Jędrzej Stefanowicz 394836

Zadanie (7*)

Przypuśćmy, że $\sigma(A) = \emptyset$.

Ustalmy $x, y \in H$. Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie zadane jako

$$f(\lambda) = \langle (A - \lambda I)^{-1} x, y \rangle.$$

Z naszego założenia wynika, że f jest dobrze określona i ciągła. Ustalmy $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Dla dowolnego $h \in \mathbb{C}$ mamy wówczas:

$$(A - (\lambda_0 + h) I)^{-1} - (A - \lambda_0 I)^{-1} = (A - (\lambda_0+h)I)^{-1} (A - \lambda_0 I)^{-1} (A - \lambda_0 I - [A - (\lambda_0 + h) I])$$

$$= (A - (\lambda_0 + h) I)^{-1} (A - \lambda_0 I)^{-1} \cdot h I \qquad (*),$$

co wynika z przemienności operatorów postaci $(A - \lambda_1 I)$ i $(A - \lambda_2 I)$.

Zastosujmy $(*)$ do obliczenia pochodnej $f'(\lambda_0)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\lambda_0 + h) - f(\lambda_0)}{h} \overset{(*)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\langle (A - (\lambda_0+h)I)^{-1} (A - \lambda_0 I)^{-1} \cdot hI \cdot x, y \rangle}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \langle (A - (\lambda_0 + h) I)^{-1} (A - \lambda_0 I)^{-1} x, y \rangle = \langle (A - \lambda_0 I)^{-2} x, y \rangle.$$

Jako że $(A - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{A}{\lambda} - I \right)^{-1}$, $(A - \lambda I) x \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{(**)} 0$.

Z ciągłości f i powyższego faktu wnioskujemy, że f jest ograniczona, zatem jako funkcja całkowita jest ona stała. Z $(**)$ wynika, że musi być $f \equiv 0$. Z dowolności x, y oznacza to, że

$$\forall_{\lambda \in \mathbb{C}} \ \forall_{x, y \in H} \ \langle (A - \lambda I)^{-1} x, y \rangle = 0$$

Co daje sprzeczność o ile $H \neq \{0\}$.

Zadanie (8*)   Jędrzej Stefanowicz 334836

(a) • Operator $M: L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ $Mf(x) = xf(x)$ nie jest zwarty. Ma ciągłe spektrum $[0,1]$, zatem dla $\lambda \in (0,1]$ $(M-\lambda I)$ nie ma ciągłej odwrotności ale nie istnieje nietrywialne f t. że $(M-\lambda I)f = 0$.

• Operator $T: C[0,1] \to C[0,1]$ $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ jest zwarty. $Tf(0) = 0$, zatem $T(C[0,1]) \neq C[0,1]$. Ponadto $Tf \equiv 0 \iff f \equiv 0$. W takim razie $T - 0I$ nie ma ciągłej odwrotności ani niezerowego w. własnego.

(b) Przypuśćmy odwrotnie że istnieje ciąg $\{c_n\}$ $c_n \to 0$ i ciąg $\{x_n\} \subseteq X$ t. że $\|(A-I)x_n\| < c_n\|x_n\|$

{ Ponieważ $\frac{A}{\lambda}$ także jest zwarty, wystarczy w całym zadaniu rozpatrywać $\lambda = 1$ }

Normując ciąg $\{x_n\}$ otrzymujemy $\{\tilde{x}_n\}$ t. że

$$\|(A-I)\tilde{x}_n\| \xrightarrow[n\to 0]{} 0 \iff$$

$$\|A\tilde{x}_n - \tilde{x}_n\| \to 0 \quad (*)$$

Jako że $\{\tilde{x}_n\}$ jest ograniczony, a A - zwarty, z ciągu $\{A\tilde{x}_n\}$ możemy wybrać podciąg zbieżny $\{A\tilde{x}_{n_k}\}$. Niech

$$A\tilde{x}_{n_k} \to y.$$

Wówczas jednak $(*)$ implikuje że $\tilde{x}_{n_k} \to y$. Z ciągłości A dostajemy $Ay = y$ i $y \neq 0$ bo $\|y\| = \lim_{k\to\infty} \|\tilde{x}_{n_k}\| = 1$. Zatem $(A-I)y = 0$ dla nietrywialnego y. Sprzeczność.

(c) Niech $\{x_n\} \subseteq X$ będzie takim ciągiem że ~~$\{Ax_n\}$ jest zbieżny~~ $\{Ax_n - x_n\}$ jest zbieżny do pewnego $y \in X$. Wówczas ~~jest~~ $\{Ax_n - x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego, zatem z (b) $\{x_n\}$ też jest ciągiem Cauchy'ego. Z ciągłości $(A-I)$,

$$y = (A-I)\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right),$$

zatem $y \in \operatorname{Im}(A-I)$.

(d). Załóżmy że nie zachodzi (A) i $(A-I)$ jest różnowartościowy. Przypuśćmy, że $\operatorname{Im}(A-I) \neq X$. Z (c) ~~wszystkie~~ i twierdzenia o odwzorowaniu otwartym mamy, że ~~$(A-I)$ jest~~ $(A-I)(\operatorname{Im}(A-I))$ jest domkniętą podprzestrzenią $\operatorname{Im}(A-I)$,

$(A-I)(\operatorname{Im}(A-I)) \neq \operatorname{Im}(A-I)$, bo wtedy wynikałoby

$$(A-I)^{-1}X = \operatorname{Im}(A-I), \quad (A-I)^{-1}(\operatorname{Im}(A-I)) = \operatorname{Im}(A-I) \ ↯.$$

Z lematu Riesza istnieje wektor x_1, $\|x_1\| = 1$ t. że $x_1 \in \operatorname{Im}(A-I)$ oraz $\operatorname{dist}(x_1, (A-I)(\operatorname{Im}(A-I))) \geq \frac{1}{2}$.
Iterując to rozumowanie otrzymujemy ciąg $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$,

$$\operatorname{dist}(x_n, (A-I)^n(\operatorname{Im}(A-I))) \geq \frac{1}{2}.$$

Pokażemy, że z $\{Ax_n\}$ nie da się wybrać podciągu zbieżnego. Rzeczywiście:

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|x_n - \underbrace{x_m - (A-I)x_m + (A-I)x_n}_{\in (A-I)^n(\operatorname{Im}(A-I))}\|$$

$\geq \frac{1}{2}$. To kończy dowód jako że A jest zwarty.

■