Szymon Zwara sz383558

pg* str. 1

(A) $f\in L^p \Rightarrow \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty \Rightarrow \lambda^p \mu(|f(x)|>\lambda) = \int_{\{|f(x)|>\lambda\}} \lambda^p d\mu \leqslant \int_{\{|f(x)|>\lambda\}} |f|^p d\mu \leqslant \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty \Rightarrow$

$\|f\|_{p,\infty}^p \leqslant \|f\|_p^p < \infty,\ f\in L^{p,\infty}$

(B) $f(x) := x^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{\{x>0\}} \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}) \setminus L^p(\mathbb{R})$. Istotnie,

$\int_\mathbb{R} |f|^p dx = \int_0^\infty \frac{1}{x} dx = \infty \Rightarrow f \notin L^p(\mathbb{R})$

$\sup_{\lambda>0} \lambda \mu(|f(x)|>\lambda)^{\frac{1}{p}} \overset{f \text{ malejąca}}{=} \sup_{\lambda>0} \lambda \mu(0,\frac{1}{\lambda^p})^{\frac{1}{p}} = \sup_{\lambda>0} 1 = 1.$

miara Lebesgue'a na $\mathbb{R}$

(C) Ustalmy $s>0$. Niech $f_{0,s} := f\mathbb{1}_{\{|f|>s\}}$, $f_{1,s} := f\mathbb{1}_{\{|f|\leqslant s\}}$. Wówczas $f_{0,s}\in L^{p_0}$, $f_{1,s}\in L^{p_1}$. Istotnie,

$\|f_{0,s}\|_{p_0} = \|f\mathbb{1}_{\{|f|>s\}}\|_{p_0} \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|f\|_p \cdot \|\mathbb{1}_{\{|f|>s\}}\|_r = \|f\|_p \cdot \mu(|f|>s)^{\frac{1}{r}} < \infty$, bo $\|f\|_p<\infty$ z tego, że $f\in L^p$

$\frac{1}{r}+\frac{1}{p}=\frac{1}{p_0}$

i $\mu(|f|>s)<\infty$, bo inaczej byłoby $\|f\|_p^p \geqslant s^p\mu(|f|>s) = \infty$ ↯

$\|f_{1,s}\|_{p_1}^{p_1} = \int_\Omega |f|^{p_1}\mathbb{1}_{\{|f|\leqslant s\}} d\mu \leqslant \int_{\{|f|\leqslant s\}} |f|^p s^{p_1-p_0} d\mu \leqslant s^{p_1-p_0}\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty.$

(D) $\int_\Omega \varphi(|f(x)|) d\mu(x) \overset{\varphi(0)=0}{=} \int_\Omega \int_0^{|f(x)|} \varphi'(y) dy\, d\mu(x) \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \int_\Omega \varphi'(y) \mathbb{1}_{(0,|f(x)|)}(y) d\mu(x) dy =$

funkcja podcałkowa nieujemna, bo $\varphi' \geqslant 0$, bo φ rosnąca

$= \int_0^\infty \varphi'(y)\mu(|f(x)|>y) dy.$

(E) B.s.o. $1\leqslant p<q\leqslant\infty$. Jeśli $p=q$, to nie ma czego dowodzić. Przypadki $q<\infty$, $q=\infty$ rozważmy oddzielnie.

1° $(q<\infty)$

Niech $C_0 := \|T\|_{\mathcal{L}(L^p,L^{p,\infty})}$, $C_1 := \|T\|_{\mathcal{L}(L^q,L^{q,\infty})}$, $r\in(p,q)$.

$\int_\Omega |Tf|^r \overset{(D)}{=} \int_0^\infty r t^{r-1} \mu(|Tf|>t) dt \overset{(C)}{=} \int_0^\infty r t^{r-1} \mu(|T(f_{0,t}+f_{1,t})|>t) dt \leqslant \int_0^\infty r t^{r-1} \mu(|Tf_{0,t}|+|Tf_{1,t}|>\frac{t}{c}) dt$

$\leqslant \int_0^\infty r t^{r-1}\left(\mu(|Tf_{0,t}|>\frac{t}{2c}) + \mu(|Tf_{1,t}|>\frac{t}{2c})\right) dt \leqslant \int_0^\infty r t^{r-1}\left(\frac{\|Tf_{0,t}\|_{p,\infty}^p}{(\frac{t}{2c})^p} + \frac{\|Tf_{1,t}\|_{q,\infty}^q}{(\frac{t}{2c})^q}\right) dt \leqslant$

$\leqslant \int_0^\infty r t^{r-1}\left(\left(\frac{2cC_0\|f_{0,t}\|_p}{t}\right)^p + \left(\frac{2cC_1\|f_{1,t}\|_q}{t}\right)^q\right) dt = (*)$

Szymon Zwara sz383558

P9* str. 2

$$\int_0^\infty r t^{r-1}\left(\frac{2cc_0\|f_{0,t}\|_p}{t}\right)^p dt = r(2cc_0)^p \int_0^\infty t^{r-1-p}\int_\Omega |f_{0,t}|^p d\mu = r(2cc_0)^p\int_0^\infty t^{r-1-p}\int_\Omega |f|^p \mathbb{1}_{\{|f|>t\}} d\mu\, dt =$$

$$\underset{\text{nieujemne fun. podcałkowe}}{\overset{\text{Fubini}}{=}} r(2cc_0)^p \int_\Omega |f(x)|^p \int_0^\infty t^{r-1-p}\mathbb{1}_{\{|f(x)|>t\}}\, dt\, d\mu(x) =$$

$$= r(2cc_0)^p\int_\Omega |f(x)|^p \int_0^{|f(x)|} t^{r-1-p}\, dt\, d\mu(x) \overset{r-1-p>-1}{=} r(2cc_0)^p \int_\Omega |f(x)|^p (r-p)|f(x)|^{r-p} d\mu(x) =$$

$$= r(r-p)(2cc_0)^p\int_\Omega |f(x)|^r d\mu(x) = r(r-p)(2cc_0)^p\|f\|_r^r.$$

Analogicznie, korzystając tym razem z tego, że $r-1-q<-1$, dostajemy

$\int_0^\infty r t^{r-1}\left(\frac{2cc_1\|f_{1,t}\|_q}{t}\right)^q dt = r(q-r)(2cc_1)^q\|f\|_r^r$. Stąd

$\|Tf\|_r^r \le (*) = \left(r(r-p)(2cc_0)^p + r(q-r)(2cc_1)^q\right)\|f\|_r^r$, czyli $T\in\mathcal{L}(L^r, L^r)$.

2° $(q=\infty)$

Podobnie jak w 1°, niech $c_0 := \|T\|_{\mathcal{L}(L^p, L^{p,\infty})}$, $c_1 := \|T\|_{\mathcal{L}(L^\infty,L^\infty)}$. $r\in(p,q]$. Wówczas

$\forall_x\ |Tf_{1,\frac{t}{2cc_1}}| \le \|Tf_{1,\frac{t}{2cc_1}}\|_\infty \le c_1\|f_{1,\frac{t}{2cc_1}}\|_\infty = c_1\|f\mathbb{1}_{\{|f|\le \frac{t}{2cc_1}\}}\|_\infty \le \frac{t}{2c}$. Wobec tego

$$\int_\Omega |Tf|^r d\mu = \int_0^\infty r t^{r-1}\mu(|Tf|>t)\,dt \le \int_0^\infty r t^{r-1}\left(\mu\left(|Tf_{0,\frac{t}{2cc_1}}|>\frac{t}{2c}\right) + \underbrace{\mu\left(|Tf_{1,\frac{t}{2cc_1}}|>\frac{t}{2c}\right)}_{=\emptyset}\right)dt =$$

$$= \int_0^\infty r t^{r-1}\mu\left(|Tf_{0,\frac{t}{2cc_1}}|>\frac{t}{2c}\right)dt \le \int_0^\infty r t^{r-1}\left(\frac{\|Tf_{0,\frac{t}{2cc_1}}\|_{p,\infty}^p}{(\frac{t}{2c})^p}\right)dt \le r(2cc_0)^p\int_0^\infty t^{r-1-p}\|f_{0,\frac{t}{2cc_1}}\|_p^p\, dt =$$

$$= r(2cc_0)^p\int_0^\infty t^{r-1-p}\int_\Omega |f(x)|^p\mathbb{1}_{\{|f(x)|>\frac{t}{2cc_1}\}}\, d\mu(x)\, dt \overset{\text{Fubini}}{=} r(2cc_0)^p\int_\Omega |f(x)|^p\int_0^{2cc_1|f(x)|} t^{r-1-p}\,dt\,d\mu(x) =$$

$= r(2cc_0)^p(r-p)(2cc_1)^{r-p}\|f\|_r^r = r(r-p)(2c)^r c_0^p c_1^{r-p}\|f\|_r^r$, więc $T\in\mathcal{L}(L^r,L^r)$. ∎

Szymon Zwara sz383558

P10*

(A) $\|D_N\|_1 = \int_0^1 |D_N(t)|dt = \int_0^1 \left|\frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}\right| dt = \sum_{k=0}^{2N} \int_{\frac{k}{2N+1}}^{\frac{k+1}{2N+1}} \frac{|\sin(\pi(2N+1)t)|}{\sin(\pi t)} dt =$

$$= \sum_{k=0}^{2N} (-1)^k \int_{\frac{k}{2N+1}}^{\frac{k+1}{2N+1}} \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)} dt = 2\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \int_{\frac{k}{2N+1}}^{\frac{k+1}{2N+1}} \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\underbrace{\sin(\pi t)}_{\substack{2t \leq \sin(\pi t) \leq \pi t \\ \text{wklęsłość na } [0,\frac{\pi}{2}] \\ t \approx \frac{k+1}{2N}}}} dt + \underbrace{(-1)^N \int_{\frac{N}{2N+1}}^{\frac{N+1}{2N+1}} \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)} dt}_{\text{Całka z ograniczonej funkcji na kurczącym się przedziale do 0}} \approx$$

$$\approx \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \int_{\frac{k}{2N+1}}^{\frac{k+1}{2N+1}} \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\frac{k+1}{2N}} dt = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2N}{k+1} \int_0^{\pi} \sin(u) \frac{1}{\pi(2N+1)} du \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} \approx \log(N).$$

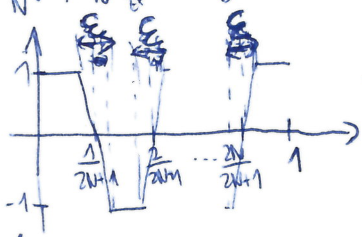
□

(B) Niech $E = \{f \in C[0,1];\ f(0) = f(1)\}$ z normą supremum. E jest zbiorem domkniętym w $C[0,1]$, więc ~~to~~ jest przestrzenią Banacha (domkniętość łatwo sprawdzić, bo zbieżność w normie supremum implikuje też zbieżność w 0 i 1).

~~Ex~~ Rozważmy rodzinę/ciąg przekształceń liniowych $\varphi_N \in E^*$ zadanych $\varphi_N(f) = \int_0^1 f(1-t) D_N(t) dt$.

φ_N są ciągłe, bo $\sup_{\|f\|_\infty = 1} \int_0^1 f(1-t) D_N(t) dt \leq \sup_{\|f\|_\infty = 1} \int_0^1 |f(1-t)| \cdot |D_N(t)| dt \leq \int_0^1 (2N+1) dt = 2N+1 < \infty$.

Ponieważ $S_N f(x) = \int_0^1 f(x-t) D_N(t) dt$ i f jest 1-okresowa, to teza zadania sprowadza się do wykazania, że $\exists f \in E\ |\varphi_N(f)| \longrightarrow \infty$. Załóżmy przez sprzeczność, że tak nie jest. Wówczas φ_N są ograniczonymi operatorami liniowymi, punktowo ograniczonymi, więc z tw. Banacha-Steinhausa $\sup_N \|\varphi_N\|_{E^*} < \infty$. Jednakże $\forall_N$ niech $g_{N,\varepsilon}$ będzie "uciąglonią" wersją funkcji $sgn(D_N)$, tj.



. Zbiegając z ε do 0 dostajemy

$$\|\varphi_N\|_{E^*} = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \int_0^1 f(1-t) D_N(t) dt \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 g_{N,\varepsilon}(1-t) D_N(t) dt \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\|D_N\|_{L^1} - 2N\varepsilon \|D_N\|_\infty\right) = \|D_N\|_{L^1},$$

ale z podpunktu (A) wynika, że $\|D_N\|_{L^1} \approx \log N$, więc $\sup_N \|\varphi_N\|_{E^*} = \infty$. ↯ □