Zad 1 Szymon Antoniak gr. 1
394197

jest toż w $C^1[0,1]$

a) $\|f\|_C := |f(0)| + \sup_x |f'(x)|$

dajmy CS : $\|f_n - f_m\| \to 0 \implies |f_n(0) - f_m(0)| \to 0$
$\sup |f_n'(x) - f_m'(x)| \to 0$

$$\forall x \quad \underset{\substack{\| \\ f_n(0)+\int_0^x f_n'(t)dt}}{|f_n(x) - f_m(x)|} \leq \underbrace{|f_n(0) - f_m(0)|}_{\substack{\leq \varepsilon \\ \text{dla } n,m > N_\varepsilon}} + \left|\int_0^x f_n'(t)dt - f_m'(t)dt\right| \leq 2\varepsilon$$

$$\wedge| \quad \int_0^x |\;\;| \quad \wedge| \quad \int_0^1 \underbrace{|\;\;|}_{\leq\varepsilon} \leq \varepsilon \text{ dla } n,m > N_\varepsilon$$

zatem $f_n \xrightarrow{\|\;\|_\infty} G$

$\sup |f_n'(x)| \to 0 \implies$ (bo $(C[0,1], \|\;\|_\infty)$ Banacha) $\exists g : \|f_n'(x) - g(x)\|_\infty \to 0$

$$\forall x \qquad f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)\,dt \quad // \text{ dddn } \|f_n'\|_\infty < \|g\|_\infty \cdot 2$$
Lebes. dominated

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$G(x) = G(0) + \int_0^x g(t)\,dt \quad /(\;)'$$

$$G'(x) = g(x)$$

zatem G to graniczna funkcja.

Przed tym powinienem pokazać, że to norma:

- $\|f\|_c = 0 \iff \begin{matrix} f(0)=0 \\ \sup f' = 0 \end{matrix} \iff f \equiv 0$ ✓
- $\|\lambda f\|_c = |\lambda f(0)| + \sup|(\lambda f)'| = \underbrace{|\lambda||f(0)| + \lambda \sup|f'|}_{= |\lambda| \|f\|_c}$ ✓

$$\|f+g\|_C = |f(0)+g(0)| + \sup|(f+g)'(x)| = -\|- + \sup|f'(x)+g'(x)| \leq$$

$\sup|\cdot+\cdot| \leq \sup|\cdot| + \sup|\cdot|$

$$|f(0)| + \sup|f'| + |g(0)| + \sup|g'| = \|f\|_C + \|g\|_C$$

czyli to przestrzeń Banacha.

b)

$\|f\|_D := \|f\|_2 + \|f'\|_2$ • $\|f\|_D = 0 \Rightarrow \|f\|_2 = 0$, $f \equiv 0$

to, że to jednorodne i subaddytywne wynika z tego że $\|g\|_2$ to norma. (dla $g \in L_2$)

to nie przestrzeń Banacha. Niech będzie CS:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac12 - \frac1n \\ n(x - \frac12 + \frac1n) \\ 1, & x \geq \frac12 \end{cases}$$

$$\int_0^1 |f_{n+k} - f_n|^2 \leq \int_{\frac12-\frac1n}^{\frac12} (|f_n| + |f_{n+k}|)^2 \leq \int_{\frac12-\frac1n}^{\frac12} 2^2 \to 0$$

/ zmniejszam zasięg całki bo to nośnik $|f_{n+k} - f_n|$

niech $F_n(0)=0$ $\forall n$:

$$\int_0^1 (F_{n+k} - F_n)^2 = \int_0^1 \left(\int_0^x f_{n+k}(t)dt - \int_0^x f_n(t)dt\right)^2 dx = \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^x f_{n+k}(t) - f_n(t)}_{\leq \int_{\frac12-\frac1n}^{\frac12} |f_{n+k}| + |f_n| dx = \frac{2}{n}}\Big)^2 \leq \int_0^1 \frac{4}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

zatem (F_n) to CS, ale funkcja granicy f_n $(=F_n')$ musi być (*) $\begin{cases} 0 & x < \frac12 \\ 1 & x \geq \frac12 \end{cases} =: f$

~~bo musi być jedynką na $[\frac12, 1]$, a $|f - f_n| < \varepsilon$ dla $n > N_\varepsilon$ oznacza~~ z dokł. do zbioru miary zero - a to siedzi poza $C^1[0,1]$

(*) $\|f - f_n\|_2 = \int_{\frac12-\frac1n}^{\frac12} \underbrace{f_n^2}_{\leq 1} \to 0$ a granica jest jednoznaczna z dokł. do ae

Zad 2 S. Antoniak 394197 gr 1

$p \in [1, \infty]$

$T: \ell^p \to \ell^p$

$T(\{a_n\}) = \{a_{n+1} - a_n\}$

well-defined: Mink

$\| T(\{a_n\}) \|_p = \| \{a_{n+1} - a_n\} \|_p \leq \underbrace{\| \{a_{n+1}\} \|_p}_{\leq \| \{a_n\} \|_p} + \| \{a_n\} \|_p < \infty$ ✓

$$\| T \| = \sup_{\|x\|_p = 1} \| Tx \|_p = \sup_{\| \cdot \| = 1} \| \{x_{n+1} - x_n\} \| \leq \sup (\| \ \| + \| \ \|) \leq \sup \| \ \| + \sup \| \ \| = 2$$

ciąg $\bar{x_n}$:

$(\underbrace{2^{-n}, -2^{-n}, 2^{-n}, -2^{-n}, \dots}_{\text{jest ich } \lfloor 2^{np} \rfloor})$ wtedy $\|x_n\|_p = \left((2^{-n})^p \cdot \lfloor 2^{np} \rfloor \right)^{1/p} \leq (1)^{1/p} = 1$

oraz $\|x_n\|_p \geq \left((2^{-n})^p \cdot (2^{np} - 1) \right)^{1/p} =$

oraz $= (1 - 2^{-np})^{1/p} \xrightarrow{n \to \infty} 1$

$\| Tx_n \|_p = \| -2 \cdot 2^{-n}, 2 \cdot 2^{-n}, \dots \|_p = 2 \|x_n\| \xrightarrow{n \to \infty} 2$

zatem dddn $\| Tx_n \|_p > 2 - \varepsilon$ dla dow. ε

Zad 3 S. Antoniak 394197 gr. 1

X – norm

Y – Banach

$D \subset X \quad T: D \to Y$

$\overline{D} = X \quad \|T\| < \infty$

Teza: ~~Teza~~ T przedłuża się na X, jeśli z zach. normy to jednoznacznie

niech dla $x \in X \setminus D$ $\quad \tilde{T}(x) = \lim_{n \to \infty} T(x_n)$ dla (x_n) t.ż. $\|x_n - x\|_X \to 0$ $\quad (\exists$ bo $\overline{D} = X)$

dlaczego $\lim_{n\to\infty} T(x_n)$ istnieje? $\quad \|T(x_n) - T(x_m)\|_Y = \|T(x_n - x_m)\|_Y \leq \|T\| \, \|x_n - x_m\|_X \to 0$

zatem $\{Tx_n\}$ to CS, Y Banacha $\Rightarrow$ $\{Tx_n\}$ zbieżny.

jest liniowa: $\tilde{T}(x+y) = \lim T(x_n + y_n) = \lim Tx_n + Ty_n = \tilde{T}x + \tilde{T}y$

Definicja jest jednoznaczna, bo dla $x \in X \setminus D$ $\quad d_n, h_n \to x \Rightarrow \|d_n - h_n\| \leq \|d_n - x\| + \|h_n - x\| \leq 2\varepsilon$, czyli $\underset{\text{ogranicz.}}{T}(d_n - h_n) \to 0$

teraz $\|\tilde{T}\|$: niech będzie $\underset{\|x_n\| = 1 \, \forall n}{\{x_n\}}$ $\quad \|\tilde{T}x_n\| \to \|\tilde{T}\|$, zatem dddn $\underset{\text{ustalmy dużo } n}{\|\tilde{T}x_n\| > \|\tilde{T}\| - \frac{\varepsilon}{2}}$

a teraz $\underset{k \in \mathbb{N}}{\{d_k\}} \subset D$, $\{d_k\} \to x_n$, ~~...~~ zatem dddk $\|\tilde{T}d_k - \tilde{T}x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\|d_k\| = 1$ wtedy ~~$\|\tilde{T}d_k\| \overset{\Delta}{\geq} \|\tilde{T}d_k - \tilde{T}x_n\| - \|\tilde{T}x_n\|$~~

$$\|\tilde{T}d_k\| = \|\tilde{T}(d_k - x_n) + \tilde{T}x_n\| \overset{\Delta}{\geq} \overbrace{\|\tilde{T}x_n\|}^{> \|\tilde{T}\| - \frac{\varepsilon}{2}} - \overbrace{\|\tilde{T}(d_k - x_n)\|}^{< \frac{\varepsilon}{2}} > \|\tilde{T}\| - \varepsilon$$

$$\|T\| \geq \|Td_k\|$$

bo $\|a\| \leq \|a - b\| + \|b\|$

$\|a - b\| \geq \|a\| - \|b\|$

zatem $\|T\| \geq \|\tilde{T}\|$

Przedłużenie jest jednoznaczne jeśli $\tilde{T}$ ma być ciągłe, bo $\overline{D} = X$, a więc więc dla $x \in X \setminus D$ wartość musi być granicą Tx_n.

Zad 4 S. Antoniak 391197 gr. 1

$\forall (y_n) : y_n \to 0$

$|\sum x_n y_n| < \infty$

T: $\sum |x_n| < \infty$

zauważmy, że $y_n \to 0 \Rightarrow (y_n) \in c_0$, dajmy $(c_0, \| \|_\infty)$ - p. Banacha

Dajmy rodzinę operatorów liniowych φ_n $\varphi_n((y_i)) = \sum^n x_i y_i$. Punktowo ograniczona, bo

$|\sum^\infty x_n y_n| < \infty$ dla ustalonego (y_n). φ_n są oczywiście liniowe. Zatem

z Banacha Steinhausa $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\| < \infty$, albo $< M$.

dajmy ciąg el. c_0 $(\tilde{a}_n)(k) := (\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} x_2, \ldots, \operatorname{sgn} x_k, 0, 0 \ldots)$

$\forall_k (a_n)(k) \in c_0$. $\forall_k \|a_n(k)\| = 1$. Zatem $\forall_n \sum^n |x_i| < M$. Zatem $\sum^\infty |x_i| < M$

□.