AF Tutorial 3

29.10.2020

przestrzenie Banacha	przestrzenie unormowane które nie są Banacha
• L^p z normą $\|\cdot\|_p$ $(1\le p\le\infty)$	• L^2 z normą L^1
• ℓ^p przestrzeń ciągów $(1\le p\le\infty)$	• C^1 z normą $\|f\|_\infty$
• $C^0[0,1]$ z normą $\|\cdot\|_\infty$	• $P[0,1]$ z normą $\|f\|_\infty$
• $C^k[0,1]$ z normą $\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty+\dots+\|f^{k}\|_\infty$	
• C_0 z $\|f\|_\infty$	
• C_{Lip} z $\|f\|_\infty+|f|_{Lip}$	
• $C^\alpha[0,1]$ z $\|f\|_\infty+|f|_\alpha$	

D2 w małym ℓ^p $\quad x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ t. że $\forall_{1 \le p < \infty}$ $\sum_{i \ge 1} |x_i|^p < \infty$.

Weźmy wektory jednostkowe $e_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ta pozycja}}}{1}, 0, \dots)$

$$\ell^p \ni x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$$ czy ten szereg jest zbieżny

$$S_N x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i \qquad \|S_N x - x\|_p^p = \sum_{i \ge N} |x_i|^p \longrightarrow 0 \qquad N \to \infty$$

ogon zbieżnego szeregu

$\underline{p = \infty}$: $\quad x = (1, 1, \dots, 1, \dots) \in \ell^\infty$

$$x - S_N(x) = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ N+1}}{1}, 1, \dots) \qquad \|x - S_N(x)\|_\infty = 1. \not\to 0.$$

B4

$$\varphi(u) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} u_n \qquad \Leftarrow \qquad \Uparrow$$

$u = (u_1, u_2, \dots)$

$v \in \ell^\infty \quad v = (v_1, v_2, \dots) \qquad \varphi : \ell^1 \to \mathbb{R} \quad \varphi(u) = \sum u_i v_i$

$\|\varphi\| = ?$

$$|\varphi(u)| \leq \sum_{n\geq 1} |u_n| \underbrace{|v_n|}_{\leq \|v\|_\infty} \leq \|v\|_\infty \sum_{n\geq 1} |u_n| = \|v\|_\infty \|u\|_1$$

$\Rightarrow \quad \|\varphi\| \leq \|v\|_\infty \qquad \left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$

Istnieją v_{n_k} t-że $|v_{n_k}| \longrightarrow \|v\|_\infty$.

Bierzemy $u^k = (0, 0, \dots, 0, \mathrm{sgn}(v_{n_k}), 0, \dots)$.

$$\varphi(u^k) = \sum_{n \geq 1} v_n u_n^k = |v_{n_k}| \longrightarrow \|v\|_\infty \quad \text{gdy } k \to \infty.$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\varphi\| = \|v\|_\infty}.$$

SPOILER: $\ell^\infty \subset (\ell^1)^*$

$\ell^\infty = (\ell^1)^*$

$\ell^p = (\ell^{p'})^*$

$p' \neq \infty$. $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

B6 $\varphi: C[0,1] \to \mathbb{R}$ $\varphi(f) = f(\frac{1}{2})$. $\|\varphi\| = ?$

Weźmy $\|f\|_\infty \le 1$. $|\varphi(f)| = |f(\frac{1}{2})| \le 1$.

Dlaczego $\|\varphi\| = 1$? Bo $\varphi(1) = 1$. ✓.

B7 $\varphi: C[0,1] \to \mathbb{R}$ $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\, d\mu(x)$, μ jest skończoną miarą.

Rozw: Weźmy $\|f\|_\infty \le 1$. $\mu([0,1]) < \infty$.

$$|\varphi(f)| \le \left| \int_0^1 f(x)\, d\mu(x) \right| \le \int_0^1 \underbrace{|f(x)|}_{\le \|f\|_\infty} d\mu(x) \le \mu([0,1]),$$

$\Rightarrow \|\varphi\| \le \mu([0,1])$.

Dla $f = 1$ $\varphi(1) = \mu([0,1]) \Rightarrow \|\varphi\| = \mu([0,1])$.

B8 $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$, liniowy,

φ jest nieujemny tzn. $\forall_{\substack{f \geq 0 \\ f \in C[0,1]}} \quad \varphi(f) \geq 0.$

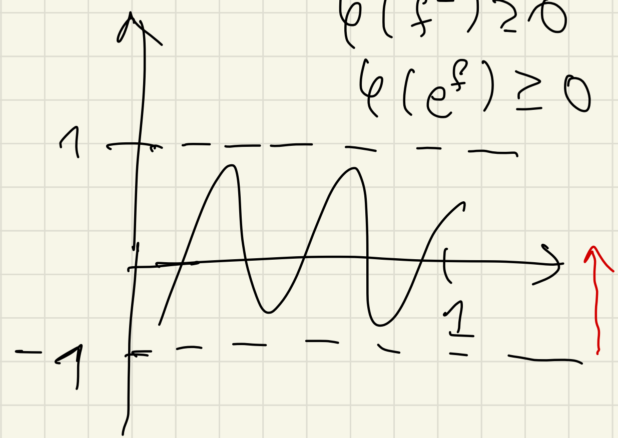
Weźmy $\|f\|_\infty \leq 1.$

$f + 1 \geq 0$
$-f + 1 \geq 0$

$\varphi(|f|) \geq 0.$
$\varphi(f^2) \geq 0$
$\varphi(e^f) \geq 0$

$\varphi(f+1) \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq -\varphi(1)$

$\varphi(1-f) \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \leq \varphi(1)$



$\Rightarrow |\varphi(f)| \leq \varphi(1) \Rightarrow \|\varphi\| \leq \varphi(1)$

$\Rightarrow \|\varphi\| = \varphi(1)$ bo $\varphi(1) = \varphi(1).$

φ jest nieujemny na $C[0,1]$ i liniowy

$$\|\varphi\| = \varphi(1).$$

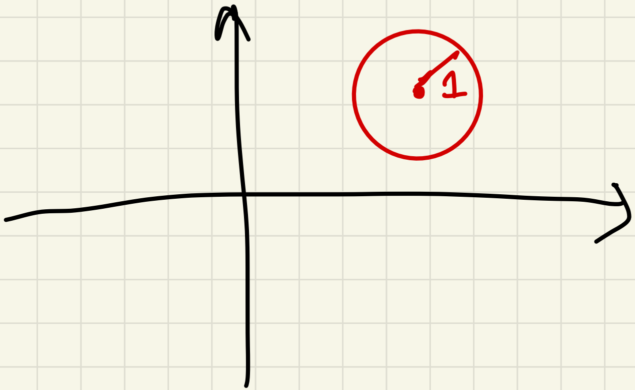
Bז: $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\,d\mu(x)$ $\quad\quad \|\varphi\| = \mu([0,1]) = \varphi(1).$

SPOILER: Każda miara nieujemna zadaje nieujemny funkcjonał na $C[0,1]$.

(Riesz-Markov-Kakutani)

nie ma innych nieujemnych funkcjonałów na $C[0,1]$ niż miary.

B9 $T: L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ $\quad (Tf)(x) = \frac{1}{|B(x,1)|} \int_{B(x,1)} f(y)\, dy$



$\|T\| = ?$ $\quad \forall\ 1 \leq p \leq \infty$

$\sup_{\|f\|_p \leq 1} \|Tf\|_p$

- $1 \leq p < \infty$
- $p = \infty$

$$(Tf)(x) = \frac{1}{|B(x,1)|}\int_{B(x,1)} f(y)\,dy$$

Weźmy $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\|f\|_p \le 1$.

$$\|Tf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Big| \underbrace{\frac{1}{B(x,1)}}_{C_d} \int_{B(x,1)} f(y)\,dy \Big|^p dx \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^d} \Big| \frac{1}{B(x,1)} \int_{B(x,1)} |f(y)|\,dy \Big|^p dx \le \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{B(x,1)} \int_{B(x,1)} |f(y)|^p\,dy\,dx$$

$$\varphi(tx + (1-t)y) \le t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$$

$$\varphi(\mathbb{E}X) \le \mathbb{E}\varphi(X).$$

Dla krzywej φ wypukłej

$$\varphi(\mathbb{E}X) \le \mathbb{E}\varphi(X).$$

!!!

nier. Jensena

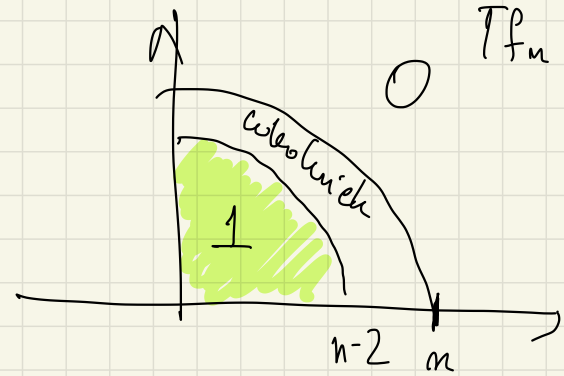
$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{B(x,1)} \int_{B(x,1)} |f(y)|^p \, dy \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{C_d} \int_{B(0,1)} |f(y+x)|^p \, dy \, dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \frac{1}{C_d} \int_{B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y+x)|^p \, dx \, dy = \frac{1}{C_d} \int_{B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \, dy$$

$$= \frac{1}{C_d} \int_{B(0,1)} \|f\|_p^p \, dy = \|f\|_p^p \leq 1 \implies \|T\| \leq 1.$$

Teraz $\|T\| = 1$. $\quad f_n = \dfrac{\mathbb{1}_{B(0,n)}}{C_d \cdot n^d}$

Teraz $\|T\|=1$. $\quad f_n = \dfrac{\mathbb{1}_{B(0,n)}}{(C_d\cdot n^d)^{1/p}}$



$$\|Tf_n\|_p^p = \int |Tf_n|^p\,dx =$$

$$= \frac{1}{(C_d\cdot n^d)} \int \Big|\underbrace{T\mathbb{1}_{B(0,n)}}_{\geq \mathbb{1}_{B(0,n-2)}}\Big|^p \geq$$

$$= \frac{1}{(C_d\, n^d)}(n-2)^d C_d = \left(\frac{(n-2)}{n}\right)^d = \left(1-\frac{2}{n}\right)^d \to 1$$

gdy $n\to\infty$.

Znaleźliśmy ciąg $\{f_n\}$, t. że $\|f_n\|_p \leq 1$ i $\|Tf_n\|_p \to 1$.

(C1) X – przestrzeń unormowana, $\dim X < \infty$.

Dowieść, że każdy funkcjonał liniowy na X jest ciągły tzn $\|\varphi\| < \infty$.

W X mamy bazę $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Weźmy funkcjonał φ (liniowy) na X.

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i)\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \underbrace{|\varphi(e_i)|}_{\le \sup_{1 \le i \le n} |\varphi(e_i)| = A} \le A \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$\le A \cdot \|x\|_1 \Rightarrow$ z dokł. do stałej

$$\|\varphi\| \le A \cdot C$$

(2) $\cancel{X}$ niesk. wym p. unormowana. Wówczas istnieje φ funk. liniowy który jest nieciągły.

GAL: $\{e_i\}_{i\in I}$ t. że

- każdy skończony podzbiór jest liniowo niezal.
- $\forall_{x\in X} \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ dla jedn. wyzn. x_i, e_i.

Weźmy sobie przeliczalny podzbiór $\{e_i\}_{i\in I}$, nazw. go $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$; załóżmy, że $\|e_i\|=1$.

$$\varphi(e_j) = j$$
$$\varphi(e_i) = 0 \quad \text{dla niewybranych } i$$

Dlaczego $\|\varphi\| = \infty$?

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|\le 1} |\varphi(x)| \ge j \to \infty.$$

(C3) $(P[0,1], \|\cdot\|_1)$ $\leftarrow$ $\int_0^1 |f(x)|\,dx$

$\uparrow$ wielomiany na $[0,1]$

Baza Hamela w przestrzeni $P[0,1]$:

$\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

$\varphi_0(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = a_0$

nut

$(x-1)^n$

• $\varphi_0\left((x-1)^n\right) = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ parz} \\ -1. & n \text{ nieparz} \end{cases}$

• do czego dąży $(x-1)^n \to 0$ w tej przestrzeni

$\int \underbrace{|x-1|^n}_{\leq 1} dx \to 0$ z tw o zb. zmaj.

$$\varphi_0\left((x-1)^n\right) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

<u>nie jest ciągły</u>.

$$(x-1)^n \longrightarrow 0$$

$$\varphi_k\left(a_0 + \dots + a_k x^k + \dots + a_n x^n\right) = a_k$$

$$\varphi_k\left(x^k (x-1)^n\right) = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ parz} \\ -1 & n \text{ nieparz.} \end{cases}$$

$\mathcal{L}(X, Y)$ jest p. Banacha z normą operatorową gdy

$(X, \|\cdot\|_X)$ - unormowane

$(Y, \|\cdot\|_Y)$ - Banacha

$\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ $T_n \longrightarrow T$
ciąg Cauchy'eg.

D1 $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ jest zawsze przestrzenią Banacha (albo $(X, \|\cdot\|_X)$ unor)

$\parallel$

X^*

D3 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ - p. Banacha $T: Y \to Y$, T jest ograniczony

Pok. że $\sum_{k\geq 0} \frac{T^k}{k!}$ zbiega w $\mathcal{L}(Y,Y)$ (wzgl. normy operatorowej)

to jest przestrzeń Banacha

W każdej przestrz. Banacha $\sum_{k\geq 1} |x_k| < \infty \Rightarrow \sum_{k\geq 1} x_k$ jest zbieżny w p. Banacha

Wystarczy że $\sum_{k\geq 0} \left\| \frac{T^k}{k!} \right\| < \infty$.

$(\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|)$

$\left\| \frac{T^k}{k!} \right\| = \frac{1}{k!} \|T^k\| \leq \frac{1}{k!} \|T\|^k$. $\sum_{k\geq 0} \left\| \frac{T^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k\geq 0} \frac{\|T\|^k}{k!} = e^{\|T\|} < \infty$.

$$\sum \frac{T^k}{k!} = e^T \longrightarrow$$ WAŻNY OPERATOR.

$$\underbrace{\dot{x} = Ax}$$
$$x(0) = x_0$$

$x \in \mathbb{R}^n$ $\quad x(t)$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\underbrace{x(t) = x_0 \cdot e^{At}}$$

(Hille-Yosida theorem)

$\Downarrow$

PDEs

procesy stoch

$$\partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t)$$

(równanie ciepła).

poch po t

druga poch po x

$$\left\| \frac{T^k}{k!} \right\| = \frac{1}{k!} \|T^k\| \leq \frac{1}{k!} \|T\|^k . \quad \sum_{k \geq 0} \left\| \frac{T^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k \geq 0} \frac{\|T\|^k}{k!} = e^{\|T\|} < \infty .$$

D4 $\|T\| < 1$

$\sum T^k$ jest zbieżny w $L(X,X)$ dla X Banacha

$\|T^k\| \leq \|T\|^k$ $\quad\quad$ $\sum \|T^k\| \leq \sum \|T\|^k = \frac{1}{1-\|T\|} < \infty$.

$(I-T)^{-1} = \sum T^k$