grupa 2 Mateusz Trukitowicz

1

Zad. 1. $A: H \to H$ – samosprzężony, zwarty. H – Hilberta, dodatni $n \in \mathbb{N}$.

T: $\exists$ $B: H \to H$ t. że $B^n = A$. Czy B – wyznaczone jednoznacznie?

Wiemy, że A jest samosprzężony, zwarty, zatem istnieje baza ~~ortogonalna~~ ortonormalna H złożona z wektorów własnych A: $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ t. że $A\xi_k = \lambda_k \cdot \xi_k$. λ_k – wartości własne.

ξ_k – baza ortonormalna zatem $\forall x \in H$ mamy $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \xi_i \rangle \xi_i$.

Niech (dla ustalonego n) γ_k ~ liczby takie, że $\gamma_k^n = \lambda_k$.

Definiujemy $Bx = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \xi_i \rangle \cdot \gamma_i \xi_i$

Wówczas $B^2 x = B(Bx) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\langle \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, \xi_j \rangle \gamma_j \xi_j \right), \xi_i \rangle}_{=0,\ j \neq i;\ \langle x, \xi_i \rangle \gamma_i \langle \xi_i, \xi_i \rangle,\ j = i} \gamma_i \xi_i =$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \xi_i \rangle \gamma_i^2 \xi_i$

Analogicznie postępując otrzymujemy:

$$B^n x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \xi_i \rangle \gamma_i^n \xi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \xi_i \rangle \lambda_i \xi_i = Ax$$

Zatem znaleźliśmy B takie, że $B^n x = Ax$ $\forall x \in H$.

B nie jest wyznaczony jednoznacznie (dla $n > 1$) ponieważ γ_k możemy dobrać jako dowolny pierwiastek n-tego stopnia z λ_k (nad zespolonymi mamy ich dokładnie n) zaś każda zmiana wziętego pierwiastka zmienia operator (jeśli $\gamma_k \neq \gamma_k'$, to $B(\xi_k) = \lambda_k \xi_k \neq \lambda_k' \xi_k = B'(\xi_k)$).

Szymon Zwara sz383558, BH5, gr. 2.

P2

Ponieważ $p, q \geq 1$, to $r \leq \min(p,q)$, więc $\frac{1}{p}-\frac{1}{r}, \frac{1}{q}-\frac{1}{r} \geq 0$ i $1 = \frac{1}{r} + (\frac{1}{p}-\frac{1}{r}) + (\frac{1}{q}-\frac{1}{r}) =$
$= \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{pr}{r-p}} + \frac{1}{\frac{qr}{r-q}}$.

1

$$\|f*g(x)\|_r^r = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy\right|^r dx\right) \leq \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)||g(x-y)|\,dy\right)^r dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{\frac{r-p}{r}} |g(x-y)|^{\frac{r-q}{r}} \left| |f(y)|^p |g(x-y)|^q \right|^{\frac{1}{r}} dy\right)^r dx \leq$$

jako funkcja $y \mapsto g(x-y)$

Hölder
$$\leq \int_{\mathbb{R}^d}\left(\left\| |f(y)|^{\frac{r-p}{r}}\right\|_{\frac{pr}{r-p}} \cdot \left\| |g(x-y)|^{\frac{r-q}{r}}\right\|_{\frac{qr}{r-q}} \cdot \left\| \left| |f(y)|^p |g(x-y)|^q \right|^{\frac{1}{r}} \right\|_r\right)^r dx =$$

$$= \left\| |f(y)|^{\frac{r-p}{r}}\right\|_{\frac{pr}{r-p}}^r \left\| |g(x-y)|^{\frac{r-q}{r}}\right\|_{\frac{qr}{r-q}}^r \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \left\| \left| |f(y)|^p |g(x-y)|^q \right|^{\frac{1}{r}} \right\|_r^r dx =$$

$$= \|f(y)\|_p^{r-p} \|g(y)\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p |g(x-y)|^q\,dy\right) dx =$$

Fubini, bo nieujemne funkcje
$$= \|f(y)\|_p^{r-p} \|g(y)\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p |g(x-y)|^q\,dx\right) dy =$$

$$= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p\,dy \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|^q\,dx =$$

$$= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \|f\|_p^p \cdot \|g\|_q^q = (\|f\|_p \|g\|_q)^r,$$ więc

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Szymon Zwara sz383558, BII5, gr. 2.

P3.

Lemat (Hint) $y_n \to y \iff \forall_{n_k} \exists_{n_{k_l}} y_{n_{k_l}} \to y$.

Dowód lematu ($\Rightarrow$) oczywiste, bo każdy podciąg ciągu zbieżnego do y zbiega do y.

($\Leftarrow$) Przez sprzeczność załóżmy, że $y_n \not\to y$. Wówczas $\exists_{\varepsilon>0} \exists_{n_k} \|y_{n_k} - y\| \geq \varepsilon \ \forall_k$, co daje sprzeczność z tym, że n_k ma podciąg n_{k_l} t. że $y_{n_{k_l}} \to y$. □

Skoro $x_n \rightharpoonup x$, to z zad. W3 (PSET 6) wynika, że $\exists_{C>0} \forall_n \|x_n\| \leq C$, więc $\forall_{n_k} \forall_k \|x_{n_k}\| \leq C$, tj. każdy podciąg ciągu x_n jest ograniczony. Ze zwartości operatora K wynika stąd, że (por. C2, PSET 9) $\forall_{n_k} \exists_{n_{k_l}} Kx_{n_{k_l}}$ jest zbieżny. Ustalmy n_{k_l} i oznaczmy tę granicę przez y. Chcemy pokazać, że $y = Kx$. Istotnie,

$$\forall_{\varphi \in F^*} \varphi(Kx_{n_{k_l}} - Kx) = \underbrace{\varphi \circ K}_{\in E^*, \text{ bo } K \text{ jest ciągły i liniowy}} (x_{n_{k_l}} - x) \longrightarrow 0, \text{ bo } x_{n_{k_l}} \rightharpoonup x \text{ i } \varphi \circ K \in E^*.$$

Zatem $Kx_{n_{k_l}} \rightharpoonup Kx$, a z tego, że $Kx_{n_{k_l}} \to y$ wynika, że $Kx_{n_{k_l}} \rightharpoonup y$ (W4, PSET 6). Z jednoznaczności słabej granicy (W2, PSET 6) zatem $y = Kx$.

Otrzymaliśmy wobec tego, że $\forall_{n_k} \exists_{n_{k_l}} Kx_{n_{k_l}} \to Kx$, co na mocy lematu oznacza, że $Kx_n \to Kx$.

□

Mariusz Janosz 394271

4.

$$S_N f(x) - f(x) = \int_0^1 f(x-t) D_N(t)\,dt - \int_0^1 f(x) D_N(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(x-t)-f(x))\, D_N(t)\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(\pi t)} \sin(\pi(2N+1)t)\,dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin \pi t} \frac{e^{i\pi(2N+1)t}}{2i}\,dt - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin \pi t} \frac{e^{-i\pi(2N+1)t}}{2i}\,dt =$$

$$= \triangle$$

$$\frac{e^{i\pi t}}{2i} \cdot \frac{(f(x-t)-f(x))}{\sin \pi t} \in L^1(0,1) \text{ bo}$$

$$\int_0^1 \left| \frac{e^{i\pi t}(f(x-t)-f(x))}{2i \sin \pi t} \right| dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{|f(x-t)-f(x)|}{|\sin \pi t|}\,dt =$$

$$= \underbrace{\int_{|t|<\delta} \frac{|f(x-t)-f(x)|}{\pi |t|} \underbrace{\frac{|\pi t|}{|\sin \pi t|}}_{\downarrow 1 \text{ zatem ograniczone w pobliżu } 0} dt}_{\text{całkowalne z założenia}} + \underbrace{\int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}} \frac{|f(x-t)-f(x)|}{|\sin \pi t|}\,dt}_{<\infty}$$

bo f ciągła i ograniczona bo okresowa, sin oddzielony od 0.

$$g(t) = \frac{(f(x-t)-f(x))e^{i\pi t}}{2i \sin(\pi t)}$$

$$\triangle = \hat{g}(N) - \hat{g}(-N) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$