A |u_n - \tilde{u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \overset{\text{ograniczoność } A \text{ i } u}{\leq} \left| \int_A f(u_n - \tilde{u}) \right| + \varepsilon (\lambda(A) (2\sup|u|)^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left| \int_A f(u_n - u) \right| + 2\varepsilon\sqrt{\lambda(A)} \sup|u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\varepsilon\sqrt{\lambda(A)} \sup|u|.$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ wynika, że $\int_A g u_n \to \int_A g \tilde{u}$, czyli $u_n \rightharpoonup \tilde{u} = \int_0^1 u$.

Szymon Zwara sz383558

P5.* str. 2/2

2. Niech $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pokażemy, że a jest afiniczna na $[0,t]$ (jeśli $t>0$) lub $[t,0]$ (jeśli $t<0$). B.s.o. niech $t>0$. Niech ponadto $r \in [0,t]$, oraz u będzie funkcją 1-okresową t. że $u|_{[0,\frac{r}{t}]} \equiv t$, $u|_{(\frac{r}{t},1)} \equiv 0$. Wówczas u spełnia warunki podpunktu 1., a ponadto $(0,1)$ jest otwarty i ograniczony, więc $u_n(x) := u(nx) \rightharpoonup \int_0^1 u = r$.
~~Zatem~~ Ponadto z ciągłości a oraz ograniczoności i 1-okresowości u wynika, że $a(u)$ jest ograniczona (tw. Weierstrassa) i 1-okresowa. Zatem także $a(u_n(x)) = (a(u))(nx) \rightharpoonup \int_0^1 a(u) = \frac{r}{t}a(t) + (1-\frac{r}{t})a(0)$. Z jednoznaczności słabej granicy dostajemy, że $a(r) = \frac{r}{t}a(t) + (1-\frac{r}{t})a(0) \overset{(*)}{=} r\left(\frac{1}{t}a(t) - \frac{1}{t}a(0)\right) + a(0)$, skąd z dowolności $r \in [0,t]$ wynika, że a jest afiniczna na $[0,t]$.
Skoro a jest afiniczna na każdym przedziale $[0,t]$ $(t>0)$ i $[t,0]$ $(t<0)$, to a jest afiniczna na $(-\infty,0]$ i $[0,\infty)$. Zostało pokazać, że te 2 funkcje afiniczne mają te same współczynniki. Biorąc $t=1$ w $(*)$, mamy

$$a(r) = r\,(a(1) - a(0)) + a(0) \quad \text{na } r \in [0,\infty)$$
$$a(r) = r\,(-a(-1) + a(0)) + a(0) \quad \text{na } r \in (-\infty,0].$$

Przeprowadzając to samo rozumowanie, co powyżej, dla funkcji 1-okresowej w t. że $w|_{[0,\frac{1}{2}]} \equiv 1$, $w|_{(\frac{1}{2},1)} \equiv -1$, dostajemy $a(0) = \frac{1}{2}a(1) + \frac{1}{2}a(-1)$, czyli $a(-1) = 2a(0) - a(1)$, skąd $a(r) = r(-a(-1)+a(0)) + a(0) = r(a(1)-a(0)) + a(0)$ na $r \in (-\infty,0]$, więc te współczynniki się zgadzają, czyli a jest afiniczna na $\mathbb{R}$. $\square$

Szymon Żwara 52383558.

P6*

~~możemy założyć, że $0 \notin \{x_1, ...\}$, bo możemy zastąpić 0 jakimś ciągiem zbieżnym do 0~~

1. Pokażemy najpierw, że E^* jest ośrodkowa. Niech $\{x_1, ...\}$ będzie przeliczalnym zbiorem gęstym w E. Z lematu Riesza dla pr. refleksywnej E^* dostajemy, że istnieją $\varphi_1, \varphi_2, ... \in E^*$, t.że $\forall_i \|\varphi_i\| = 1$, $x_i^*(\varphi_i) = \|x_i^*\| = \|x_i\|$.

$\mathrm{lin}_{\mathbb{Q}}\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ jest przeliczalnym podzbiorem gęstym $D = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$, więc wystarczy pokazać, że D jest gęsty w E^*, czyli $\overline{D} = E^*$.

Załóżmy przez sprzeczność, że $\overline{D} \subsetneq E^*$. Wówczas z H10 (PSET6) $\exists x^* \in E^{**}$ t.że $x^* \neq 0$, $\|x^*\| = 1$, $x^*|_D \equiv 0$. Jednocześnie $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_n \|x^* - x_n^*\| < \varepsilon$. Weźmy $\varepsilon < \frac{\|x\|}{2}$. Wtedy (możemy, bo $\|x\| \neq 0$.)

$0 = |x^*(\varphi_n)| \geq |x_n^*(\varphi_n)| - |(x^* - x_n^*)(\varphi_n)| \geq \|x_n\| - \|x^* - x_n^*\| \cdot \|\varphi_n\| =$

$= \|x_n\| - \varepsilon \geq (\|x\| - \varepsilon) - \varepsilon = \|x\| - 2\varepsilon > 0$. ↯

Skoro już wiemy, że E^* jest ośrodkowa, to dalszy dowód idzie analogicznie do zadania W8 (PSET6):

Niech $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ - ośrodek E^*. $(x_n^*(\varphi_i))_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem ogr., więc (z metody przekątniowej) $\exists_{n_k}$ $x_{n_k}^*(\varphi_i)$ zbieżny. Niech $f(\varphi_i) := \lim_{k \to \infty} x_{n_k}^*(\varphi_i)$ $\forall_i$.

Z liniowości $\forall_{\varphi \in \mathrm{span}(\varphi_1, ...)}$ $f(\varphi) = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}^*(\varphi)$. $|f(\varphi)| \leq \sup_k \|x_{n_k}^*\| \|\varphi\| \leq M \cdot \|\varphi\| < \infty$,

więc istnieje przedłużenie f na $\overline{\mathrm{span}(\varphi_1, ...)} = E^*$, ~~czyli~~ jest to x^* dla jakiegoś $x \in E$.

$x^*(\varphi) = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}^*(\varphi)$ $\forall_{\varphi \in \mathrm{span}(\varphi_1, ...)}$. Z ε-argumentu jak w W8 dostajemy, że $x^*(\varphi) = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}^*(\varphi)$ $\forall_{\varphi \in E^*}$, czyli że $\forall_{\varphi \in E^*}$ $\varphi(x_{n_k}) \to \varphi(x)$, czyli $x_{n_k} \rightharpoonup x$. □

2. Z BH4, P2 dostajemy, że epi(F) jest wypukły i domknięty, a zatem z lematu Mazura epi(F) jest słabo domknięty.

Niech $x_n \rightharpoonup x$. Weźmy taki ciąg n_k, że $\lim_{k \to \infty} F(x_{n_k}) = \liminf_{n \to \infty} F(x_n)$.

Wówczas $F(x_{n_k})$ jest zbieżny, więc jest też zbieżny słabo i zatem $(x_{n_k}, F(x_{n_k})) \rightharpoonup (x, c)$. $(x_{n_k}, F(x_{n_k})) \in \mathrm{epi}(F)$, więc ze słabej domkniętości epi(F) mamy, że $(x, c) \in \mathrm{epi}(F)$, czyli $F(x) \leq c = \liminf_{n \to \infty} F(x_n)$. □

3. Niech $(x_n)_{n\geq 1}^{\in A}$ będzie ciągiem wybijającym infimum φ, tj. $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \inf_{x\in A} \varphi(x)$.
A jest ograniczony, więc (x_n) jest ograniczony, więc z pierwszego podpunktu $\exists_{n_k} \exists_{x\in E}\ x_{n_k} \rightharpoonup x$. Ponieważ A jest domknięty i wypukły, to z lematu Mazura jest słabo domknięty, więc $x\in A$. Ponadto z podpunktu 2 wiemy, że $\varphi(x) \leq \liminf_{k\to\infty} \varphi(x_{n_k}) = \inf_{y\in A} \varphi(y)$, więc $\varphi(x) = \inf_{y\in A} \varphi(y)$.

4. Niech R będzie takie, że $\forall_{\substack{x\notin B(0,R)\\ x\in A}} \varphi(x) > \varphi(0)$. Takie R istnieje, bo $\lim_{\substack{\|x\|\to\infty\\ x\in A}} \varphi(x) = \infty$. Zatem $\inf_{x\in A} \varphi(x) = \inf_{x\in A\cap B(0,R)} \varphi(x)$, a zbiór

$A\cap B(0,R)$ jest już ograniczony, więc możemy skorzystać z podpunktu 3.