AF Tutorial 1

15.10.2020

$(X, \|\cdot\|_X)$, X to przestrzeń liniowa, $\|\cdot\|$ to norma.
nad ciałem $\mathbb{K}$ (najczęściej $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$$

Krysiek

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(X, \|\cdot\|)$ – p. Banacha gdy $(X, \|\cdot\|)$ jest zupełna

Topologia na X dana przez metrykę $d(x,y) = \|x-y\|$.

Zadanie A1

$\left(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty \right)$, $\quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad$ to jest przestrzeń Banacha

$\left(C((0,1)), \|\cdot\|_\infty \right)$? $\quad$ (to są $f: (0,1) \to \mathbb{R}$) $\quad$ Wojtek

$f = \frac{1}{x} \in C((0,1))$ $\quad \left\|\frac{1}{x}\right\|_\infty = \infty$ $\quad$ <u>NIE</u>

$\left(C(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty \right)$? $\quad f(x) = x \in C(\mathbb{R})$, $\quad \|x\|_\infty = \infty$

A2 $\left(C^1[0,1], |f|_{C^1}\right)$ $\qquad |f|_{C^1} = \|f'\|_\infty$

to jest przestrzeń unormowana?

$f(x) = c \to$ stała

$f \neq 0$ ale $|f| = 0$.

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Czyli nie.

(A3) $(X, \|\cdot\|)$ – p. unormowana

(x_n) – ciąg Cauchy'ego

(ia) (x_n) jest ograniczony, tzn $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.

$$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{N_\varepsilon} \; \forall_{n,m \geq N_\varepsilon} \quad \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Biorę $\varepsilon = 1$ $\quad \|x_k\| \leq \|x_{N_1} - x_k\| + \|x_{N_1}\|$

$$\leq \varepsilon + \|x_{N_1}\| \quad \forall_{k \geq N_1}$$

gdy: $k < N_1$ $\quad \|x_k\| \leq \sup_{i < N_1} \|x_i\| < \infty$

skończone bo po sk. wielu wyr.

(B) (x_n) - CC $\quad x_{n_k} \longrightarrow x$ w $(X, \|\cdot\|)$

$\Rightarrow \quad x_n \longrightarrow x.$

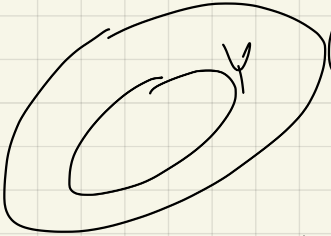
$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{M} \ \forall_{n_k \geq M} \quad \| x_{n_k} - x \| \leq \varepsilon.$$

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{N} \ \forall_{n, m \geq N} \quad \| x_n - x_m \| \leq \varepsilon.$$

$$\forall_{n \geq \max(N, M)} \quad \|x_n - x\| \leq \| x_n - x_{n_k} \| + \|x_{n_k} - x\| \leq 2\varepsilon.$$

gdzie $x_{n_k} \geq \max(N, M)$, ✓

A4



$(X, \|\cdot\|_X)$ $\quad$ $(Y, \|\cdot\|_X)$ jest p. Banacha $\iff$ Y jest domknięte w X

Mateusz. :)

D-d: $(\Rightarrow)$ $(y_n) \subset Y$, $y_n \to x$, $x \in X$. Chcę $x \in Y$.

Pon. (y_n) zb. $\Rightarrow$ (y_n) ciąg Cauchy'ego $\Rightarrow$ y_n zbiega w Y $\Rightarrow$ $x \in Y$.

$\square$.

$(\Leftarrow)$ $(y_n) \subset Y \subset X$ jest ciągiem Cauchy'ego. $y_n \to x$ $\exists_{x \in X}$.

Pon. Y jest domknięte, granica $x \in Y$.

A5 Zbieżność szeregów

Szereg $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ zbiega gdy ciąg $S_N = \sum_{k=1}^{N} x_k$ jest zbieżny w X.

Szereg $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ zbiega absolutnie gdy $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$.

$(X, \|\cdot\|)$ jest Banacha $\iff$ każdy szereg zbieżny absolutnie jest zbieżny.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że X jest B.
Weźmy szereg t. że $\sum \|x_k\| < \infty$ (Janek)

$$S_N - S_M = \sum_{k=M+1}^{N} x_k \quad \Rightarrow$$ (Maurycy).

$(N > M)$

$$\|S_N - S_M\| \leq \sum_{k=M+1}^{N} \|x_k\| \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow \{S_N\}$ jest ciągiem Cauchy'ego gdy $M, N \to \infty$

A z tego teza bo X jest Banacha.

($\Leftarrow$) Wiemy, że $\sum \|x_k\| < \infty \Rightarrow \sum x_k$ zbiega w X. $\underset{\text{ciągu}}{\forall}$

Chcemy, że X jest Banacha.

Weźmy ciąg Cauchy'ego $(x_n) \subset X$. Mamy pokazać, (Janek) że x_n jest zbieżny w X. Wystarczy znaleźć zbieżny (Wojtek) podciąg (x_{n_k}).

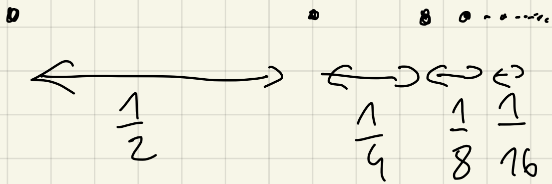
$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{n,m \geq N_\varepsilon}{\forall} \quad \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \qquad \varepsilon = 2^{-k}$$

$$\{x_{n_k}\} \text{ t. że } \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k} \Rightarrow \sum \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty$$

$\Rightarrow \sum x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ jest zb. w X, Sumy częściowe to $x_{n_{k+1}} - x_{n_1}$

Wiemy, że $x_{n_{k+1}} - x_{n_1} \longrightarrow y$ w X $\Rightarrow$ $x_{n_{k+1}} \longrightarrow y + x_{n_1}$.

$\square$.



L^p:

$L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ — miara (σ-skończona)

X — przestrzeń mierzalna, $\mathcal{F}$ — σ-ciało

$L^p(\Omega)$ jeżeli μ to miara Lebesgue'a, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$f \in L^p(\Omega)$ tzn: $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}. \qquad 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{esssup}_{x\in\Omega} |f(x)|, \qquad p = \infty$$

$L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ jest przestrzenią Banacha.

Nierówność Höldera:

$$\int_X |fg| \, d\mu(x) \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^{p'} \, d\mu(x) \right)^{1/p'}$$

gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(Puenta: $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ $\Rightarrow$ $fg \in L^1$)

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

B1 $\quad \mu(X) < \infty \qquad L^p(X, \mathcal{F}, \mu) \subset L^q(X, \mathcal{F}, \mu) \qquad p \geq q$

$$f \in L^p \Rightarrow f \in L^q$$

$$\int |f|^q = \int |f|^q \cdot 1 = \left(\int |f|^p\right)^{q/p} \underbrace{\left(\int 1^{(\dots)}\right)^{\frac{p-q}{p}}}_{\mu(X)} \leq$$

$|f|^p \qquad \cdot\frac{p}{q}$

$$1 = \frac{1}{p/q} + \frac{1}{?}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{?} = 1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p}$$

$$? = \frac{p}{p-q}.$$

Hölder

$$\int |fg| \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \left(\int |g|^q\right)^{1/q}$$

$$p = \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow \int |f|^q \leq \left(\int |f|^p\right)^{q/p} \cdot \mu(X)^{p-q/p} \quad \Big/ \, ^{1/q}$$

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p \, \mu(X)^{p-q/pq}.$$

$\mu(X) = \infty$

$L^2(1,\infty)$ czyli $\displaystyle\int_1^\infty f^2(x)\,dx < \infty.$

Szukamy $f \in L^2(1,\infty)$ ale $f \in L^1(1,\infty)$

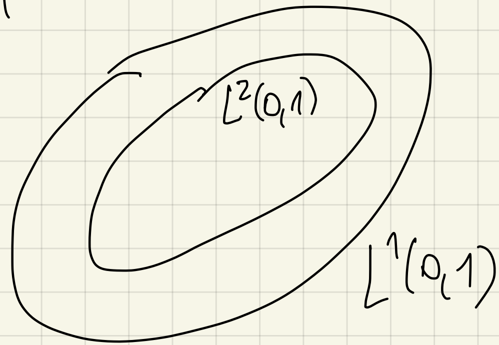
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \infty$ ale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty.$

B2 $(L^2(0,1), \|\cdot\|_1)$ – to jest unorm ?
– to jest Banacha ?

$f \in L^2(0,1)$ czyli $\int_0^1 f^2 dx < \infty$.

Czy jest unormowana: tak bo norma jest skończona

Czy jest Banacha:

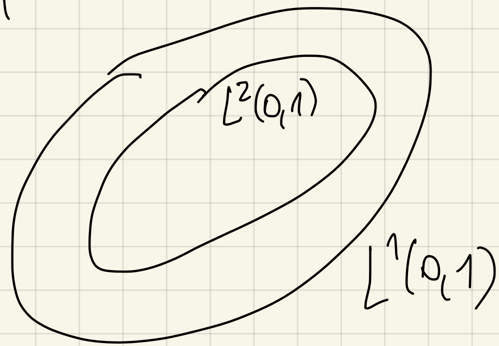


Gdyby $(L^2(0,1), \|\cdot\|_1) \implies$

to $L^2(0,1), \|\cdot\|_1$ jest domkn.

y | |

Czy jest Banacha :



Gdyby $(L^2(0,1), \|\cdot\|_1) \Rightarrow$

to $L^2(0,1), \|\cdot\|_1$ jest domkn.

$\{f_n\} \subset L^2(0,1)$ $\quad f_n \longrightarrow f$ względem $\|\cdot\|_1$ ale $f \notin L^2(0,1)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad f_n = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{|x| \geq \frac{1}{n}}$ $\qquad$ (Bartek)

$f_n \to f$ w L^1 bo : $\underbrace{\int |f_n - f|}_{\| \; \int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{|x| \leq \frac{1}{n}}} \to 0$ $\quad \to 0$

$\nearrow$ z DCT bo $\frac{1}{\sqrt{x}}$ jest majoranta

B3 $\rightsquigarrow$ domowe

Funkcje ciągłe, ...

C1 $\left(C^1[0,1], \|\cdot\|_{C^1}\right)$ $\quad \|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

To jest przestrzeń unormowana.

To jest przestrzeń Banacha.

$$(f_n) \subset C^1[0,1]$$

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{N_\varepsilon} \ \forall_{n,m \geq N_\varepsilon} \quad \|f_n - f_m\|_\infty + \|f_n' - f_m'\|_\infty \leq \varepsilon.$$

$\left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ jest zupełna (wykł.). $\Rightarrow$ $\{f_n\}, \{f_m'\}$ są zbieżne w $\left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$

f_n, f_n' są zbieżne w $C[0,1], \|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow \exists_{g,h \in C[0,1]}$ $\quad f_n \longrightarrow g$

$\quad f_n' \rightarrow h$

(Filip)

Do szczęścia chcemy że $g \in C^1[0,1]$, $g' = h$.

$$f_n(t) = f_n(0) + \int_0^t f_n'(s)\,ds$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

bo f_n' zbiega jednostajnie

$$g(t) = g(0) + \int_0^t h(s)\,ds$$

$g \in C^1[0,1]$ $\qquad g' = h.$

$\square$.

(C2) $\mathcal{P}$ = przestrzeń wielomiany na $[0,1]$

$$(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty) \subset (C[0,1], \|\cdot\|_\infty).$$

czy to jest przestrzeń Banacha?

(Janek).

Wiemy, że $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Ten szereg zbiega bezwzględnie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x^k\|_\infty}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e^1 < \infty$,

Gdyby $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty)$ było p. Banacha $\Rightarrow$

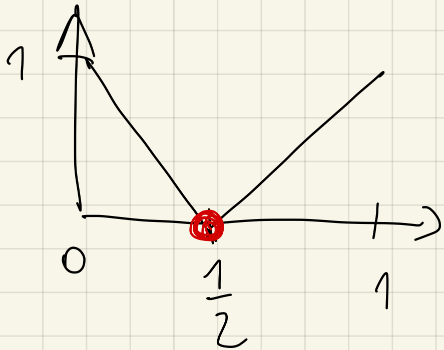
$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}_{} \in \mathcal{P} \Rightarrow e^x \in \mathcal{P}$$

$\square$.

(C3) $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

nie widzi pochodnej.



$= f \in C[0,1]$.

z tw. S–W istnieje p_n wielomiany

$\|p_n - f\|_\infty \to 0$ przy $n \to \infty$,

Mam ciąg zbieżny względem normy ale $f \notin C^1$.

(C4) $\to$ zadanie domowe