AF Tutorial 12

21.01.2021

B2

$$T: L^2(0,1) \to L^2(0,1)$$

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)\,dy \to \text{ciągłe funkcje wzgl. } x.$$

jeśli T jest zwarty $\Rightarrow \sigma(T) = \{0\}$.

Dowód zwartości: $\{f_n\}_{n \geq 1}$ ograniczony w $L^2(0,1)$

mamy znaleźć podciąg zbieżny (Tf_n) w $L^2(0,1)$.

$$Tf_n = \int_0^x f_n(y)\,dy$$ ma podciąg zb. w $C[0,1]$.

- $\|Tf_n\|_\infty \leq C < \infty$ $\quad |Tf_n(x)| \leq \int_0^x |f_n(y)|\,dy \leq$

$$\leq \int_0^1 |f_n(y)|\,dy \leq \left(\int_0^1 |f_n(y)|^2\,dy\right)^{1/2} \leq \sup_n \|f_n\|_2.$$

- równociągłość. Ustalmy $x, y \in (0,1)$

$$|Tf_n(x) - Tf_n(y)| \leq \int_x^y |f_n(z)|\,dz =$$

$$= \int_0^1 |f_n(z)|\, \mathbb{1}_{z\in[x,y]}\,dz \leq \left(\int_0^1 |f_n|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \mathbb{1}^2_{z\in(x,y)}\right)^{1/2}$$

$$\leq \sup_n \|f_n\|_2 \cdot |x-y|^{1/2}.$$ ($1/2$ – Hölderowska)

$\Rightarrow$ z tw. A-A $\{Tf_n\}$ ma podciąg zb w $C[0,1]$.

$$Tf_{n_k} \longrightarrow g \quad w \quad C[0,1]$$

$$\Rightarrow \|Tf_{n_k} - g\|_2^2 = \int_0^1 |Tf_{n_k} - g|^2 \leq \|Tf_{n_k} - g\|_\infty^2 \longrightarrow 0$$

B4 $\quad L^2(\mathbb{R})$ $\qquad$ g ciągła, ograniczona.

$$(Gf)(x) = g(x) f(x).$$

(tw: każdy op. samosprzężony jest operatorem mnożenia na pewnej przestrzeni $L^2(X,\mu)$).

$\sigma(G) = ?$ $\qquad$ $\sigma(G) = \overline{\{ g(x) : x \in \mathbb{R} \}}$

$g(x) = x$ $\qquad$ $(Mf)(x) = x f(x)$ $\qquad$ $\sigma(M) = [0,1]$

$L^2(0,1)$

$$\sigma(G) = \overline{\{ g(x) : x \in \mathbb{R} \}}$$

g ciągła ograniczona

$\supseteq$: $\lambda \in \{g(x) : x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \lambda \in \sigma(G)$.

$$(G - \lambda I) f(x) = (g(x) - \lambda) f(x)$$

$\exists_{y}\ \lambda = g(y)$

$$\parallel$$

$$(g(x) - g(y)) f(x).$$

$A \quad \exists_{\varepsilon_n \to 0} \quad \exists_{x_n} \quad \|Ax_n\| \leq \varepsilon_n \|x_n\|$ to A nie jest odwracalny

Ust. $\varepsilon_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists_{\delta_n} \quad |x-y| \leq \delta_n \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon_n = \frac{1}{n}$

$$f_n = \mathbb{1}_{|x-y| \le \delta_n} \qquad \int$$

$$\left|(G - \lambda I) f_n(x)\right| = \left|(g(x) - g(y)) f_n(x)\right| =$$

$$= \left|\underbrace{(g(x) - g(y))}_{\le \varepsilon_n} \mathbb{1}_{|x-y| \le \delta_n}\right|$$

$$\le \varepsilon_n \cdot f_n(x)$$

$$\|(G - \lambda I) f_n\|_2 \le \varepsilon_n \|f_n\|_2 \qquad \left(\varepsilon_n = \frac{1}{n}\right).$$

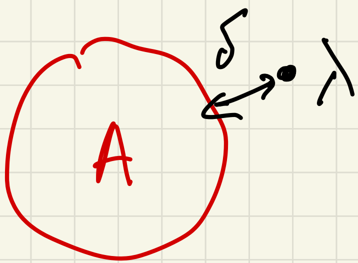
$$\Rightarrow$$

Skoro $\sigma(G)$ domknięty to zawiera $\overline{\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}}$.

$\subseteq$: $\quad \sigma(G) \subseteq \overline{\{g(y) : y \in \mathbb{R}\}}$

Niech $\lambda \in \sigma(G)$. Zał. że $\lambda \notin \overline{\{g(y) : y \in \mathbb{R}\}} =: A$

Wtedy $\exists_{\delta}$ t. że $\inf\limits_{\mu \in A} |\mu - \lambda| \geq \delta > 0$.



$$(G - \lambda I)^{-1} f = \underbrace{\frac{1}{g(x) - \lambda}}_{\leq \frac{1}{\delta}} f(x). \qquad \blacksquare$$

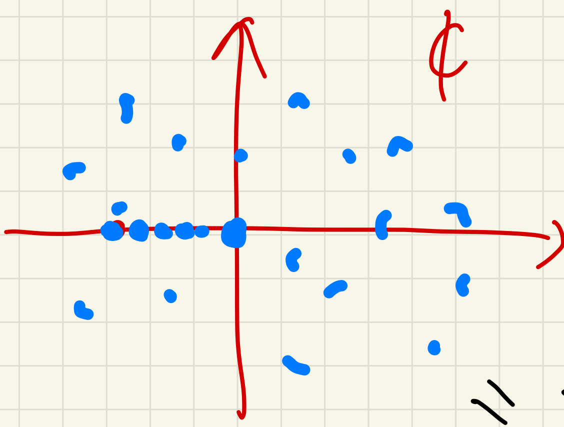
$$\sigma(G) = \overline{\{ g(y) : y \in \mathbb{R} \}}$$

g ograniczone

g ciągła

Dla jakich g operator G jest zwarty?

$$\Downarrow$$



$$= \overline{\{ g(y) : y \in \mathbb{R} \}}$$

g jest ciągłe to wokół $\underline{g(x)}$ jest jakiś przedział

$(g(x)-\varepsilon, g(x+\varepsilon))$

o ile g nie jest stała.

$$\Downarrow$$

g musi być stała

$\Rightarrow g = 0$ bo spektrum operatora zwartego zawiera 0.

Zad. domowe (OSTATNIE :( )

Oper. mnożenia na ciągu $\ell^2 \longrightarrow \ell^2$

$$Tx = (y_i x_i)_{i=1}^{\infty}$$ zwarty

wtw gdy $y \in c_0$.

Tw. H-S: Jeśli operator $T \in L(H,H)$ jest zwarty, ~~samosprzężony~~ symetryczne i H jest ośrodkowa to istnieje przeliczalna baza ort. H złożona z wektorów własnych T. mocniej

Co więcej, jeśli $\{\lambda_k\}$ jest przeliczalny (niesk.) to $\lambda_k \longrightarrow 0$ $k \to \infty$.

(C1) $A: H \to H$ samospr. zwarty, liniowy

Pok-że istnieje $B: H \to H$ t.że $B^n = A$.

$\left(B = A^{1/n} \right)$.

D-d:

dla każdego $x \in H$ szereg zbieżny w H

$$x = \sum_{k \geq 1} \langle x, e_k \rangle e_k$$

$$Ax = \sum_{k \geq 1} A \left[\langle x, e_k \rangle e_k \right] = \sum_{k \geq 1} \langle x, e_k \rangle \lambda_k e_k$$

Proponujemy:

$$Bx := \sum_{k \geq 1} \langle x, e_k \rangle \lambda_k^{1/n} e_k$$

$$Bx := \sum_{k\geq 1} \langle x, e_k \rangle \lambda_k^{1/n} e_k$$

$$\Big\| \sum_{k\geq 1} \langle x, e_k \rangle \lambda_k^{1/n} e_k \Big\| \leq \sum_{k\geq 1} \big\| \langle x, e_k \rangle e_k \lambda_k^{1/n} \big\|$$

↑ grubo.

$$S_N x = \sum_{k\geq 1}^{N} \langle x, e_k \rangle \lambda_k^{1/n} e_k \qquad S_N \text{ zbieżny w } H.$$

$$\| S_N x - S_M x \|^2 = \Big\| \sum_{k=N+1}^{M} \langle x, e_k \rangle \lambda_k^{1/n} e_k \Big\|^2 = \sum_{k=N+1}^{M} \langle x, e_k \rangle^2 \underbrace{\lambda_k^{2/n}}_{\leq C}$$

$$\to C \sum_{k=N+1}^{M} \langle x, e_k \rangle^2 \to 0 \quad N, M \to \infty \quad \text{z nier. Bessela.}$$

KOMENTARZ:

$$\Big\| \sum_{k\geq 1} \langle x, e_k \rangle \lambda_k^{1/n} e_k \Big\| \leq \sum_{k\geq 1} \big\| \langle x, e_k \rangle e_k \lambda_k^{1/n} \big\|$$

ZA GRUBO.

$\sum_{k\geq 1} \langle x, e_k \rangle e_k$ zbieżny

Nad $\mathbb{R}$ to nawet nie działa:

$\sum_{k\geq 1} a_k$ zbieżny $\Rightarrow \sum_{k\geq 1} \lambda_k \cdot a_k$ zbieżny o ile $|\lambda_k|$ jest ograniczony

$|\lambda_k| = 1$. $\quad a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$

Więc szereg $Bx := \sum_{k\geq 1} \langle x, e_k\rangle \lambda_k^{1/n} e_k$

jest zbieżny w H.

$\le \|x\|^2$ nier. Bessela.

$$\|Bx\|_H^2 = \langle Bx, Bx\rangle = \sum_{k\geq 1} \langle x, e_k\rangle^2 \lambda_k^{2/n}$$

$$\le \sup_k |\lambda_k|^{2/n} \cdot \|x\|^2 \implies \|B\| \le \sup_k |\lambda_k|^{1/n}.$$

$B^n = A$?

znowu ustawić szereg

$$B^2 x = \sum_{k\geq 1} \langle Bx, e_k\rangle \lambda_k^{1/n} e_k = \sum_{k\geq 1} \lambda_k^{1/n} \lambda_k^{1/n} e_k \langle x, e_k\rangle$$

$$= \sum_{k\geq 1} \lambda_k^{2/n} e_k \langle x, e_k\rangle$$

$$B^n x = \sum_{k \geq 1} \lambda_k e_k \langle x, e_k \rangle = Ax.$$

functional calculus dla operatorów samosprzężonych.

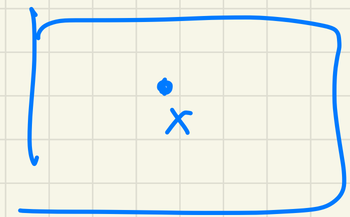
$f(T)$ dla f ciągła

to nie wymaga zwartości.

REGULARYZACJA, TRANSFORMATA FOURIERA.

$f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

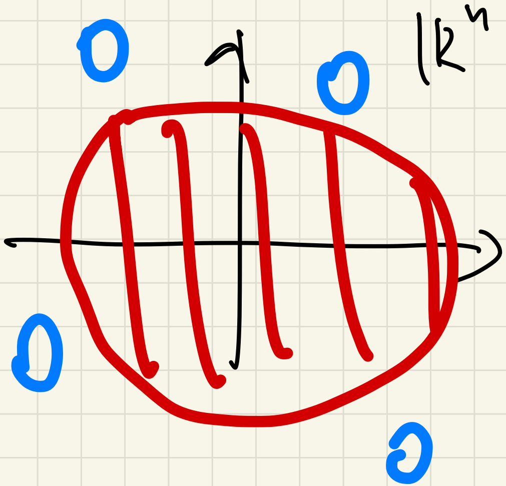
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \underbrace{g(y)}_{\text{wagę}} \, dy$$



A1

$g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$

funkcje k-razy różniczkowalne w sposób ciągły o zwartym nośniku



$$f \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow f * g \in C^k(\mathbb{R}^n).$$

$$f \in L^1, \quad g \in C_c^k(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * g \in C^k.$$

$$f * g(x) = \int f(y)\, g(x-y)$$

PIERWSZA POCHODNA:

$$\frac{f*g(x+h) - f*g(x)}{h} = \int f(y) \left[\frac{\overbrace{g(x+h-y) - g(x-y)}^{\le \|Dg\|_\infty |h|.}}{h} \right] dy$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \text{ punktowo}$$

$$D[f*g](x). \qquad\qquad\qquad\qquad Dg(x-y)$$

$$\boxed{D^k[f * g] = f * D^k g}$$

A2

$$f*g(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$$

kiedy to jest dobrze zdef ?

Nierówność Younga dla splotów (!!!)

$$\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \qquad 1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$

Nier. Höldera $\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ $\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \qquad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Ustalmy x.

$$|f * g(x)| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^1 |g(y)|^1 \, dy$$

$$\leq \int |f(x-y)|^{p/r} |g(y)|^{q/r} \, |f(x-y)|^{1-p/r} \, |g(y)|^{1-q/r} \, dy$$

$$= \int \underbrace{\left(|f(x-y)|^p |g(y)|^q\right)^{1/r}}_{\mathrm{I}} \, \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}}}_{\mathrm{II}} \, \underbrace{|g(y)|^{\frac{r-q}{r}}}_{\mathrm{III}} \, dy$$

$$\int \underbrace{\left(|f(x-y)|^p |g(y)|^q\right)^{1/r}}_{\mathrm{I}} \; \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}}}_{\mathrm{II}} \; \underbrace{|g(y)|^{\frac{r-q}{r}}}_{\mathrm{III}} \, dy$$

$$\le \|(\mathrm{I})\|_{L^r} \, \|(\mathrm{II})\|_{L^{\frac{rp}{r-p}}} \, \|(\mathrm{III})\|_{L^{\frac{rq}{r-q}}}$$

$$1 \stackrel{?}{=} \frac{1}{r} + \frac{r-p}{rp} + \frac{r-q}{rq} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - \frac{1}{r} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1 \text{ z założenia.}$$

$$\int \underbrace{\left(|f(x-y)|^p |g(y)|^q\right)^{1/r}}_{\mathrm{I}} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}}}_{\mathrm{II}} \underbrace{|g(y)|^{\frac{r-q}{r}}}_{\mathrm{III}} \, dy$$

$$\leq \|(\mathrm{I})\|_{L^r} \, \|(\mathrm{II})\|_{L^{\frac{rp}{r-p}}} \, \|(\mathrm{III})\|_{L^{\frac{rq}{r-q}}}$$

$$\|(\mathrm{I})\|_{L^r} = \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q\right)^{1/r}$$

$$\|(\mathrm{II})\|_{L^{\frac{rp}{r-p}}} = \left(\int |f(x-y)|^p dy\right)^{\frac{r-p}{rp}} = \left(\int |f(y)|^p dy\right)^{\frac{r-p}{rp}}.$$

$$\|(\mathrm{III})\|_{L^{\frac{rq}{r-q}}} = \left(\int |g(y)|^r\right)^{\frac{r-q}{rq}}$$

$$|f*g(x)| \le \left(\int |f(x-y)|^p \, |g(y)|^q \, dy \right)^{1/r} \|f\|_p^{\frac{r-p}{r}} \, \|g\|_q^{\frac{r-q}{r}}$$

$$\|f*g\|_r^r \le \|f\|_p^{r-p} \, \|g\|_q^{r-q} \iint |f(x-y)|^p \, |g(y)|^q \, dy \, dx$$

$$\le \|f\|_p^{r-p} \, \|g\|_q^{r-q} \int \Big[\underbrace{\int |f(x-y)|^p \, dx}_{= \|f\|_p^p} \Big] |g(y)|^q \, dy$$

$$\le \|f\|_p^r \, \|g\|_q^r .$$

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q \quad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

1) $f \in L^p \Rightarrow f * g \in L^p$ dla $g \in L^1$

2) $f, g \in L^1 \Rightarrow f * g \in L^1$.

A3 $f \in L^1$, $g \in L^\infty$, g jest lipschitzowskie

Pok. że $\underline{f * g \in L^\infty}$, jest lipschitzowski.

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \qquad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

(prawdziwe dla p, q, r niesk.)

$r = \infty$

$p = 1 \qquad q = \infty \qquad \Rightarrow \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$

$$|f * g(x) - f * g(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\underline{f(z)}\, g(x-z) - \underline{f(z)}\, g(y-z)|\, dz$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \underbrace{|g(x-z) - g(y-z)|}_{\leq |g|_{Lip} |x-y|.} dz \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| dz \right) C_g |x-y|. \leq \|f\|_1 C_g |x-y|.$$

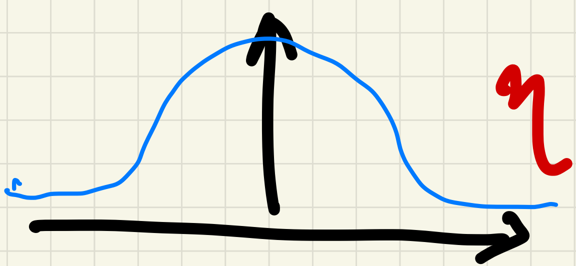
MOLLIFIERS (jedynka aproksymatywna).

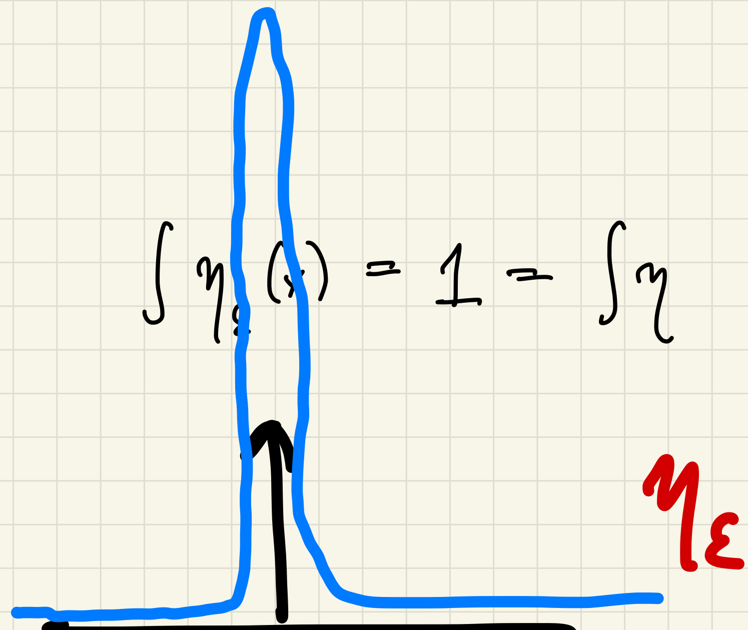
η : gładka, nieujemna, ma nośnik w $B_1(0)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta = 1$$

$$\eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^d}\,\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$\int \eta_\varepsilon(x) = 1 = \int \eta$$





$f * \eta_\varepsilon$

WYKŁAD:

- $f \in L^p$ to $\boxed{f * \eta_\varepsilon \longrightarrow f \text{ w } L^p}$ dla $1 \leq p < \infty$

WYK (dlaczego)

tego nie ma

- także zbieżność jest p.w.

(3)

f ciągła $\Rightarrow$ $f * \eta_\varepsilon \rightrightarrows f$ (jednostajnie) na zwartych podzbiorach $\mathbb{R}^n$.

$$|f * \eta_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \int \eta_\varepsilon(y) f(x-y)\,dy - f(x) \right|$$

$$\leq \left| \int \eta_\varepsilon(y) f(x-y)\,dy - \int f(x)\,\eta_\varepsilon(y)\,dy \right|$$

$$= \left| \int [f(x-y) - f(x)]\,\eta_\varepsilon(y)\,dy \right|$$

$x \in K$ zwarty

$x - y \in (K)^\varepsilon \subset$ zbiór zwarty

$$\leq \int |f(x-y) - f(x)|\,\eta_\varepsilon(y)\,dy$$

nośnik w $B_\varepsilon(0)$

Ponieważ f jest jednostajnie ciągła to

$$\forall_{\gamma>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{z,w\in K} \ |z-w|\leq\delta \Rightarrow |f(z)-f(w)|\leq\gamma.$$

$$|y|\leq\varepsilon<\delta \Rightarrow |f*\eta_\varepsilon(x)-f(x)|\leq\gamma\int\eta_\varepsilon(y)\,dy$$

$$=\gamma.$$

Sploty zdef. na całym $\mathbb{R}^n$

Definicja splotu na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(problem: można wypaść poza Ω licząc całkę).

$$f \in L^p(\Omega) \implies f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ kładąc } f = 0 \text{ na } \mathbb{R}^n \setminus \Omega$$

$$f * \eta_\varepsilon \to f \text{ w } L^p(\mathbb{R}^n) \implies f * \eta_\varepsilon \to f \text{ w } L^p(\Omega).$$

B3

$f \in L^1(\Omega)$ $\quad \int_\Omega f\varphi = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

Ω jest otwartym dziedziną $\mathbb{R}^n$,

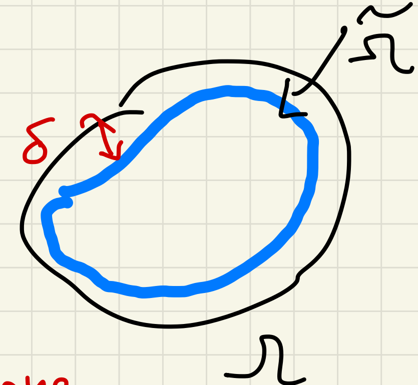
zwarty nośnik w Ω, nieskończenie wiele razy różniczkowe

$$\Rightarrow \quad f = 0 \ \text{p.w.}$$

$\varphi = \operatorname{sgn} f \notin C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega f\varphi = \int_\Omega |f| = 0 \Rightarrow f = 0.$$

$$\varphi_\varepsilon = \left(\mathbb{1}_{\tilde{\Omega}} \operatorname{sgn} f\right) * \eta_\varepsilon$$



$|\varepsilon| < \delta$ to jest dobrze zdefiniowane

$$\int f \varphi_\varepsilon = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int \underbrace{f}_{\in L^1} \left(\mathbb{1}_{\tilde{\Omega}} \operatorname{sgn} f\right) * \eta_\varepsilon = 0 \quad \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \quad \int$$

$$\int f \underbrace{\left(\mathbb{1}_{\tilde\Omega} \operatorname{sgn} f\right) * \eta_\varepsilon} = 0 \qquad \|f*g\|_\infty$$

Wysyłamy $\varepsilon \to 0$.

$$\downarrow$$

$$\mathbb{1}_{\tilde\Omega} \operatorname{sgn} f \quad \text{p.w. na } \Omega$$

z tw. o zbieżności $\qquad (f \in L^1)$

$$\left| f \left(\mathbb{1}_{\tilde\Omega} \operatorname{sgn} f\right) * \eta_\varepsilon \right| \leq |f| \, \|\operatorname{sgn} f * \eta_\varepsilon\|_\infty \leq$$

$$\leq |f| \, \|\operatorname{sgn} f\|_\infty \underset{\underset{1}{\shortparallel}}{\|\eta_\varepsilon\|_1} \leq |f| \in L^1)$$

$$\int |f| \, \mathbb{1}_{\tilde{\Omega}} = 0$$

$\Rightarrow$ $f = 0$ p.w. na $\tilde{\Omega} \subset \Omega$

$\Rightarrow$ z dowolności $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ wynika, że $f = 0$ p.w. na Ω.

ZAD. DOMOWE

TO SIĘ PRZYDA!

$C_c^\infty(\Omega)$ są gęste w $L^p(\Omega)$

$1 \leq p < \infty$