Jakub Woźnicki, 394 607

Zadanie 54

Wiemy, że c jest Banacha, a zatem wystarczy pokazać, że c_0 jest domknięte w c, ~~żeby~~ żeby mieć c_0 - Banacha. ✓

Wybierzmy $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq c_0$ i $x^k \to x$ w c. ✓

Pokażemy, że $x \in c_0$.

Wiemy, że $\|x^k - x\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^k - x_n| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{k_\varepsilon} \forall_{k>k_\varepsilon} \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^k - x_n| < \varepsilon.$

Skoro $x^k \in c_0$, to $\forall_{k\in\mathbb{N}} \forall_{\varepsilon>0} \exists_{N_{\varepsilon,k}} \forall_{n > N_{\varepsilon,k}} |x_n^k| < \varepsilon.$ ✓

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas $|x_n| \leq |x_n - x_n^k| + |x_n^k| \leq$ ✓

$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - x_n^k| + |x_n^k| \leq 2\varepsilon$, o ile $k > k_\varepsilon$ i $n > N_{\varepsilon,k}$.

Zatem mamy $|x_n| < 2\varepsilon$, stąd $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, czyli $x \in c_0$, co chcieliśmy pokazać.

Idealnie ;)

1/1

Zadanie 57

Pokażemy najpierw, że $(l_1, \|\cdot\|_\infty) \subseteq (l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Weźmy $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, że $\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = \infty$. Wówczas istnieje podciąg $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, że $|x_{k_n}| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, zatem ciąg $(|x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ nie spełnia warunku koniecznego zbieżności szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$, stąd $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \notin l_1$.

Zatem skoro $(l_1, \|\cdot\|_\infty)$ jest podprzestrzenią przestrzeni unormowanej, to jest unormowana.

Pokażemy teraz, że $(l_1, \|\cdot\|_\infty)$ nie jest Banacha.

Zauważmy, że $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ jest Banacha, czyli wystarczy pokazać, że $(l_1, \|\cdot\|_\infty)$ nie jest domknięte w $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$. ✓

Rozważmy ciąg $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, t. że $x^k = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{k}, 0, 0, ...)$

Wówczas oczywiście $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, ale $x^k \xrightarrow[\ell^\infty]{} x$,

gdzie $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$, bo $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x^k_n - x_n| = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Wiemy jednak, że $x \notin \ell_1$, bo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (*), czyli znaleźliśmy ciąg, który nie spełnia warunku domkniętości, co kończy dowód. (*) - oczywiście $x \in (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, bo $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 1 < \infty$

1/1

Zadanie A5

Zauważmy, że $\forall_{x\neq 0} \forall_{R\in L(X,Y)} \frac{\|Rx\|_Y}{\|x\|_X} \le \sup_{x\neq 0} \frac{\|Rx\|_Y}{\|x\|_X} = \|R\|$,

czyli $\|Rx\|_Y \le \|R\|\cdot\|x\|_X$.

Korzystając z tego dwa razy mamy

$$\forall_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \|(S\circ T)(x)\|_Z = \|S(T(x))\|_Z \le \|S\|\cdot\|Tx\|_Y \le \|S\|\cdot\|T\|$$

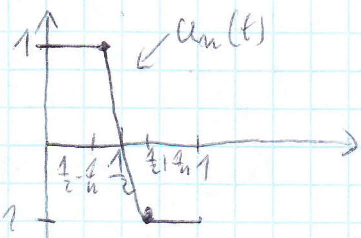
A zatem

$$\|S\circ T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \|(S\circ T)x\|_Z \le \|S\|\cdot\|T\|$$

Zadanie N2

Pokażemy, że $\|\varphi\|=1$. Mamy $\forall_{\|u\|_\infty\le 1} |\varphi(u)| \le |\int_0^{\frac{1}{2}} u(t)dt| + |\int_{\frac{1}{2}}^1 u(t)dt| \le$ (*)
$\le \int_0^1 |u(t)|dt \le \|u\|_\infty \int_0^1 dt \le 1$. Znajdziemy teraz ciąg $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C[0,1]$, t., że $|\varphi(u_n)| \to 1$, a stąd będzie $|\varphi(u_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Zdefiniujmy $u_n = \begin{cases} 1, & t \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ -nt + \frac{n}{2}, & t \in (\frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}) \\ -1, & t \ge \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \end{cases}$:



Wówczas $|\varphi(u_n)| = |\frac{1-\frac{1}{n}}{2} + \frac{1-\frac{1}{n}}{2}| = |1-\frac{1}{n}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Zatem $\|\varphi\|=1$.

Pokażemy, że nie istnieje takie u, że $\varphi(u) = \|\varphi\|$.

1/1

Gdyby takie istniało to musiałaby zachodzić równość w nierównościach (*). W szczególności $\int_0 |u(t)|dt = 1$. Pokażemy, że stąd i z tego, że $\|u\|_\infty \le 1$ wynika, że $|u(t)| \equiv 1$.

Gdyby tak nie było to $\exists_{t_0} |u(t_0)| < 1$. Z ciągłości mielibyśmy, że $\exists_{I\text{-przedział}} \forall_{t\in I} |u(t)| < 1$. Stąd $\int_I |u(t)|dt < \lambda(I)$. A zatem $\int_0^1 |u(t)|dt =$
$= \int_I |u(t)|dt + \int_{[0,1]\setminus I} |u(t)|dt < \lambda(I) + \lambda([0,1]\setminus I) = 1$; sprzeczność. Stąd $|u(t)|=1$, a jedynymi takimi f. ciągłymi są $u_1(t)\equiv 1$ i $u_2(t)\equiv -1$.

łatwo sprawdzić, że $\varphi(u_1) \neq 1$, $\varphi(u_2) \neq 1$