Jakub Ubiński, 394607 gr. 1

1

Zadanie 1

Mamy:

1) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in[0,1]} \|f(x)\|_E = 0 \Leftrightarrow \forall_{x\in[0,1]} \|f(x)\|_E = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall_{x\in[0,1]} f(x) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0.$ ✓

2) $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \|\lambda f(x)\|_E = |\lambda| \cdot \sup_{x\in[0,1]} \|f(x)\|_E = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty.$ ✓

3) $\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \|f(x)+g(x)\|_E \leq \sup_{x\in[0,1]} (\|f(x)\|_E + \|g(x)\|_E) \leq$
$\leq \sup_{x\in[0,1]} \|f(x)\|_E + \sup_{x\in[0,1]} \|g(x)\|_E = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$ ✓

Zatem faktycznie jeżeli $(E, \|\cdot\|_E)$ - unormowana, to $(C([0,1], E), \|\cdot\|_\infty)$ t.ż. ✓

Niech $(E, \|\cdot\|_E)$ - Banacha oraz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - ciąg Cauchy'ego w $(C([0,1], E), \|\cdot\|_\infty)$, tzn. $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{M_\varepsilon} \forall_{n,m>M_\varepsilon} \forall_{x\in[0,1]} \|f_n(x) - f_m(x)\|_E < \varepsilon.$ ✓

A zatem $\forall_{x\in[0,1]} \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (E, \|\cdot\|_E)$ jest ciągiem Cauchy'ego, ✓

stąd, skoro E - Banacha, to istnieje granica $f(x)$ dla każdego x: $f_n(x) \xrightarrow[\|\cdot\|_E]{n\to\infty} f(x).$ ✓

Pokażemy, że $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{n\to\infty} f$. ✓

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $M_{\frac{\varepsilon}{2}}$, że dla $n,m > M_{\frac{\varepsilon}{2}}$; $\forall_{x\in[0,1]}$:
$$\frac{\varepsilon}{2} > \|f_n(x) - f_m(x)\|_E \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{\varepsilon}{2} \geq \|f_n(x) - f(x)\|_E,$$
z ciągłości normy. Biorąc supremum po $x\in[0,1]$ stwierdzamy, że $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ dla dużych n,

a więc to co chcieliśmy. Pozostaje wykazać, że f - ciągła.

Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0;1]$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Wówczas:

$$\|f(x_n) - f(x)\|_E \leq \|f(x_n) - f_k(x_n)\|_E + \|f_k(x_n) - f_k(x)\|_E + \\ + \|f_k(x) - f(x)\|_E \leq 2 \sup_{x\in[0;1]} \|f_k(x) - f(x)\|_E + \|f_k(x_n) - f_k(x)\|_E = \\ = 2\|f_k - f\|_E + \|f_k(x_n) - f_k(x)\|_E.$$

Dobieramy takie $k > k_{\frac{\varepsilon}{4}}$, że $\|f_k - f\|_E < \frac{\varepsilon}{4}$. oraz dla tych k n takie, że $\|f_k(x_n) - f_k(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$, bo f_k – ciągłe.

Wtedy dostajemy:

$$2\|f_k - f\|_E + \|f_k(x_n) - f_k(x)\|_E < \varepsilon,$$ a więc to co chcieliśmy i f – ciągła.

Zatem funkcja $\{f_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę w $(C([0;1],E), \|\cdot\|_\infty)$, czyli jest to pr. Banacha.

Jakub Woźnicki, 394607, gr 1.

1

Zadanie 2

Pokażemy, że A jest bijekcją, wówczas A^{-1} oczywiście istnieje, a skoro E - Banacha, to A^{-1} - ograniczony z Inverse Mapping Theorem. Liniowość A^{-1} będzie oczywista.

Pokażemy najpierw, że A jest injekcją.
Wystarczy wykazać, że $\ker A = \{0\}$. Niech więc x taki, że $Ax = 0$. Wówczas z naszego równania:

$$x + c_1 Ax + \dots + c_n A^n x = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ bo } Ax = 0 \Rightarrow A^n x = 0$$

dla dowolnego n, bo A^n - liniowe. Czyli faktycznie $\ker A = \{0\}$.

Pozostało wykazać, że A - surjekcja. Niech $y \in E$.
Zdefiniujmy $x = -c_1 y - c_2 Ay - \dots - c_n A^{n-1} y$.
Wówczas $Ax = -c_1 Ay - c_2 A^2 y - \dots - c_n A^n y = y$ z danego równania. Stąd znaleźliśmy takiego $x \in E$, że $Ax = y$, czyli A - surjekcja.

Z początkowej uwagi pozostało tylko pokazać, że A^{-1} - liniowa.

~~Mamy $\forall_{\lambda \in \mathbb{R}} \forall_{x,y \in E}$: $A^{-1}(\lambda y) = -c_1 \lambda y - c_2 A(\lambda y) - \dots - c_n A^{n-1}(\lambda y) =$~~

Ale faktycznie z dowodu surjekcji mamy: $\forall_{y \in E}\ A^{-1}(y) = -c_1 y - c_2 Ay - \dots - c_n A^{n-1} y$ co jest liniową kombinacją funkcji liniowych, czyli jest liniowe.

Jakub [illegible], 394607, gr. 1.

1

Zadanie 3.

$X^\perp = \{ g \in L^2(-1;1) : \forall_{f \in X} \langle f, g \rangle_{L^2} = 0 \} = \{ g \in L^2(-1;1) :$
$: \forall_{f \in X} \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx = 0 \} = \{ g \in L^2(-1;1) : \forall_{f \in X} \int_0^1 f(x)(g(x) + g(-x))\, dx = 0 \} =$
$= \mathcal{A}$. Niech $\mathcal{B} = \{ g \in L^2(-1;1) : \forall_{f \in L^2(0,1)} \int_0^1 f(x)(g(x)+g(-x))\, dx = 0 \}$.

Pokażemy $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$ Niech $g \in \mathcal{A}$. Oraz niech $r \in L^2(0,1)$ – dowolna funkcja. Zdefiniujmy $f(x) = r(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1)}(x) + r(-x) \mathbb{1}_{(-1,0)}(x)$. Łatwo sprawdzić, że $f \in X$.
Wówczas $\int_0^1 r(x)(g(x) + g(-x))\, dx = \int_0^1 f(x)(g(x)+g(-x))\, dx = 0$, bo $g \in \mathcal{A}$.
Z dowolności r mamy $g \in \mathcal{B}$.
$(\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A})$ Niech $g \in \mathcal{B}$. Wówczas dla dowolnego $f \in X$:
$$\int_0^1 f(x)(g(x) + g(-x))\, dx = \int_0^1 f_{|[0,1)}(x)\,(g(x) + g(-x))\, dx = 0,$$
bo $\int_0^1 |f_{|[0,1)}(x)|\, dx \le \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx < \infty \Rightarrow f_{|[0,1)} \in L^2(0,1)$, a $g \in \mathcal{B}$.
Zatem $g \in \mathcal{A}$.

Stąd $X^\perp = \mathcal{B} = \{ g \in L^2(-1;1) : \forall_{f \in L^2(0,1)} \int_0^1 f(x)\overbrace{(g(x) + g(-x))}^{G(x)}\, dx = 0 \} =$
$= \{ g \in L^2(-1;1) : \forall_{f \in L^2(0,1)} \langle f, G \rangle_{L^2(0,1)} = 0 \} = \{ g \in L^2(-1;1) :$
$: G \equiv 0 \text{ p.w.} \} = \{ g \in L^2(-1;1) : g(x) = -g(-x) \text{ p.w.} \}$.

Aby znaleźć $P_X(f)$ wystarczy, że zapiszemy f w postaci $h + g$, gdzie $h \in X$ i $g \in X^\perp$. Wówczas $P_X(f) = h$.
Mamy $f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{= h(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{= g(x)}$. Łatwo sprawdzić,
że $h \in X$ i $g \in X^\perp$, a zatem $P_X(f)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$

Jakub Woźniak, 394607, gr 1 zad. 4

1

a) Skoro $\varphi \neq 0$ to $\exists_{x_0}$, że $\varphi(x_0) \neq 0$. Niech $F = \operatorname{lin}\{x_0\}$.

Pokażemy, że F jest sumą prostą,

tzn. $E = \ker\varphi + F$ i $\ker\varphi \cap F = \{0\}$.

Dla dowolnego $x \in E$ mamy $x = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 + \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0\right)$,

przy czym $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \in \operatorname{lin} x_0 = F$, bo $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \in \mathbb{R}$ oraz $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \in \ker\varphi$,

bo $\varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \varphi(x_0) = 0$. ✓

A zatem faktycznie $E = \ker\varphi + F$. ✓

Niech teraz $x \in \ker\varphi \cap F \Rightarrow \exists_{\lambda \in \mathbb{R}}\ x = \lambda x_0 \wedge \varphi(\lambda x_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda \varphi(x_0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, bo $\varphi(x_0) \neq 0$. A zatem $x = 0$ i

$\ker\varphi \cap F = \{0\}$.

jeszcze trzeba by było udowodnić jednoznaczność takiego rozkładu.

Stąd faktycznie $E = \ker\varphi \oplus F$ i $\dim F = 1$.

b) ($\Rightarrow$) Jeżeli $\varphi \in E^*$, to φ – ciągłe, stąd $\ker\varphi =$

$= \varphi^{-1}(\{0\})$ - domknięte jako przeciwobraz zbioru domkniętego. ✓

($\Leftarrow$) Przez sprzeczność niech $\|\varphi\| = \infty$. Stąd $\exists_{\substack{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \\ \|x_n\|_E = 1}}$,

że $|\varphi(x_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. ✓

Niech teraz x taki, że $\varphi(x) = 1$. Z liniowości oczywiście

taki x istnieje o ile $\varphi \neq 0$ (dla $\varphi = 0$ oczywiste ~~$\ker\varphi = E$ domknięte~~ φ – ciągła). ✓

Zdefiniujmy wówczas $y_n = x - \frac{x_n}{\varphi(x_n)}$. Wówczas $\varphi(y_n) =$

$= \varphi(x) - 1 = 0$, stąd $y_n \in \ker\varphi$. Ale z drugiej

strony $\|y_n - x\|_E = \frac{\|x_n\|_E}{|\varphi(x_n)|} = \frac{1}{|\varphi(x_n)|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, czyli $y_n \xrightarrow[\|\cdot\|_E]{} x$,

a $x \notin \ker\varphi$ i sprzeczność z domkniętością $\ker\varphi$. ✓