AF Tutorial 2

22.10.2020

przestrzenie Banacha	przestrzenie unormowane które nie są Banacha
• L^p z normą $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p \le \infty)$	• L^2 z normą L^1
• $C^0[0,1]$ z normą $\|\cdot\|_\infty$	• C^1 z normą $\|f\|_\infty$
• C^k z normą $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \dots + \|f^k\|_\infty$	
• C_0 z $\|f\|_\infty$	
• C_{LIP} z $\|f\|_\infty + \|f\|_{LIP}$	

Zad. C5 / PS1 : przestrzeń funkcji na $\mathbb{R}$

$(C(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ nie jest p. unorm. bo $\|x\|_\infty = \infty$.

$C_0(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłe t. że $f(x) \to 0$ gdy $x \to \infty \}$.

<u>Zad</u>: $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ jest przestrz. Banacha.

- unormowana: $\|f\|_\infty < \infty \quad \forall_{f \in C_0(\mathbb{R})}$

Let R $\forall_{|x|>R} \quad |f(x)| \leq 1$.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f(x)| \leq \underbrace{\sup_{|x| \leq R} |f(x)|}_{<\infty} + \overbrace{\sup_{|x|>R} |f(x)|}^{\leq 1} < \infty . \quad \checkmark$$

$(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ jest p. Banacha.

$\{f_n\}$ ciąg Cauchy'ego w $C_0(\mathbb{R})$. Chcę by $f_n \to f$ w $C_0(\mathbb{R})$

- $\exists f \in C_0(\mathbb{R})$
- $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ przy $n \to \infty$.

Wiemy, że $(C([-R,R]))$ jest zupełna więc istnieje $\forall_R$

$$f_n|_{[-R,R]} \longrightarrow f_R \quad , \quad f_R \in C[-R,R]$$

$$f_{R+1}|_{[-R,R]} = f_R \quad \Rightarrow \quad \exists_{f \in C(\mathbb{R})} \quad f_n(x) \longrightarrow f(x)$$

punktowo.

- $\exists f \in C_0(\mathbb{R})$
- $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ przy $n \to \infty$.

Łatwiej

Ust. $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - \underbrace{f(x)}_{=\lim_{m\to\infty} f_m(x)}| = \lim_{m\to\infty} \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{\leq \|f_n - f_m\|} = \liminf_{m\to\infty} |f_n(x) - f(x)|$$

$\lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty$ istnieje ?

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{\liminf_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty}_{\text{to nie zależy od } x}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\ f_m\|_\infty \Rightarrow$$

bo $\{f_n\}$ ciąg Cauchy'ego

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \liminf_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

$f \in C_0(\mathbb{R})$ (wiemy już że $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ przy $n \to \infty$).

$$|f(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|} + |f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Ust. $\varepsilon > 0$

Znajdźmy n t. że $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dla tego n (ponieważ $f_n \in C_0(\mathbb{R})$) $\exists$ znajdziemy R $\forall_{|x|>R}$ $|f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Zad. C6 / PS1

$$C_{LIP}[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ ciągłe t. że } \underbrace{\sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}}_{= |f|_{LIP} \text{ półnorma Lipschitzowska}} < \infty \}.$$

(Uwaga: $|f(x)-f(y)| \leq |f|_{LIP} |x-y|$).

(A) $(C_{LIP}[0,1], |\cdot|_{LIP})$? $\quad f = 1 \quad |f|_{LIP} = 0$ ale $f \neq 0$.

Nie jest p. unormowana.

(B) $\left(C_{LIP}[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ jest unormowana ale nie Banacha.

$\underbrace{\left(C_{LIP}[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)}$ $\subset$ $\left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ ← Banacha

Czyli chcemy, że $C_{LIP}[0,1]$ nie jest domkn. ze wzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

$$|f(x)-f(y)| \le |f|_{LIP} |x-y|).$$

(tw. o wart. średniej $|f(x)-f(y)| \le \|f'\| \, |x-y|$).

Kandydat: $x \longmapsto \sqrt{x} \in C[0,1]$,

nie jest lipschitzowskie $\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow \infty$

jeśli $x \to 0$.

$\sqrt{x} \in C[0,1]$, istnieją p_n wielomiany t. że $\|p_n - \sqrt{x}\|_\infty \to 0$ przy $n \to \infty$.

Każdy $p_n \in C_{LIP}[0,1]$ ale $\sqrt{x} \notin C_{LIP}[0,1]$. $\Rightarrow$ $\checkmark$

(C) $\left(C_{LIP}[0,1], \|\cdot\|_\infty + |\cdot|_{LIP}\right)$ jest przestrzeń Banacha (WAŻNA!).

$\{f_n\}$ ciąg Cauchy'ego w $C_{LIP}[0,1]$.

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{n,m \geq N_\varepsilon} \|f_n - f_m\|_\infty + |f_n - f_m| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ • $\{f_n\}$ jest Cauchy'ego w $C[0,1], \|\cdot\|_\infty$

• $|f_n|_{LIP}$ jest Cauchy'ego w $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ • $\{f_n\}$ jest Cauchy'ego w $C[0,1], \|\cdot\|_\infty$

• $|f_n|_{LIP}$ jest Cauchy'ego w $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists_{f \in C[0,1]} \; f_n \to f$ w $C[0,1]$. KANDYDAT

$\exists_{a \in \mathbb{R}} \; |f_n|_{LIP} \to a$.

• $f \in C_{LIP}$,

• $\|f_n - f\|_\infty + |f_n - f|_{LIP} \to 0$ (wystarczy $|f_n - f|_{LIP} \to 0$).

$$\underbrace{|f_n(x) - f_n(y)|}_{} \le |f_n|_{LIP} |x-y| \to a|x-y|.$$

$n \to \infty \quad \downarrow \quad |f(x) - f(y)| \le a|x-y| \Rightarrow f \in C_{LIP}[0,1].$

Chcemy $|f_n - f|_{LIP} \to 0$. $\quad f = \lim f_n$

$$|f_n - f|_{LIP} = \sup_{x \neq y} \frac{|f_n(x) - f(x) - (f_n(y) - f(y))|}{|x-y|} =$$

$$= \sup_{x\neq y} \lim_{m\to\infty} \underbrace{\frac{|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(y) - f_m(y))|}{|x-y|}}_{} =$$

$$\leq \liminf_{m\to\infty} \underbrace{|f_n - f_m|_{LIP}} \Rightarrow \text{Koniec bo } \{f_n\} \text{ jest ciągiem Cauchy'ego.}$$

FAKT

$$\sup_{x\neq y} \liminf_{m\to\infty} \ldots \leq \liminf_{m\to\infty} \sup_{x\neq y} \ldots$$

$$\underbrace{\|f_n - f\|_{LIP}} \leq \liminf_{m\to\infty} \underbrace{\|f_n - f_m\|_{LIP}} \leq \varepsilon.$$

Wiemy, że $\{f_n\}$ jest Cauchy'ego w C_{LIP}

w sensie $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N_\varepsilon}\ \forall_{n,m\geq N_\varepsilon}\ \|f_n - f_m\|_{LIP} \leq \varepsilon.$

OK :).

Operatory $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$

$T: X \to Y$ jest op. ogr. lin. gdy

- jest przekszt. liniowym
- $\sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y < \infty$!!!

$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\|_Y$.

Zad. A1 / PS2

$$\|T\| = \underbrace{\sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\|_Y}_{A} = \underbrace{\sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_Y}_{B} = \underbrace{\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}}_{C}.$$

$B = C$ $\quad \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \neq 0} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\| = \sup_{\|y\|_Y \le 1} \|Ty\|_Y$.

$B \le A$, $\quad A \le B \rightsquigarrow \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\|_Y \underset{y = \frac{x}{\|x\|_X}}{=} \sup_{\|x\| \le 1} \|T(y \cdot \|x\|_X)$

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|T(y\cdot \underbrace{\|x\|}_{}\,)\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \underbrace{\|x\|_X}_{\le 1} \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| \le \sup_{\|y\|=1} \|Ty\|.$$

Zad. A2 / PS2

$T: X \to Y$

(a) T jest ogr. lin. z X w Y

(b) T jest ciągły w 0

(c) T jest ciągły

(d) T jest Lipschitzowski $\|Tx - Ty\| \le C\|x-y\|$.

Oczywiste: (d) ⇒ (c) ⇒ (b).

1) (a) ⇒ (d) $\quad \|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \le \underbrace{\|T\|}_{} \|x-y\|$

czyli Lipsch.

$(b) \Rightarrow (a)$: ciągły w $0 \Rightarrow \|T\| < \infty$. (wykład).

$$\underbrace{\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\|}_{} \overset{?}{<} \infty.$$

$\|x_n\| \le 1$.

Zał. że $\|T\| = \infty \Rightarrow$ istnieje x_n t. że $\|Tx_n\| \geq n$.

$y_n = \frac{x_n}{n}$ $\quad y_n \to 0 \quad \|y_n\| \le \frac{\|x_n\|}{n} \le \frac{1}{n} \to 0$.

$$\|Ty_n\| = \|T\frac{x_n}{n}\| = \frac{1}{n} \|Tx_n\| \geq 1.$$

więc $Tx_n \not\to 0$ sprzeczność.

A3 / PS2

$\mathcal{L}(X,Y)$ = zbiór wszystkich $T: X \to Y$ liniowe, ogr

Spr. że $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ jest p. unorm.

norma op.

1) $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$

($\Leftarrow$) ok.

($\Rightarrow$) Gdyby $T \neq 0$ to byłby jakiś x t. że $\|x\| \leq 1$ i $Tx \neq 0$,

$$\|T\| \geq \|Tx\| > 0 \quad \text{sprzeczność.}$$

2) $\|\alpha T\| = |\alpha| \, \|T\|$

$$\|\alpha T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\alpha T x\|_Y \overset{\text{norma}}{=} |\alpha| \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_Y = |\alpha| \, \|T\|$$

3) nierówność trójkąta S, T

$$\|S+T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(S+T)x\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \underbrace{\|Sx + Tx\|}_{\leq \|Sx\| + \|Tx\|}$$

to jest norma

$$\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Sx\| + \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \|S\| + \|T\|.$$

$\checkmark$

Zad. A4 / PS2

$T: X \to Y \qquad \|T\| < \infty$

$S: Y \to Z \qquad \|S\| < \infty$

$T \circ S$ też ogr $\qquad \|ST\| \le \|T\| \, \|S\|$

D-d: $\|ST\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|S(Tx)\|_Z \underset{\uparrow}{\le} \|S\| \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\|$

z ogr. S

$= \|S\| \cdot \|T\|$

bo dow

$$\boxed{\|Sy\|_Z \le \|S\| \, \|y\|}$$

! $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$

Funkcjonały liniowe na $(X, \|\cdot\|_X)$: φ jest funkcj. lin. gdy jest liniowe oraz $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

Ogr. funkcjonał liniowy : φ jest funkcj. lin. + $\|\varphi\| < \infty$

$$\left(\varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) \quad \text{albo} \quad \varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K}). \right)$$

Zadanie B1 / PS2

$$E = \{ f \in C[0,1],\ f(0) = 0 \}.$$

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

Biorę f, $\|f\|_\infty \le 1$.

$$|\varphi(f)| \le \int_0^1 |f(t)|\,dt \le \int_0^1 1\,dt\ \underbrace{\|f\|_\infty}_{\le 1} = 1.$$

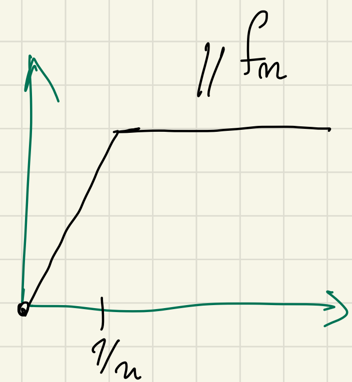
$\Rightarrow \|\varphi\| \le 1$. (jak dostać $\|\varphi\| = 1$).

$\varphi(f_n) \to 1$ z tw. o zb. mon. (albo i zdominowanej).

$$\|\varphi\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} |\varphi(f)|.$$

- oszacować $\sup_{\|f\|_\infty \le 1} |f(x)| \le A$
- ist. ciąg f_n, $\|f_n\|_\infty \le 1$ oraz $|\varphi(f_n)| \to A$

$\Rightarrow \|\varphi\| = A$.



$E = \{ f \in C[0,1],\ f(0) = 0 \}$.

(Pyt. dodatkowe: czy $(E, \|\cdot\|_\infty)$ jest zwarta?)

$E \subset (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Wyst. sprawdzić, że E jest domknięty

Ale jeżeli $f_n \to f$ w $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{f_n(0)} \to f(0)$.

Zadanie B2 / PS2

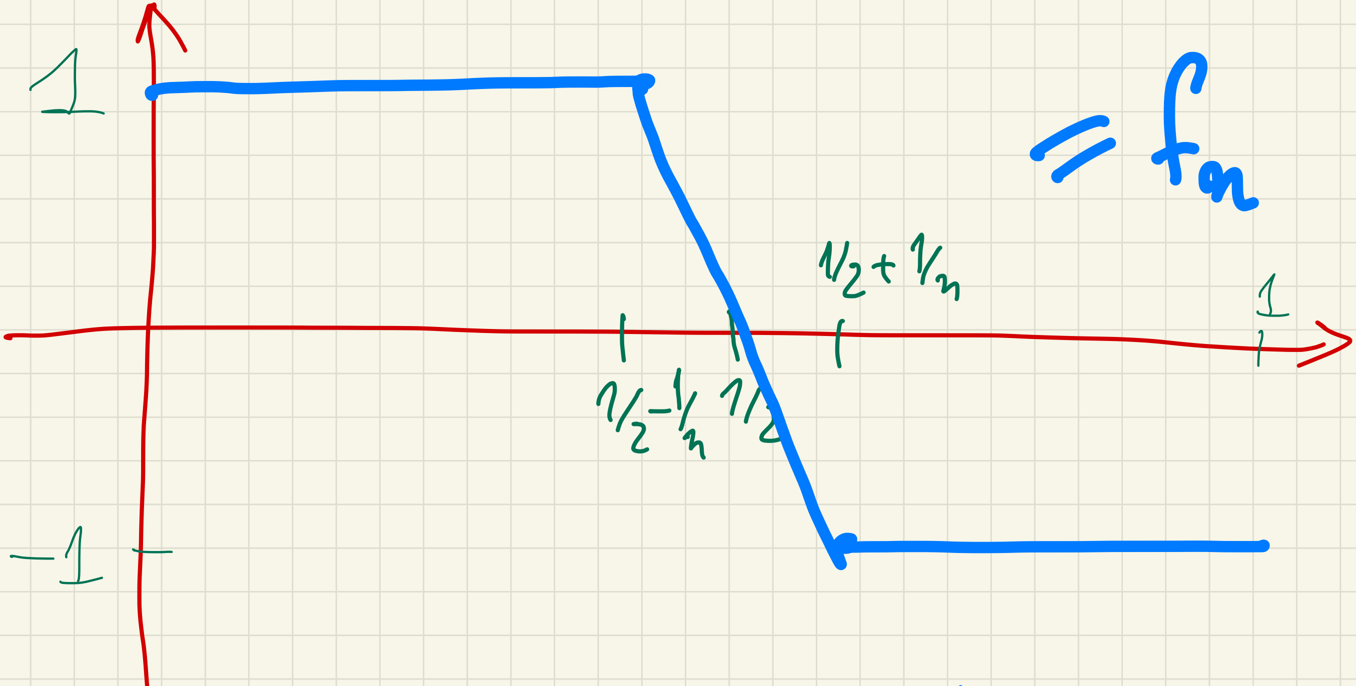
$$\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R} \qquad \varphi(f) = \int_0^{1/2} f(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx$$

- φ jest funkcjonałem liniowym $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$.
  (z liniowości całki).
-

Biorę f t. że $\|f\|_\infty \le 1$.

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^{1/2} f(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx \right| \le \int_0^{1/2} |f(x)|\,dx + \int_{1/2}^{1} |f(x)|\,dx \le 1. \quad \Rightarrow \|\varphi\| \le 1.$$

Dlaczego $\|\varphi\| = 1$.



$|f_n| \le 1 \to 1$ jest całk.

$\varphi(f_n) \longrightarrow 1$ przy $n \to \infty$

z tw. o zb. zdominowanej.