AF Tutorial 10

7.01.2021

A7/PS6

E - pn. unormowana

$J: E \to E^{**}$

$$\underbrace{(J\overbrace{x}^{\in E})}_{\in E^{**}}\underbrace{(\varphi)}_{\in E^{*}} = \underbrace{\varphi}_{\in E^{*}}\underbrace{(x)}_{\in E}$$

przed świętami

- J jest dobrze zdefiniowany
- $\|Jx\|_{E^{**}} = \|x\|_E$
- J jest iniekcją

$Jx = 0 \Rightarrow x = 0$

(wynika z)

Do szczęścia brakuje: J jest surjekcją

E refleksywna gdy J jest surjekcją. $\quad E^{**} = E$

zawsze: $\qquad E^{**} \supset E$

dla E refl.: $\qquad E = E^{**}$

(B) H – p. Hilberta. Wówczas H refleksywna.

$(Jx)(\varphi) = \varphi(x)$ $\quad$ Chcemy, żeby J było surjekcją

$J : H \longrightarrow H^{**}$. Czyli $\forall_{\psi \in H^{**}} \ \exists_{x \in H} \ Jx = \psi$

$J: H \longrightarrow H^{**}$. Czyli $\forall_{\psi \in H^{**}} \ \exists_{x \in H} \ Jx = \psi$

$P: H^{*} \to H$ (z tw. Riesza)

$P(\varphi)$ to taki element, że $\varphi(x) = \langle P(\varphi), x \rangle$

$\psi \circ P^{-1} \in H^{*}$

$\hookrightarrow \ \exists_{a_\psi} \quad \psi \circ P^{-1}(x) = \langle a_\psi, x \rangle$

$x = a_\psi$.

$$\underset{\in H^{**}}{\psi}(\underset{\in H^{*}}{\varphi}) = \psi(P^{-1}(b_\varphi)) = \langle a_\psi, b_\varphi \rangle = \varphi(a_\psi) = (Ja_\psi)(\varphi)$$

$\Rightarrow \ \psi = Ja_\psi$.

■

Jeszcze raz dokładniej CZĘŚĆ (B)

Z tw. Riesza wiemy, że istnieje $P: H^* \to H$, $\|P\| = 1$, P jest bijekcją między H^* i H. Mamy

$$\big(\underbrace{P^{-1}\underbrace{x}_{\in H}}_{\in H^*}\big)(\underbrace{y}_{\in H}) = \langle \underbrace{x}_{\in H}, \underbrace{y}_{\in H} \rangle$$

Ustalmy $\Psi \in H^{**}$. Mamy znaleźć a_φ że $\Psi = J a_\varphi$, to znaczy

$\forall_{\varphi \in H^*}$ $\underline{\Psi(\varphi) = \varphi(a_\varphi)}$ $(*)$ (bo $(J a_\varphi)(\varphi) = \varphi(a_\varphi)$).

Każdy φ możemy zapisać jako $P^{-1}(b_\varphi)$ dla pewnego $b_\varphi \in H$

VERTE $\longrightarrow$

Zatem
$$\Psi(\varphi) = \Psi(p^{-1}(b_\varphi)). \quad (*)$$

Dalej, złożenie $\Psi \circ p^{-1}$ jest w H^* (mamy $p^{-1}: H \to H^*$ oraz $\Psi: H^* \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$). Zatem istnieje a_Ψ że $\forall_{x \in H}$
$$(\Psi \circ p^{-1})(x) = \langle x, a_\Psi \rangle$$

Wracając do $(*)$ $\Psi(\varphi) = \Psi(p^{-1}(b_\varphi)) = \langle b_\varphi, a_\Psi \rangle = \varphi(a_\Psi)$

bo b_φ był reprezentantem φ z tw. Riesza. To dowodzi $(*)$.

Może się zdarzyć że E^{**} jest izomorficzne z E ale nie jest refleksywne.

(~50).

(c) $\underbrace{E \text{ refleksywna}} \Rightarrow E$ jest Banacha.

$J: E \to E^{**}$ $\qquad \|Jx\|_{E^{**}} = \|x\|_E$

Banacha

(x_n) ciąg Cauchy'ego w E

$$\| x_n - x_m \|_E = \| Jx_n - Jx_m \|_{E^*}$$

$\Rightarrow \{Jx_n\}$ jest ciąg. Cauchy'ego w E^{**}

$$\Rightarrow \exists_{\psi \in E^{**}} \; Jx_n \to \psi \underset{\text{refl.}}{=} Jy$$

$\psi \overset{?}{\in} E^{**}$

$$\| x_n - y \|_E = \| Jx_n - Jy \|_{E^{**}} \to 0 \,.$$

CEL:

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, A symetryczna to istnieje baza ortonormalna wektorów własnych.

$$Ax = \sum \underbrace{Ae_j} \langle x, e_j \rangle = \sum \lambda_j e_j \langle x, e_j \rangle$$

wektory własne.

$\boxed{1 / PS9}$

$A \in L(H, H)$

$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ nie jest odwracalne} \}$

Motywacje: λ wart. własne

e wekt. własny

$Ae = \lambda e \Rightarrow (A - \lambda I) e = 0$

$\Rightarrow A - \lambda I$ nie może być odw.

1/ PS9

$(A-\lambda I)$ jest nieodwracalny

$\iff$ $(A-\lambda I)$ nie jest iniekcją

$\Downarrow$

$\exists_{x \neq 0} \; (A-\lambda I)x = 0$

$\Updownarrow$

(PUNKTOWE)

$Ax = \lambda x$

x – wektor własny

λ – wart. własna

LUB

$(A-\lambda I)$ jest iniekcją ale nie surjekcją

$\Downarrow$

obraz $(A-\lambda I) \neq H$.

lepszy scen.

obraz $(A-\lambda I)$ jest gęsty w H

(CIĄGŁE WIDMO)

gorszy scen.

obraz $(A-\lambda I)$ jest domknięte podprzestrz.

(RESIDUALNE)

2/PS9

$A \in \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

A jest iniekcją $\Longleftrightarrow$ A jest surjekcją.

wymiar jądra B + wymiar obrazu B = wymiar całej przestrzeni

(rank-nullity theorem $\to$ na Wikipedii prosty dowód).

$(A-\lambda I)$ jest iniekcją $\Rightarrow$ $\ker A-\lambda I$ ma wymiar 0

$\Rightarrow$ wymiar obrazu $A-\lambda I$ ma n.

$\boxed{3/PS9}$ $\quad \forall_{T \in L(H,H)} \quad |\sigma(T)| \leq \|T\|.$

Na wykładzie: $I-T$ jest odwracalny gdy $\underbrace{\|T\| < 1}$

$$\left((I-T)^{-1} = \sum_{k \geq 0} T^k \right)$$

ten warunek implikuje zbieżność szeregu.

$$T - \lambda I = -\lambda \left[I - \frac{T}{\lambda} \right]$$

operator odwracalny $\quad \left\| \frac{T}{\lambda} \right\| < 1 \iff \|T\| < |\lambda|.$

$\Rightarrow \quad |\sigma(T)| \leq \|T\|.$

$\mathbb{C} \setminus \sigma(T) = \rho(T)$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$

rezolwenta

$\Rightarrow \sigma(T)$ jest domknięte

Z tego co powyżej $\sigma(T)$ jest ograniczone

$\Downarrow$

$\sigma(T)$ jest zwarte :)

W zasd. ogólnym: $K \subset \mathbb{C}$ zwarty jest spektrum pewnego operatora.

5/ p59

$$M : L^2(0,1) \to L^2(0,1) \qquad Mf(x) = x \cdot f(x)$$

Znajdziemy $\sigma(M)$.

(1) wartości własne: czy M jest iniekcją.

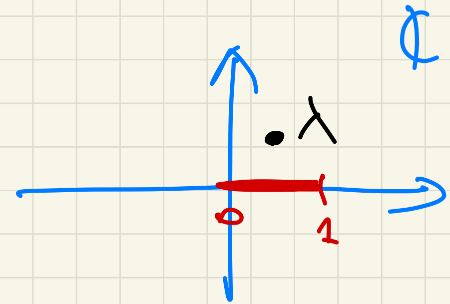
$\exists_{\lambda \in \mathbb{C}} \exists_{f \in L^2(0,1),\ f \neq 0}$ $\quad Mf = \lambda f \iff x f(x) = \lambda f(x)$

$\iff (x-\lambda) f(x) = 0 \quad \forall_{\text{p.w. } x \in (0,1)}$

$\Rightarrow f = 0$ bo $x - \lambda \neq 0$ dla $x \neq \lambda$.

WART. WŁASNYCH NIE MA :(

(2) Czy M jest surjekcją?



$$(M-\lambda I)f(x) = (x-\lambda)f(x)$$

Próbujemy $(M-\lambda I)^{-1} f = \frac{1}{x-\lambda} f(x)$

$$(M-\lambda I)^{-1}\underbrace{(M-\lambda I)f(x)}_{(x-\lambda)f(x)} = \frac{1}{x-\lambda}(x-\lambda)f(x) = f(x).$$

Dla $\lambda\notin[0,1]$ to to działa $\quad \inf\limits_{x\in[0,1]}|x-\lambda| \geq c > 0$

$|Mf(x)| \leq \frac{1}{c}|f(x)|.$ $\Rightarrow$ istotnie $M-\lambda I$ jest odwracalny dla $\lambda\notin[0,1]$.

Gdy $\lambda \in [0,1]$ dla $f(x)=1$ chcemy pok. że NIE ISTN

$g \in L^2(0,1)$ $\quad (M-\lambda I)g = 1$

$$\Updownarrow$$

$$(x-\lambda)g(x) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$g(x) = \frac{1}{x-\lambda} \notin L^2(0,1)$ dla $\lambda \in (0,1)$.

$\lambda = 0$ $\quad \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \infty$, dla $\lambda \in (0,1)$ zamiana zmiennych.

$\sigma(M) = [0,1]$,

$\parallel$

Spektrum ciągłe tzn. obraz $(M - \lambda I)$ jest gęsty w $L^2(0,1)$.

$f \in L^2(0,1)$. Muszę znaleźć $g_n \to f$ w $L^2(0,1)$

g_n jest w obrazie $M - \lambda I$.

$$g_n(x) = \mathbb{1}_{|x-\lambda| \geq \frac{1}{n}} f(x)$$

$g_n = (M - \lambda I) h_n$ dla $h_n(x) =$

$$g_n(x) = 1\!\!1_{|x-\lambda| \geq \frac{1}{n}} f(x)$$

g_n jest w obrazie $M-\lambda I$ bo

$$g_n(x) = (M-\lambda I)\, h_n(x) = (x-\lambda)\, h_n(x) \quad \text{dla}$$

$$h_n(x) = \frac{g_n(x)}{x-\lambda} \in L^2(0,1) \quad \text{bo się odcięliśmy od}$$

singularności.

$g_n \to f$ w $L^2(0,1)$?

$g_n \to f$ punktowo dla p.w. $x \in (0,1)$

$\exists_h \quad |g_n(x)| \le h \qquad h\cancel{(x)} \in L^2(0,1)$

$\Rightarrow \; g_n \to f$ w $L^2(0,1)$. (tw. o zbieżności zmajoryzowanej).

U nas $\quad |g_n| \le f \;$ i $\; f \in L^2(0,1)$.

Operator sprzężony: $T \in L(H,H)$ $T: H \to H$

T^* jest zdefiniowany $T^*: H \to H$.

$$\forall_{x,y \in H} \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle.$$

$\| $ z tw. Riesza

$$\langle x, a_y \rangle \qquad T^* y = a_y$$

bo $x \mapsto \langle Tx, y \rangle \in H^*$

T^* jest ~~zdolne~~ dobrze zdef.,

T^* jest ograniczony $\quad \|T^*\| = \|T\|$

$T^{**} = T$

$(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$

Sprzężenie ma uogólniać transpozycję macierzy nad $\mathbb{R}$.

$(AB)^T = B^T A^T$ (sprzężenie hermitowskie nad $\mathbb{C}$).

A4 / PS9

$$(T_1+T_2)^* = T_1^* + T_2^*$$

$x, y \in H$

$$\langle (T_1+T_2)x, y\rangle = \langle T_1 x, y\rangle + \langle T_2 x, y\rangle =$$

$$= \langle x, T_1^* y\rangle + \langle x, T_2^* y\rangle = \langle x, (T_1^* + T_2^*)y\rangle.$$

$$\lambda \langle x, y\rangle = \langle x, \bar{\lambda} y\rangle.$$

bo $\bar{1} = 1.$

$$a\langle x, y\rangle + b\langle x, z\rangle = \langle x, \bar{a}y + \bar{b}z\rangle.$$

$\boxed{A5 / PS10}$ $$(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$$

$$\langle \lambda T x, y \rangle = \lambda \langle T x, y \rangle = \lambda \langle x, T^* y \rangle = \langle x, \overline{\lambda} T^* y \rangle.$$

$$\forall_{x,y} \quad \langle T x, y \rangle = \langle x, S y \rangle \Rightarrow T^* = S$$

B1/PS10

$A \in \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad A^* = \overline{A}^T$

$\forall_{x,y \in \mathbb{C}^n} \quad \langle Ax, y \rangle = (Ax)^T \cdot \overline{y} = x^T A^T \cdot \overline{y} = x^T \overline{\left(\overline{A}^T y\right)} = \langle x, \overline{A}^T y \rangle .$

iloczyn skalarny (euklidesowy) na $\mathbb{C}^n$

$\langle x, y \rangle = x^T \cdot \overline{y}$

$\Downarrow$

$A^* = \overline{A}^T$

B2/ PS10 Shifty

$\ell^2(\mathbb{Z})$ $\qquad (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |x_i|^2 < \infty.$$

$$(Rx)_k = x_{k-1} \qquad R^* = L$$

$$(Lx)_k = x_{k+1}. \qquad L^* = R$$

$\underline{R^* = L}$ $\quad \forall x, y \in l^2(\mathbb{Z})$

$$\langle Rx, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (Rx)_k \cdot \overline{y_k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{k-1} \overline{y_k} =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{k-1} \overline{(Ly)_{k-1}} = \langle x, Ly \rangle . \quad \Rightarrow R^* = L$$

$L^* = R$ bo $R^* = L \Rightarrow R^{**} = L^* \Rightarrow \underline{R = L^*}.$

B4 / PS 10

$M \subset H$ domkn. podprostorů

$(P_M)^* = ?$

$P_M^* = P_M$

$\forall_{x,y \in H}$

$y = y_M + y_{M^\perp}$

$\langle P_M x, y \rangle = \langle P_M x, y_M \rangle + \underbrace{\langle P_M x, y_{M^\perp} \rangle}_{=0}$

$= \langle P_M x, P_M y \rangle = \langle x - P_{M^\perp} x, P_M y \rangle =$

$= \langle x, P_M y \rangle - \underbrace{\langle P_{M^\perp} x, P_M y \rangle}_{=0} = \langle x, P_M y \rangle$

P_M jest samosprzężony (macierze symetryczne)

Dla operatorów samosprzężonych:

$\rightarrow$ $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$

$\rightarrow$ wektory własne z różnych wartości własnych są prostopadłe druga własności:

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(λ_1, e_1)
(λ_2, e_2) $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\frac{1}{\lambda_1}\langle \lambda_1 e_1, e_2\rangle = \frac{1}{\lambda_1}\langle Te_1, e_2\rangle =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1}\langle e_1, Te_2\rangle =$$

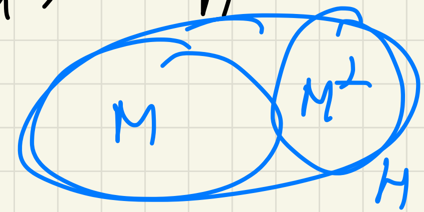
$$= \frac{1}{\lambda_1}\langle e_1, \lambda_2 e_2\rangle = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\langle e_1, e_2\rangle$$

$$\frac{1}{\lambda_1}\langle \lambda_1 e_1, e_2\rangle = \langle e_1, e_2\rangle$$

$\Rightarrow \langle e_1, e_2\rangle = 0.$

C3/PS10

$P_M : H \to H$ $\qquad (P_M)^* = P_M$



$\sigma(P_M) = ?$ $\qquad \lambda \in \mathbb{C}$

$P_M - \lambda I$ nie jest odwracalny dla

- $\lambda = 0$ $\qquad P_M - \lambda I = P_M \longrightarrow$ weźmy $y \in M^\perp$, $y \neq 0$.

  $(P_M - \lambda I)y = 0$

  wektor własny

- $\lambda = 1$ $\qquad P_M - \lambda I = -P_{M^\perp}$

  weźmy $y \in M$, $y \neq 0$

  $(P_M - \lambda I)y = 0$.

$\{0,1\} \in \sigma(P_M)$.

$P_M - \lambda I \quad (\lambda \neq 0,1)$

$\longrightarrow$ iniekcja $\quad (P_M - \lambda I)x = 0 \Rightarrow P_M x = \lambda x \Rightarrow$

przyłożymy P_M: $\quad \underbrace{P_M x = \lambda P_M x}$ $\quad (1-\lambda) P_M x = 0$

$\Rightarrow \boxed{P_M x = 0}$

przyłożymy $P_{M^\perp}$: $\quad \underbrace{P_{M^\perp} P_M x}_{=0} = \lambda P_{M^\perp} x$

$\Rightarrow \boxed{P_{M^\perp} x = 0.}$

$\Rightarrow x = 0$

$\to$ $P_M - \lambda I$ jest surjekcją:

$\forall_{x \in H} \; \exists_{y \in H} \quad (P_M - \lambda I)(y) = x \qquad P_M y - \lambda y = x$

1) P_M: $\quad P_M y - \lambda P_M y = P_M x$

$$\Rightarrow \quad P_M y = \frac{P_M x}{(1-\lambda)}$$

2) $P_{M^\perp}$: $\quad 0 - \lambda P_{M^\perp} y = P_{M^\perp} x \quad \Rightarrow \quad P_{M^\perp} y = \frac{-P_{M^\perp} x}{\lambda}$

$\sigma(P_M) = \{0, 1\}.$ $\qquad y := \frac{P_M x}{1-\lambda} - \frac{P_{M^\perp} x}{\lambda}.$ $\quad$;)