Michał Raszkowski 394439 PD AF seria 4

Zad. 1

a) $(X, \mathcal{F}, \mu)$ – nieujemne σ-skończone, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ – σ-ciało. ~~[illegible]~~ $\mu|_{\mathcal{G}} = \nu$

Niech $f \in L^1(\mu)$. Zauważmy, że $\mu \ll \nu$ i $\nu \ll \mu$ na $\mathcal{G}$.

Niech ξ – miara t. że

$\xi(A) = \int_A f \, d\mu$. Wówczas $\forall_{A \in \mathcal{G}} \; \mu(A) = 0 \Rightarrow |\xi|(A) = 0$, więc $\xi \ll \mu$. (na $\mathcal{G}$)

~~Z twierdzenia Radona-Nikodyma $\exists g \in L^1(\mu)$~~

Ale $\nu = \mu|_{\mathcal{G}}$, zatem $\forall_{A \in \mathcal{G}} \; \nu(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0 \Rightarrow |\xi|(A) = 0$

$\Rightarrow \xi \ll \nu$. (na $\mathcal{G}$)

Zatem z tw. Radona-Nikodyma $\exists_{g \in L^1(\nu)}$ (gdzie jak mowa tu, g jest wyzn. jednozn. z dokł. do zbiorów miary zero ν)

$\forall_{A \in \mathcal{G}} \; \xi(A) = \int_A g \, d\nu$, więc $\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\nu$.

b) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – przest. probab., X – rzeczyw. zm. los., $\mathbb{E}|X| < \infty$. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ – σ-ciało

$$\forall_{A \in \mathcal{G}} \; \mathbb{E} X \mathbb{1}_A = \int_\Omega X \mathbb{1}_A \, d\mathbb{P} = \int_A X \, d\mathbb{P} \underset{\substack{a) \\ \exists Y \in (\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}|_{\mathcal{G}})}}{=} \int_A Y \, d\mathbb{P}|_{\mathcal{G}} = \int_\Omega Y \mathbb{1}_A \, d\mathbb{P}|_{\mathcal{G}} = \mathbb{E} Y \mathbb{1}_A .$$

□

Mariusz Janosz 394271 grupa 1

1

3.

$T: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

$Tf(x) = \operatorname{sgn}(x) f(x+1)$

T jest liniowy bo $\forall a,b \in \mathbb{C}$ $f,g \in L^2(\mathbb{R})$

$$T(af+bg)(x) = \operatorname{sgn}(x)\big(af(x+1)+bg(x+1)\big) =$$

$$= a\operatorname{sgn}(x)f(x+1) + b\operatorname{sgn}(x)g(x+1) = aTf(x) + bTg(x)$$

T jest dobrze określony bo $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\|Tf(x)\|^2 = \cancel{\int} \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{sgn}(x) f(x+1)|^2 dx \underset{y=x+1}{=} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy = \|f\|^2 < \infty$$

$$\|f\|^2 = 1 \cdot \|f\|^2$$

zatem $\|T\| \leq 1$ T jest ograniczony.

Niech $f,g \in L^2(\mathbb{R})$

$$(Tf,g) = \int_{\mathbb{R}} Tf(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x) f(x+1)\overline{g(x)}\,dx =$$

$$\underset{y=x+1}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y)\operatorname{sgn}(y-1)\overline{g(y-1)}\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\overline{\operatorname{sgn}(y-1)g(y-1)}\,dy$$

$$= (f, T^*g) \quad \text{zatem } T^*g(x) = \operatorname{sgn}(x-1)g(x-1).$$