R2. Moniuszko Jomosz

Niech $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ $\quad y_n \to 0$

$\forall x,y \in H \quad (Tx,y) = (x, T^*y)$

$$\|T^*y_n\|^2 = (T^*y_n, T^*y_n) = (TT^*y_n, y_n) \leqslant \|TT^*y_n\| \cdot \|y_n\|$$

$$\leqslant \|T\| \cdot \|T^*y_n\| \cdot \|y_n\|$$

Zatem $\|T^*y_n\| \leqslant \|T\| \cdot \|y_n\| \to 0$

Więc T^* jest ciągły w 0 zatem jest ograniczony.

$\forall x\in H \quad \|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^*Tx) \leqslant \|x\| \cdot \|T^*Tx\| \leqslant$

$\leqslant \|x\| \cdot \|T^*\| \cdot \|Tx\|$

Zatem $\|Tx\| \leqslant \|T^*\| \cdot \|x\|$

$\|Tx\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|T^*\| \cdot \|x\| = \|T^*\|$

$\|T\| \leqslant \|T^*\|$

$\|T^*x\|^2 = (T^*x, T^*x) = (x, TT^*x) \leqslant \|x\| \cdot \|TT^*x\| \leqslant$

$\leqslant \|x\| \cdot \|T\| \cdot \|T^*x\|$

Zatem $\|T^*x\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\|$

Analogicznie jak wyżej $\|T^*\| \leqslant \|T\|$

Czyli $\|T\| = \|T^*\|$

$\|T^*Tx\|^2 = (T^*Tx, T^*Tx) = (x, T^*TT^*Tx) \leqslant$

$\leqslant \|x\| \cdot \|T^*TT^*Tx\| \leqslant \|T^*\| \cdot \|T\| \cdot \|T^*Tx\| \cdot \|x\| =$

$= \|T\|^2 \cdot \|T^*Tx\| \cdot \|x\|$

Zatem analogicznie jak wyżej $\|T^*T\| \leqslant \|T\|^2$

$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^*Tx) \leqslant \|x\| \cdot \|T^*Tx\|$

Zatem analogicznie jak wyżej $\|T\|^2 \leqslant \|T^*T\|$

Więc $\|T\|^2 = \|T^*T\|$