AF Tutorial 4

5.11.2020

B14 $T: (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$

$Tf = f'$ $\quad$ T nie jest operatorem ograniczony

Gdyby T był ogr. $\exists_N$ $\|Tf\|_\infty \leq N$ $\forall_{f \in C^1[0,1], \|f\|_\infty \leq 1}$

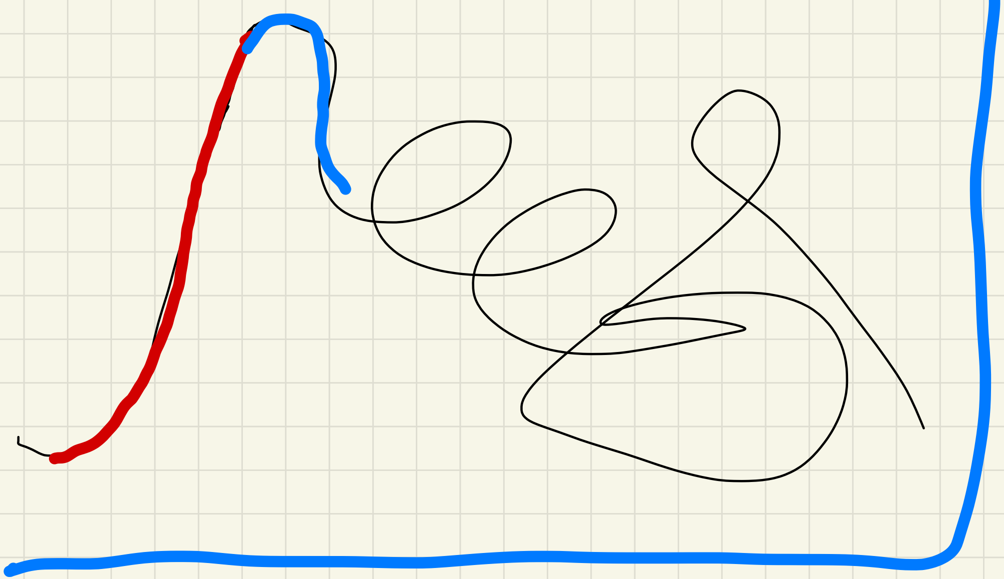
$\|f'\|_\infty \leq N$

$\exists_N \forall_{f \in C^1[0,1], \|f\|_\infty \leq 1} \|f'\|_\infty \leq N$

Weźmy $f_n = x^{n+1}$, $f_n' = (n+1)x^n$

$\|f_n\|_\infty = 1$, $\|f_n'\|_\infty = (n+1)$

$\Rightarrow (n+1) \leq N \ \forall_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow$ SPRZ.



1) tw. Banacha-Steinhaus

2) tw. o wykresie domkn.

3) tw. o funkcji odwrotnej

(*) tw. o odwz. otwartym

(**) tw. Baire'a.

Tw. Baire'a: (X, d) - metryczna zupełna

Jeżeli K_i są domknięte i brzegowe $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ jest brzegowa.

(A1) Zał. że nieskończenie wymiarowa przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ ma przeliczalną bazę Hamela. Wówczas $(X, \|\cdot\|)$ nie jest przestrzenią Banacha.

Zał. że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha. Oznaczmy $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ baza Hamela $(X, \|\cdot\|)$.

$$K_i = \operatorname{span}(e_1, e_2, \ldots, e_i)$$

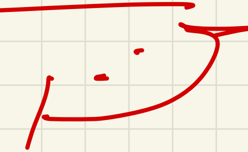
$$\|e_i\| = 1$$

$K_i = \text{span}(e_1, e_2, \dots, e_i)$

- K_i brzegowy: zał. że istnieje $x \in K_i$ i kula $B(x,r) \subset K_i$.
  Ta kula zawiera wektory w każdym kierunku $x + e_{i+1} \cdot \frac{r}{2}$.
  $\Rightarrow$ Sprzeczność bo $K_i = \text{span}(e_1, e_2, \dots, e_i)$.

- K_i jest domknięty: Każda podprzestrzeń liniowa skończenie wymiarowa jest domknięta.

$\Rightarrow$ $\underbrace{\bigcup K_i}_{= X}$ jest brzegowa w $(X, \|\cdot\|_X)$ $\Rightarrow$ SPRZECZNOŚĆ.



Baza Hamela: $\{e_i\}_{i \in I}$

- $\forall_{x \in X}$ $\exists!$ sk. wiele e_i, $a_i \in \mathbb{R}$ $\quad x = \sum a_i e_i \quad$ (span)

- liniowa niezależność

A2 $X = \{$ ciągi $(x_1, x_2, \dots)$ t. że tylko skończenie wiele x_i jest niezerowa $\}$.

$$(0,1,2,3,4,5,0,0,\dots)$$

X ma przeliczalną bazę Hamela: $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$e_i = (0,0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1},0,\dots)$$

A3 $(\mathcal{P}[0,1], \|\cdot\|)$ – Banacha z pewną normą ?

NIE: $\quad e_n = x^n \in \mathcal{P}[0,1]$.

❗ TW. BANACHA-STEINHAUSA
(Uniform Boundedness Principle)

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ $\qquad T_\alpha : X \to Y$ $\qquad \alpha \in A$.

Banacha $\qquad$ unormowana $\qquad T_\alpha \in \mathcal{L}(X, Y)$ $\qquad$ to może być nieprzel.

$$\forall_{x \in X} \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\| < \infty \implies \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\| < \infty.$$

$$\forall_{x\in X}\ \sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha x\|<\infty \Rightarrow \sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha\|<\infty.$$

$$\forall_{x\in X}\ \exists_{C_x}\ \sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha x\|\leq C_x \Rightarrow \exists_{C}\ \sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha\|\leq C$$

$$\forall_{x\in X}\ \exists_{C_x}\ \sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha x\|\leq C_x \Rightarrow \exists_{C}\ \sup_{\alpha\in A}\ \sup_{\|x\|\leq 1}\|T_\alpha x\|_Y\leq C$$

$$T_\alpha : X\to Y$$

$$\forall_{x \in X} \ \exists_{C_x} \ \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\| \leq C_x \Rightarrow \exists_C \sup_{\alpha \in A} \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_\alpha x\|_Y \leq C$$

(B2) $(f_n) \subset L^2(0,1)$ ciąg

norma $\|f\|_2 = \left(\int |f|^2\right)^{1/2}$

taki, że $\forall_{g \in L^2(0,1)}$ $\int_0^1 f_n(x) g(x)\, dx \longrightarrow C_g$ $n \to \infty$

$C_g \in \mathbb{R}$

Dowieść, że $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty$.

$n \in \mathbb{N} \to$ indeksuje rodzinę

$T_n : L^2(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$T_n(g) = \int_0^1 f_n(x) g(x)\, dx$$

$$\forall_{x\in X}\ \exists_{C_x}\ \sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha x\| \le C_x \implies \exists_{C}\ \sup_{\alpha\in A}\ \sup_{\|x\|\le 1}\|T_\alpha x\|_Y \le C$$

$$T_n(g) = \int_0^1 f_n(x)\,g(x)\,dx \qquad T_n : L^2(0,1) \to \mathbb{R}.$$

<u>Zał</u>: $\forall_{g\in L^2(0,1)}\ \exists_{C_g}\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big|\underbrace{\int_0^1 f_n(x)\,g(x)\,dx}_{\text{ciąg liczb ograniczony b- zbieżny}}\Big| \le C_g.$

<u>Teza</u>: $\exists_{C}\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\ \sup_{\|g\|_2\le 1} \Big|\int_0^1 f_n(x)\,g(x)\,dx\Big| \le C$

$$g = \frac{f_n}{\|f_n\|_2} \implies \exists_{C}\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2 \le C$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty$$

(B3) $(X, \|\cdot\|_X)$ – pn. Banach, $A \subset X^*$

przestrzeń z normą operatorową.

Załóżmy, że $\forall_{x \in X} \; \{\varphi(x) : \varphi \in A\}$ jest ograniczony w $\mathbb{R}$.

Pokazać, że A jest ograniczony w X^*, $\sup_{\varphi \in A} \|\varphi\| < \infty$.

$$\forall_{x \in X} \; \exists_{C_x} \; \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\| \leq C_x \Rightarrow \exists_{C} \; \sup_{\alpha \in A} \; \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_\alpha x\|_Y \leq C$$

Rozw: $T_\varphi(x) = \varphi(x) \quad T_\varphi : X \to \mathbb{R}$

$$\forall_{x \in X} \; \exists_{C_x} \; \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\| \leq C_x \implies \exists_{C} \; \sup_{\alpha \in A} \; \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_\alpha x\|_Y \leq C$$

Rozw: $T_\varphi(x) = \varphi(x) \qquad T_\varphi : X \to \mathbb{R}$

Zał: $\forall_{x \in X} \; \exists_{C_x} \; \sup_{\varphi \in A} |\varphi(x)| \leq C_x$

Teza: $\exists_{C} \; \sup_{\varphi \in A} \; \underbrace{\sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|}_{= \|\varphi\|} \leq C.$

$\exists_{C} \; \sup_{\varphi \in A} \|\varphi\| \leq C$

✓.

2-gie zad. domowe:

$a : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ forma dwuliniowa

$a(x,y)$

Jeżeli

- $\forall_{x} \quad y \longmapsto a(x,y)$ jest ciągłe
- $\forall_{y} \quad x \longmapsto a(x,y)$ jest ciągłe

$\Rightarrow \quad (x,y) \longmapsto a(x,y)$ jest ciągłe.

$$\exists_{C} \quad |a(x,y)| \leq C \, \|x\| \cdot \|y\|.$$

Twierdzenie o wykresie domkniętym

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – dwie przestrzenie Banacha

$T: X \to Y$ jest w $\mathcal{L}(X,Y) \iff$ $\overset{\text{graf}}{G(T)}$ jest domknięty w $X \times Y$
liniowy

$\iff \{(x, Tx) : x \in X\} \subset X \times Y$ jest domknięty.

Aby to sprawdzić
Weźmy $(x_n, Tx_n) \longrightarrow (x, y) \in X \times Y \Rightarrow y = Tx$?

(A1) $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, T jest bijekcją $\Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Banacha

Rozw: $G(T^{-1}) = \{(y, T^{-1}y) : y \in Y\}$.

Czy $G(T^{-1})$ jest domknięty. Rozważmy $(y_n, T^{-1}y_n) \to (y,z)$ w $Y \times X$.

$$\Rightarrow \begin{array}{l} y_n \to y \text{ w } Y \\ T^{-1}y_n \to z \text{ w } X \end{array} \overset{\text{chcemy}}{\underset{?}{\Longrightarrow}} T^{-1}y = z.$$

$$\Downarrow$$

$$\left(T^{-1}y_n \to z \Rightarrow \underbrace{T(T^{-1}y_n)}_{y_n \to y} \to Tz\right) \Rightarrow Tz = y \Rightarrow z = T^{-1}y.$$

$\square$.

(A2) $(X, \|\cdot\|)$ – p. Banacha $T: X \to X^*$

taki, że $\underbrace{(\overbrace{Tx}^{\in X^*})(y)}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{(\overbrace{Ty}^{\in X^*})(x)}_{\in \mathbb{R}}$ $\forall_{y,x \in X}$. (samosprzężoność)

Pok. że $T \in \mathcal{L}(X, X^*)$.

$$G(T) = \{ (x, Tx) : x \in X \} \subset X \times X^*.$$

Czy $G(T)$ jest domknięty?

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y) \text{ w } X \times X^* \overset{?}{\Rightarrow} y = Tx$$

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y) \text{ w } X \times X^* \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{y}_{} = \underbrace{Tx}_{\in X^*}$$

$Tx_n \to y$ w X^*

$$\Leftrightarrow \forall_{z \in X} \; y(z) = (Tx)(z)$$

$(Tu)(v) = (Tv)(u) \quad \forall_{u,v \in X}.$

Ustalmy $z \in X$.

Z założenia $(Tx_n)(z) = (Tz)(x_n)$

Granica $(Tz)(x_n) \longrightarrow (Tz)(x)$ bo Tz jest ciągłe i $x_n \to x$

Granica $(Tx_n)(z) \longrightarrow (y)(z)$ bo (patrz wcześ.str.) w X.

$\Rightarrow (Tz)(x) = (y)(z)$ ale $(Tz)(x) = (Tx)(z) = y(z)$.

$\square$.

Granica $(Tx_n)(z) \longrightarrow (y)(z)$ bo wiemy, że $Tx_n \to y$ w X^*

Wyjaśnienie: $Tx_n \to y$ w $X^* \iff \|Tx_n - y\| \to 0$ $k \to \infty$

norma op.

$$\iff \sup_{\|z\| \leq 1} |(Tx_n)(z) - y(z)| \to 0$$

$$\Rightarrow \forall_{\|z\| \leq 1} |(Tx_n)(z) - y(z)| \to 0$$

$$\Rightarrow \forall_{z} (Tx_n)(z) \to y(z)$$ (przez przeskalowanie)

A3 $\quad T: X \to X^*$ $\quad \underbrace{(Tx)}_{\in X^*}\underbrace{(x)} \geq 0 \quad \forall_{x \in X}. \Rightarrow T \in \mathcal{L}(X, X^*)$

(trik Minty-Browdera) !!!

(podobnie jak w A2).

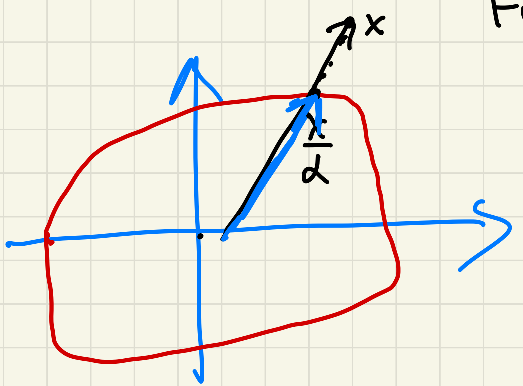
E1 / PS1

$(E, \|\cdot\|)$ – przestrzeń unormowana

$C \subset E$ – zbiór wypukły, otwarty, $0 \in C$.

$g : E \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \inf\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\}$.

Funkcjonał Minkowskiego



$$g(x) = \inf\left\{\alpha>0 : \frac{x}{\alpha}\in C\right\}.$$

$$(1)\quad g(\gamma x) = \gamma\, g(x) \qquad \forall\, \gamma>0$$

$$\| $$

$$\inf\left\{\alpha>0 : \frac{\gamma x}{\alpha}\in C\right\} = \inf\left\{\alpha>0 : \frac{x}{\underbrace{\alpha/\gamma}_{=\beta}}\in C\right\}$$

$$= \inf\left\{\beta\cdot\gamma : \frac{x}{\beta}\in C\right\} = \underline{\gamma\, g(x)}.$$

(2) nier. trójkąta

$$\underbrace{\varphi(x+y)}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle \inf\left\{\alpha>0:\ \frac{x+y}{\alpha}\in C\right\}} \leq \varphi(x)+\varphi(y).$$

$$\inf\left\{\alpha>0:\ \frac{x+y}{\alpha}\in C\right\} \leq \varphi(x)+\varphi(y)$$

wystarczy $\dfrac{x+y}{\varphi(x)+\varphi(y)} \in C$ (z wypukłości C)

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x}{\varphi(x)}\underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(y)}} + \frac{y}{\varphi(y)}\underbrace{\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}}$$

wagi do komb. wyp.

Wyst. $\dfrac{x}{\varphi(x)}, \dfrac{y}{\varphi(y)} \in C$. $\longrightarrow$ to nie działa.

$$\exists_{\alpha_n, \beta_n} \quad \alpha_n \searrow \varphi(x), \quad \beta_n \searrow \varphi(y), \quad \frac{x}{\alpha_n} \in C, \quad \frac{y}{\beta_n} \in C.$$

$$\underbrace{\frac{x}{\alpha_n} \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n} + \frac{y}{\beta_n} \cdot \frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}}_{\displaystyle \frac{x+y}{\alpha_n+\beta_n}} \in C$$

$$\frac{x+y}{\alpha_n+\beta_n} \in C$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(x+y) \leqslant \alpha_n+\beta_n \longrightarrow \varphi(x)+\varphi(y).$$