AF Tutorial 11

14.01.2021

4/ PS9

$\exists \{x_n\}$ $\exists$ $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ ciąg liczb $\|Ax_n\| \leq \varepsilon_n \|x_n\|$

(A to operator), $(A : H \to H)$

Wówczas A nie jest odwracalny

D-d: Jeżeli A byłby odwracalny to A^{-1} byłby ogr.

$$\|A x_n\| \leq \varepsilon_n \|x_n\| \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_n} \leq \frac{\|x_n\|}{\|Ax_n\|} = \frac{\|A^{-1}(Ax_n)\|}{\|Ax_n\|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_n} \leq \|A^{-1}\| \Rightarrow \text{sprzeczność}$$

6 / PS 9

$$A: l^2 \to l^2$$

$$A(x_1, x_2, \dots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right)$$

Łatwo spr. że A jest ogr. w $l^2 \to l^2$.

Znajdziemy $\sigma(A)$.

① zaczynamy od jądra (wartości własnych)

$$(A - \lambda I)x = 0 \qquad \text{dla } x \neq 0.$$

$$A(x_1, x_2, \dots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right)$$

$$(A - \lambda I)x = 0 \iff Ax = \lambda x$$

$$\left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$$

$$\Rightarrow \lambda x_1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ lub } x_1 = 0, \lambda \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0$$

(idąc po współrzędnych)

$$x_2 = 0, \; x_3 = 0, \dots$$

$\Rightarrow$ WNIOSEK: nie ma wartości własnych.

$(A-\lambda I)$ jest zawsze iniekcją

(2) Czy $A-\lambda I$ jest surjekcją? $\lambda \neq 0$

$$\forall_{y \in l^2} \ \exists_{x \in l^2} \ (A-\lambda I)x = y. = (y_1, y_2, y_3, \dots)$$

$$(A-\lambda I)x = \Big(\underbrace{-\lambda x_1}_{= y_1}, \underbrace{x_1} - \lambda x_2, \frac{x_2}{2} - \lambda x_3, \dots, \underbrace{\frac{x_k}{k} - \lambda x_{k+1}}_{k+1 \,=\, y_{k+1}}, \dots\Big)$$

$$\begin{cases} -y_1 = \lambda x_1 \\ y_{k+1} = \dfrac{x_k}{k} - \lambda x_{k+1} \end{cases}$$

Ustalmy $y \in \ell^2$.

Mamy znaleźć $x \in \ell^2$.

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{y_1}{\lambda} \\ x_{k+1} = \dfrac{x_k}{k\lambda} - \dfrac{y_{k+1}}{\lambda} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ ten układ ma rozwiązanie

ALE czy $x \in \ell^2$?

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{k\lambda} - \frac{y_{k+1}}{\lambda} \qquad (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

Fix $n, m \geq N$

$$\sum_{k=n}^{m} |x_{k+1}|^2 \leq \underbrace{2 \sum_{k=n}^{m} \frac{x_k^2}{k^2\lambda^2}}_{\leq \frac{2}{\lambda^2 N^2} \sum_{k=n}^{m} x_k^2} + \underbrace{\sum_{k=n}^{m} \frac{y_{k+1}^2}{\lambda^2}}_{\leq \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2}$$

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} |x_k|^2 \leq \frac{2}{\lambda^2 N^2} \sum_{k=n}^{m+1} x_k^2 + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$$

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} |x_k|^2 \le \underbrace{\frac{2}{\lambda^2 N^2} \sum_{k=n}^{m+1} x_k^2} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$$

$$-\frac{2}{\lambda^2 N^2} x_n^2 + \left(1 - \frac{2}{\lambda^2 N^2}\right) \sum_{k=n+1}^{m+1} |x_k|^2 \le \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$$

$m \to \infty$ $\qquad$ $(n, m \ge N)$

$$-\frac{2}{\lambda^2 N^2} x_n^2 + \left(1 - \frac{2}{\lambda^2 N^2}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \le \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 .$$

$$-\frac{2}{\lambda^2 N^2}x_n^2 + \underbrace{\left(1-\frac{2}{\lambda^2 N^2}\right)}\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^2 \le \frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 .$$

N wybieramy t. że $1-\frac{2}{\lambda^2 N^2} \ge \frac{1}{2}$

$$-\frac{2}{\lambda^2 N^2}x_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^2 \le \frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 < \infty .$$

$\Rightarrow \sigma(A) \subset \{\lambda = 0\}.$

$$A(x_1, x_2, \dots) = \left(\underbrace{0}, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right)$$

$A - \lambda I = A$ dla $\lambda = 0$.

A nie jest bijekcją na ℓ^2 bo obraz $A = \{(0, x_1, x_2, \dots) ;\ x \in \ell^2\}$

$\sigma(A) = \{0\}.$

Puenta: A ma spektrum czysto residualne.

Jakby $\sigma(T)$ było puste to

$$\mathbb{C} \ni \lambda \longmapsto L(H,H)$$

$$\lambda \longmapsto (T-\lambda I)^{-1} \sim \frac{1}{\lambda} \text{ w } L(H,H)$$

(oszacowanie resolwenty)

$$\left| \frac{1}{T-\lambda I} \right| \sim \frac{1}{\lambda}.$$

byłoby ograniczone i holomorficzne.

(gwiazdka w/o tematu).

13/PS9

$\ell^2(\mathbb{Z})$

$x = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$

$R^* = L$

$L^* = R$

$R^{-1} = L$

$L^{-1} = R$

$Rx = (\ldots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)$

$Lx = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$

$\|R\| = \|L\| = 1$

$\sigma(R) = ?$ $\quad \sigma(L) = ?$

$$x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$$

$$Rx = (\dots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$$

(1) R - iniekcja $\quad Rx = \lambda x \quad (x \neq 0)$

$$(Rx)_k = (\lambda x)_k$$
$$\parallel$$
$$x_{k-1} = \lambda x_k$$

$x \notin \ell^2$

o ile $x_0 \neq 0$

gdy $x_0 = 0 \Rightarrow x = 0.$

$$x = \left(\dots, \lambda^2 x_0, \lambda x_0, x_0, \frac{x_0}{\lambda}, \frac{x_0}{\lambda^2}, \frac{x_0}{\lambda^3}, \dots \right)$$

(2) surjekcja: spróbujemy odwrócić $R-\lambda I$.

($I-T$ jest odwr. gdy $\|T\|<1$)

$$R-\lambda I = -\lambda\left(I-\frac{R}{\lambda}\right) \text{ odwr gdy } \left\|\frac{R}{\lambda}\right\|<1$$

czyli $|\lambda|>1$.

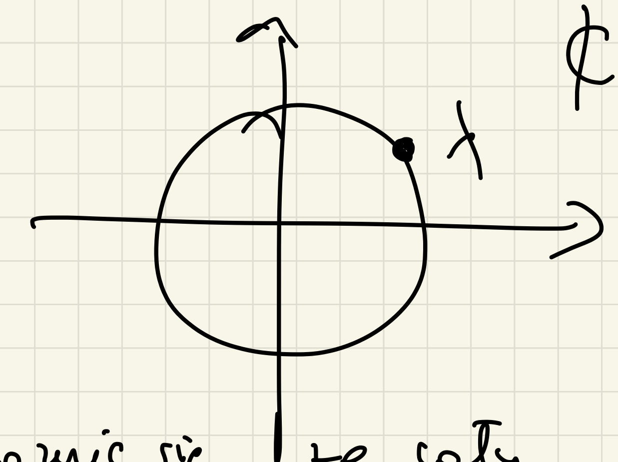
$$R-\lambda I = R-\lambda RL = \underbrace{R}_{\uparrow \text{odwr}}\underbrace{(I-\lambda L)}_{\uparrow \text{odwr}}$$

$\|\lambda L\|<1$ czyli $|\lambda|<1$.

$\sigma(R) \subset \{ |\lambda| = 1 \}$

Rozw. w Internecie:

(1) $\sigma(R)$ jest niepuste



(2) obraca się R i pokazuje się, że cały okrąg musi być w $\sigma(R)$

Na samym początku

$\{x_n\}, \{\varepsilon_n\}, \varepsilon_n \longrightarrow 0$

$$\|(R-\lambda I)x_n\| \leq \varepsilon_n \|x_n\| \qquad |\lambda|=1.$$

$$x_n = (\dots 0, 0, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^2, \bar{\lambda}^3, \dots, \bar{\lambda}^n, 0, 0, \dots)$$

$$\lambda x_n = (\dots, 0, 0, 1, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^2, \dots, \bar{\lambda}^{n-1}, 0, 0, \dots)$$

$$Rx_n = (\dots, 0, 0, 0, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^2, \dots, \bar{\lambda}^{n-1}, \bar{\lambda}^n, 0, \dots)$$

$$(R-\lambda I)x_n = (\dots, 0, 0, -1, 0, 0, \dots, 0, \bar{\lambda}^n, 0, \dots)$$

$$x_n = (\dots 0, 0, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^2, \bar{\lambda}^3, \dots, \bar{\lambda}^n, 0, 0, \dots)$$

$$\lambda x_n = (\dots, 0, 0, 1, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^2, \dots, \bar{\lambda}^{n-1}, 0, 0, \dots)$$

$$R x_n = (\dots, 0, 0, 0, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^2, \dots, \bar{\lambda}^{n-1}, \bar{\lambda}^n, 0, \dots)$$

$$(R - \lambda I) x_n = (\dots, 0, 0, -1, 0, 0, \dots, 0, \bar{\lambda}^n, 0, \dots)$$

$$\|x_n\|_{\ell^2} = n \qquad \|(R-\lambda I) x_n\|_{\ell^2} = 2$$

$$\|(R-\lambda I) x_n\|_{\ell^2} = \frac{2}{n} \|x_n\|_{\ell^2} \quad \Rightarrow \sigma(R) = \{ |\lambda| = 1 \}.$$

$$\sigma(R) = \{\,|\lambda| = 1\,\}.$$

a co z $\sigma(L)$?

sprzężenie

Na wykładzie $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

$$\sigma(L) = \sigma(R^*) = \overline{\sigma(R)} = \{|\lambda|=1\},$$

B5 / PS10

$A: H \to H \qquad A \in L(H, H)$

$$e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} \qquad (e^A)^* = ?$$

(\geq)

$$\langle e^A x, y \rangle = \left\langle \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!} x, y \right\rangle =$$

$$= \sum_{k \geq 0} \left\langle \frac{A^k}{k!} x, y \right\rangle = \sum_{k\geq 0} \left\langle x, \left(\frac{A^k}{k!}\right)^* y \right\rangle$$

$$= \sum_{k \geq 0} \left\langle x, \frac{(A^*)^k}{k!} y \right\rangle = \left\langle x, \sum_{k\geq 0} \frac{(A^*)^k}{k!} y \right\rangle = \langle x, e^{A^*} y \rangle$$

$(A^k)^*$

$(AB)^* = B^* A^*$

$\Downarrow$

$(A^2)^* = (A^*)^2$

$\downarrow$ przez indukcję

$(A^k)^* = (A^*)^k$.

$A \in L(H, H)$

$e^A = \sum \frac{A^k}{k!}$ zbiega w $L(H,H)$

(w szczeg. $\sum \frac{A^k}{k!} x$ zbiega w H)

:)

Dlaczego $\sum \frac{(A^*)^k}{k!} x$ zbieżny

bo $\|A^*\| = \|A\|$.

C4 / PS10

$$M : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$$

$$(Mf)(x) = x\, f(x)$$

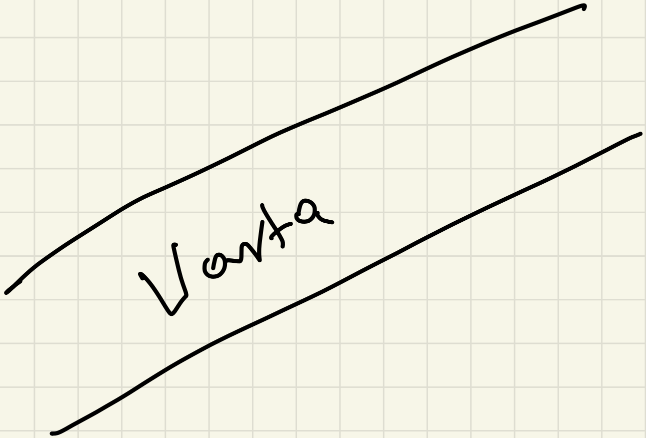
$$(M - \lambda I) f$$
$$\parallel$$
$$(x-\lambda) f$$

$$\sigma(M) = [0,1]$$

(nie można mnożyć przez $\frac{1}{x-\lambda}$)

$$\langle Mf, g \rangle = \langle xf, g \rangle = \int_0^1 x f(x) \overline{g(x)}\, dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\, \overline{x\, g(x)}\, dx = \langle f, Mg \rangle \Rightarrow M^* = M$$



OPERATOR Z WARTY.

Czy operator jest zwarty?

Nie, ale jest z Wisły.

$T: E \to F$ jest zwarty gdy

$\overline{T(B_1(0))}$ jest zwarte w F.

kula jednostkowa w E

dla każdego ciągu z $\overline{T(B_1(0))}$ można wybrać podciąg zbieżny.

A1 $T: E \to F$ jest zwarty to T jest ograniczony

T jest ograniczony gdy $\sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} \underbrace{\|Tx\|_F}_{} < \infty$

coś w obrazie kuli jednostkowej

obraz kuli jednostkowej jest zwarty $\Rightarrow$ obraz kuli jednostkowy jest ograniczony.

A2

Nwsr:

(A) $\overline{T(B_1(0))}$ jest zwarte w F

(B) $\forall_{\{x_n\} \text{ ogr. w } E}$, z $\{Tx_n\}$ można wybrać podciąg zbieżny w F.

(A) $\Leftrightarrow$ (B)

(A) $\Rightarrow$ (B): $y_n := \frac{x_n}{\sup_n \|x_n\|} \in B_1(0) \Rightarrow Ty_n \in \overline{T(B_1(0))}$

zwarte

więc $Ty_{n_k} \to z \Rightarrow Tx_{n_k} \to \sup_n \|x_n\| \cdot z$

z liniowości T.

(A) $\overline{T(B_1(0))}$ jest zwarte w F

(B) $\forall_{\{x_n\} \text{ ogr. w } E}$, z $\{Tx_n\}$ można wybrać ciąg zbieżny w F.

$(B) \Rightarrow (A)$: $\{y_n\} \subset \overline{T(B_1(0))}$. Szukamy zbieżnego y_{n_k}.

Istnieją z_n takie, że $\|y_n - z_n\| \leq \frac{1}{n}$ i $z_n \in T(B(0,1))$.

$z_n = Tx_n$

$x_n \in B(0,1)$

$\Rightarrow \exists_{z_{n_k}} \longrightarrow z$

podciąg

$$\|y_{n_k} - z\| \leq \|y_{n_k} - z_{n_k}\| + \|z_{n_k} - z\|$$

$$\|y_{n_k} - z\| \leq \|y_{n_k} - z_{n_k}\| + \|z_{n_k} - z\|$$

$$\leq \frac{1}{n_k} + \|z_{n_k} - z\|$$

$$\limsup_{n_k \to \infty} \|y_{n_k} - z\| \leq 0 + 0 \quad (\text{bo } z_{n_k} \to z).$$

$$= 0,$$

$$\Rightarrow \quad y_{n_k} \longrightarrow z.$$

A3 $\left.\begin{array}{l} T: E \to F \\ S: E \to F \end{array}\right\}$ zwarte $\Rightarrow$ $T+S$ jest zwarte.

Ustalmy $\{x_n\}$ ogr. w E.

$$(T+S)x_n = Tx_n + Sx_n$$

Wybieramy podciąg x_{n_k} t.że $Tx_{n_k} \longrightarrow y$ w F.

Wybieramy podciąg z x_{n_k} nazw. go $x_{n_{k_l}}$ $Sx_{n_{k_l}} \longrightarrow z$ w F.

$(T+S)x_{n_{k_l}} \longrightarrow y+z$. ;).

A4

<u>Tw. A-A:</u> $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset C[0,1]$ niezal od n

(i) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ jest wsp. ogr. w $C[0,1]$ $\|f_n\|_\infty \leq M$

DOD. (ii) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ jest jednakowo ciągłe i

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; \underset{n\geq 1}{\forall} \; \underset{x}{\forall} \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Wówczas $\{f_n\}$ ma podciąg zbieżny w $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Co daje (ii) od nas?

- $\{f_n\}$ jest wspólnie Lipschitzowska

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq C|x-y|$$

C nie zależy od n.

(⇑: MINI ZADANIE)

- $$|f_n(x) - f_n(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}$$

C nie zależy od n.

Kula nie jest zwarta w nieskończ. wym. przestrz.

np. $\left(\left([0,1], \|\cdot\|_\infty \right) \right)$.

więc potrzebne są dodatkowe warunki.

A4

$g \in C[0,1]$

$T: C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$

$$Tf(x) = \int_0^x f(y)\, g(y)\, dy$$

T jest zwarty ?

Rozw: ustalmy $\{f_n\}_{n\geq 1}$ w $C[0,1]$ ograniczony. Mamy znaleźć podciąg zbieżny w $\{Tf_n\}_{n\geq 1}$ w $C[0,1]$.

Wyk. tw. A-A:

$\int_0^x f(y)\,g(y)\,dy = (Tf)(x)$.

(1) $\{Tf_n\}_{n\geq 1}$ jest ogr. w $C[0,1]$

$|Tf_n(x)| \leq \int_0^1 |f_n(y)|\,|g(y)|\,dy \leq \|f_n\|_\infty \cdot \|g\|_\infty \leq$

$\leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty\right) \|g\|_\infty \leq C$ niezal od n.

(2) $\{Tf_n\}_{n\geq 1}$ jest wspólnie Lipschitzowski $\Rightarrow$ jednakowo ciągły

$|Tf_n(x) - Tf_n(y)| \leq \int_x^y |f_n(z)|\,|g(z)|\,dz \leq |x-y| \sup_n \|f_n\|_\infty \|g\|_\infty$

zał. że $y > x$

$\leq C\,|x-y|$

niezal. od n.

Z tw. A-A mamy, że $\{Tf_n\}$ ma podciąg zbieżny w $C([0,1])$.

(musimy pok. zwartość $T: C([0,1]) \to C([0,1])$)

A5 $\quad I : E \to E$ $\quad$ zwarty?

niesk. wym

Gdyby był, to z def $\overline{B_1(0)}$ byłoby zwarte

$$\overline{B_1(0)} = B_1(0)$$

A wiemy, że $B_1(0)$ zwarte nie jest. $\square$.

AG

$T: H \longrightarrow H$ zwarty.

nieskończenie wym

Czy $I-T$ jest zwarte?

Rozw: $I = (I-T) + T$. Gdyby $I-T$ był zwarty to I jako suma zwartych też byłby zwarty.

Sprzeczność.

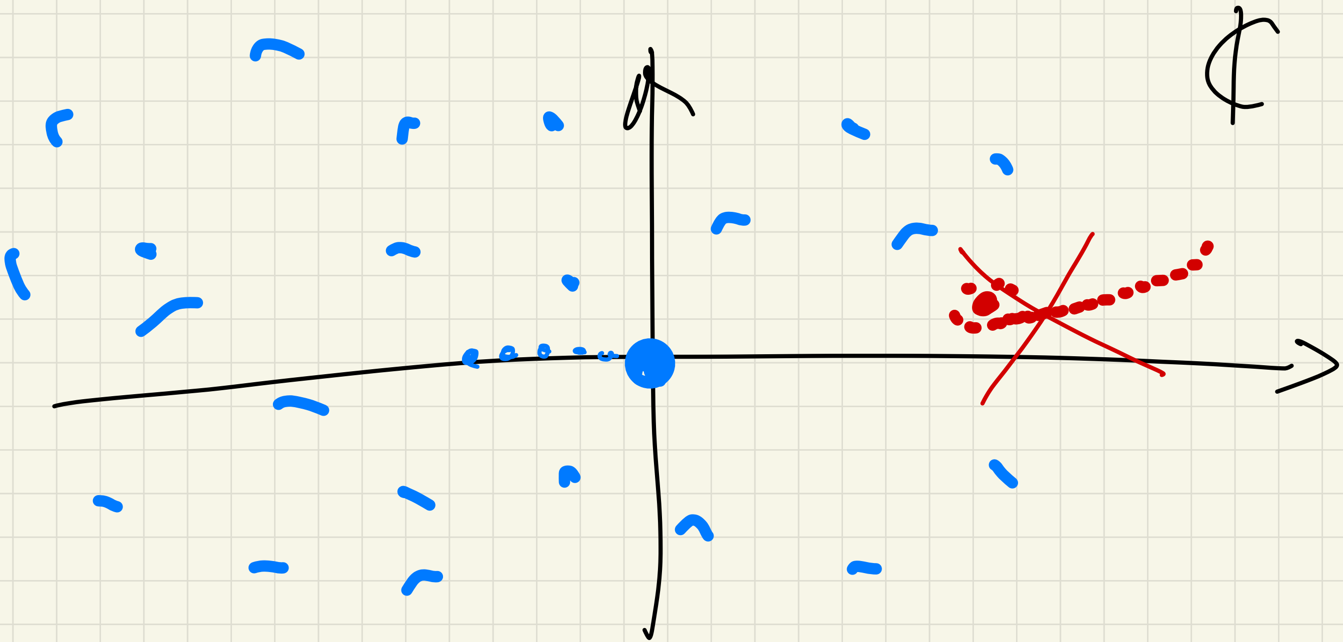
Tw. Riesza – Fredholma

Jeżeli $K: H \to H$ zwarty to:

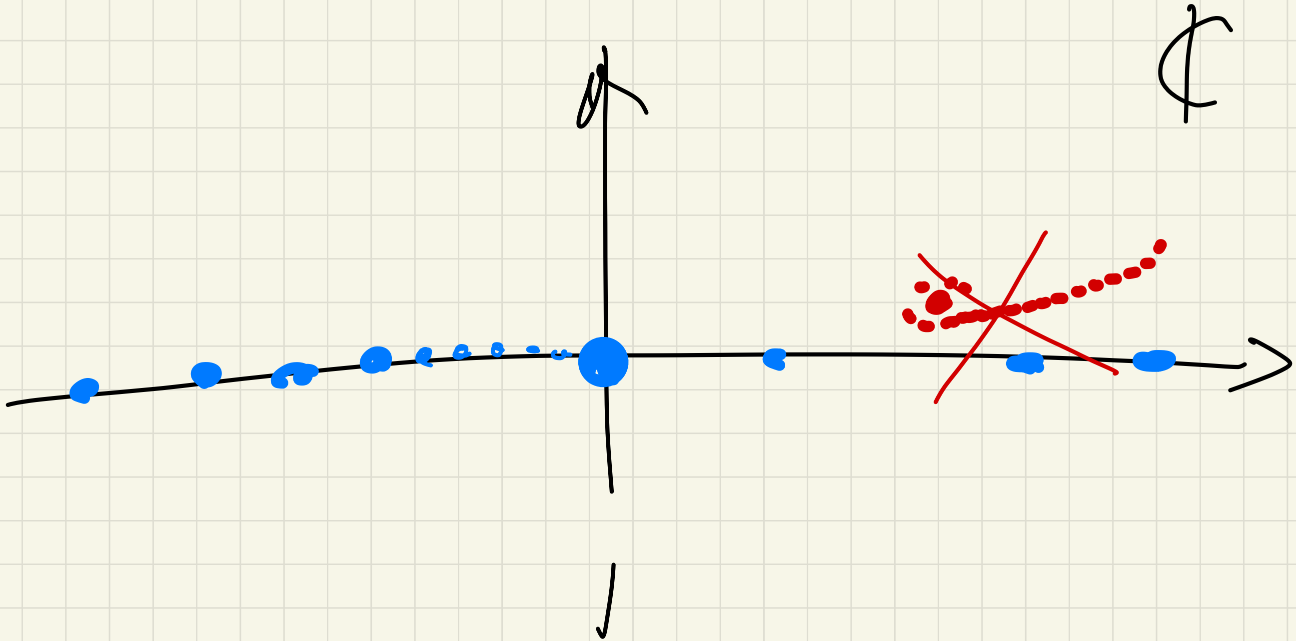
1) $0 \in \sigma(K)$

2) $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(K)$ jest wartością własną K.

3) 0 jest jedynym możliwym punktem skupienia $\sigma(K)$


ℂ

Gdy $K : H \to H$ jest zwarty i samosprzężony



B2

$T: L^2(0,1) \to L^2(0,1)$

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)\,dy \qquad (g = 1)$$

$$\left(\begin{array}{l} Tf(x) = \int_0^x f(y)\,g(y)\,dy \\ \underbrace{T: C[0,1] \to C[0,1]} \end{array} \right)$$

Za tydzień spr. że T jest zwarty

$\sigma(T) = ?$

Wiemy, że $\sigma(T) \ni 0$.

Załóżmy, że $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(T)$.

Ze zwartości $\exists\, f \in L^2(0,1)$, $f \neq 0$: $Tf = \lambda f$

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3$$

$$\mu\left(\bigcup A_i\right) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\int_0^x f(y)\,dy}_{\text{ciągła}} = \lambda \underbrace{f(x)}$$

$f \in L^2(0,1)$

$\Downarrow$

$f \in C(0,1) \Rightarrow f \in C^1(0,1]$

$$\lambda f(x) = \int_0^x f(y)\,dy$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \lambda f'(x) = f(x) \\ 0 = f(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) \\ f(0) = \underline{0} \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \quad \forall_{x \in [0,1]}$$

Nie ma żadnego innego bo ten RRZ ma jedn. rozw.

$\square$.