Szymon Zwara 52383558, gr. II / Christmas Problems

P1

(a) Zauważmy, że z nierówności Bessela $\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$ jest rosnący i ograniczony z góry przez $\|x\|^2$, więc $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$ jest zbieżny. Dla $n<m$ mamy

$$\Big\| \sum_{i=n+1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i \Big\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |\langle x, e_i \rangle|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$ więc $\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ jest ciągiem

Cauchy'ego, więc jest zbieżny. Zauważmy, że $\forall_j \ \langle x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \rangle =$

$= \langle x, e_j \rangle - \langle \langle x, e_j \rangle e_j, e_j \rangle = 0$. Zatem z zupełności tego układu ortogonalnego $x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i = 0$. □

(b) Niech $M = \sup |y_i|$. Niech $n<m$. Wówczas

$$\Big\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} y_i e_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \Big\|^2 = \Big\| \Big(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\Big) \sum_{i=1}^{n} y_i e_i + \frac{1}{m} \sum_{i=n+1}^{m} y_i e_i \Big\|^2 =$$

$$= \Big|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\Big|^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 + \Big(\frac{1}{m}\Big)^2 \sum_{i=n+1}^{m} |y_i|^2 < \Big(\frac{2}{n}\Big)^2 \cdot n M^2 + \Big(\frac{1}{m}\Big)^2 (m-n) M^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

więc jest to ciąg Cauchy'ego, czyli jest zbieżny.

Niech $z = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. $\forall_j \forall_{n \geq j} \ \langle \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k e_k, e_j \rangle = \frac{1}{n} y_j \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, bo $|y_j| \leq M$.

Zatem $\langle z, e_j \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k e_k, e_j \rangle = 0$, więc $z = 0$.

(c) Z wykładu wiemy, że układ $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną w $L^2(0,2\pi)$. Dlatego (iloczyny skalarne i normy z przestrzeni $L^2(0,2\pi)$):

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big| \int_0^1 x^2 e^{ikx} \, dx \Big|^2 = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big| \int_0^{2\pi} x^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \, dx \Big|^2 = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big| \langle x^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(x), \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \rangle \Big|^2 =$$

$$\underset{\text{tożs. Parsevala}}{=} 2\pi \| x^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \|^2 = 2\pi \int_0^1 |x^2|^2 \, dx = 2\pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{2}{5}\pi. \ \square$$

Szymon Zwara 52383558, Christmas Problems, gr. II

P2 str. 1/2

(a) Wystarczy zauważyć, że $\mathrm{span}(e_1, e_2, \ldots)$ jest gęstym podzbiorem ℓ^p. {na mocy P2 z BH1} Istotnie, niech $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell^p$, $\varepsilon > 0$. Wówczas $\exists_n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$, więc dla $\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots) \in$ $\in \mathrm{span}(e_1, e_2, \ldots)$ mamy $\|y - \tilde{y}\|_p = \|(0, 0, \ldots, 0, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots)\|_p < \varepsilon$, $(*)$ więc $\mathrm{span}(e_1, e_2, \ldots)$ jest gęsty w ℓ^p.

Mamy oczywiście, że dla $y = (y_1, \ldots) \in \mathrm{span}(e_1, e_2, \ldots)$ zachodzi $Ty = (a_1 y_1, a_2 y_2, \ldots)$.

Weźmy zatem $\underset{(y_1, \ldots)}{y} \in \ell^p \setminus \mathrm{span}(e_1, e_2, \ldots)$. Pokażemy, że $Ty = (a_1 y_1, a_2 y_2, \ldots)$.

Niech $\tilde{y}_n = (y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)$. Z $(*)$ mamy, że $\tilde{y}_n \to y$, więc z ciągłości operatora T, $T\tilde{y}_n \to Ty$. Zauważmy jednak, że

$$\|T\tilde{y}_n - (a_1 y_1, a_2 y_2, \ldots)\|_p = \|(0, 0, \ldots, 0, a_{n+1} y_{n+1}, \ldots)\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \|a\|_\infty \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$ Z jednoznaczności granicy więc

$Ty = (a_1 y_1, a_2 y_2, \ldots)$. $\square$

(b) Pokażemy, że T zwarty $\iff$ $(a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0)$.

Po pierwsze, $\forall_i\ a_i \in \sigma(T)$, bo $(T - a_i \mathrm{Id}) e_i = 0$. Z domkniętości $\sigma(T)$ mamy więc $\sigma(T) \supseteq \overline{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$. Jeśli $\lambda \notin \overline{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$, to z domkniętości tego zbioru $\mathrm{dist}(\lambda, \overline{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}}) = \varepsilon > 0$ i zatem $(y_1, y_2, \ldots) \mapsto \left(\frac{y_1}{a_1 - \lambda}, \frac{y_2}{a_2 - \lambda}, \ldots\right)$ jest odwrotnością T i do tego ograniczoną, bo $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left|\frac{y_n}{a_n - \lambda}\right|^p \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n|^p < \infty$ dla $y \in \ell^p$.

Zatem $\sigma(T) = \overline{\{a_1, a_2, \ldots\}}$.

Jeśli T jest zwarty, to (C8, PSET9) jedynym punktem skupienia $\sigma(T)$ jest 0, a $\limsup_{n \to \infty} a_n$, $\liminf_{n \to \infty} a_n$ są punktami skupienia $\sigma(T)$, więc $\limsup_{n \to \infty} a_n = \liminf_{n \to \infty} a_n = 0$, czyli $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Załóżmy teraz, że $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Weźmy dowolny ciąg ograniczony $x^{(n)}$, tzn. $\exists_C \forall_n \|x^{(n)}\|_p^p \leq C$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. ~~Dob~~ Z tego, że $a_n \to 0$ możemy dobrać m_0 t. że $\forall_{m > m_0} |a_m| < \varepsilon$.

Szymon Zwara sz383558, Christmas Problems, gr. II

P2 Str. 2/2

(b) c.d.

Z ograniczoności $x^{(n)}$ wynika, że pierwsze m_0 współrzędnych ciągu $x^{(n)}$ jest ograniczonych, więc $\exists n_k$ t. że $a_i x_i^{(n_k)}$ zbieżny dla $i = 1, 2, \ldots, m_0$ (a_i też jest ograniczony).

Możemy wobec tego dobrać k_0 t. że $\forall_{k_2 > k_1 > k_0} \sum_{i=1}^{m_0} |a_i x_i^{(n_{k_1})} - a_i x_i^{(n_{k_2})}|^p < \varepsilon$.

Wówczas $\|Tx^{(n_{k_1})} - Tx^{(n_{k_2})}\|_p^p < \varepsilon + \sum_{i=m_0+1}^{\infty} |a_i x_i^{(n_{k_1})} - a_i x_i^{(n_{k_2})}|^p \leq$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{i=m_0+1}^{\infty} |x_i^{(n_{k_1})} - x_i^{(n_{k_2})}|^p \leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{i=m_0+1}^{\infty} \left(2 \max(|x_i^{(n_{k_1})}|, |x_i^{(n_{k_2})}|)\right)^p \leq$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon \cdot 2^p \cdot \sum_{i=m_0+1}^{\infty} \left(|x_i^{(n_{k_1})}|^p + |x_i^{(n_{k_2})}|^p\right) \leq \varepsilon + \varepsilon \cdot 2^p \cdot \left(\|x^{(n_{k_1})}\|_p^p + \|x^{(n_{k_2})}\|_p^p\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon(1 + 2^{p+1} \cdot C).$$

Z dowolności ε wynika, że ciąg $Tx^{(n_k)}$ jest ciągiem Cauchy'ego, więc jest zbieżny. Stąd, (na mocy C2, PSET 9) wskazaliśmy podciąg zbieżny ciągu $Tx^{(n)}$, czyli T jest operatorem zwartym.