AF Tutorial 5

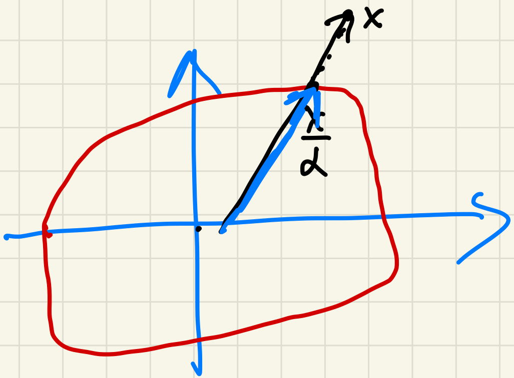
19.11.2020

E1 / PS1

$(E, \|\cdot\|)$ – przestrzeń unormowana

$C \subset E$ – zbiór wypukły, otwarty, $0 \in C$.

$\varrho : E \to \mathbb{R} \quad \varrho(x) = \inf\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\}$.



1) $\varrho(\alpha x) = \alpha \varrho(x) \quad \forall_{\alpha > 0}$

2) $\varrho(x+y) \leq \varrho(x) + \varrho(y)$

3) $\exists_M \quad \rho(x) \leq M\|x\| \quad \forall_{x \in E}$

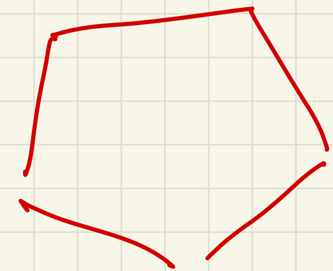
C otwarty, $0 \in C \Rightarrow \exists_R \quad B(0,R) \subset C$

$\forall_x \quad \frac{x}{\|x\|} \frac{R}{2} \in C \Rightarrow \frac{x}{\frac{2\|x\|}{R}} \in C$

$\rho(x) = \inf\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\}$,

$\rho(x) \leq \frac{2\|x\|}{R} \qquad M = \frac{2}{R}. \qquad \checkmark$,

4) $C = \{x \in E : g(x) < 1\}$



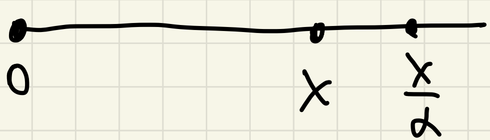
$C \subseteq \{x \in E : g(x) < 1\}$:

$x \in C \Rightarrow \exists_{\varepsilon > 0} \ (1+\varepsilon)x \in C \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{1}{1+\varepsilon}} \in C \Rightarrow$

$g(x) \leq \dfrac{1}{1+\varepsilon} < 1.$ ✓.

$C \supseteq \{x \in E : g(x) < 1\}$:

weźmy x t. że $g(x) < 1$. $\exists_{\alpha < 1} \ \dfrac{x}{\alpha} \in C$



z wypukłości $x \in C$. ✓.

przestrzenie Banacha	przestrzenie unormowane które nie są Banacha
• L^p z normą $\|\cdot\|_p$ $(1\le p\le\infty)$	• L^2 z normą L^1
• ℓ^p przestrzeń ciągów $(1\le p\le\infty)$	• C^1 z normą $\|f\|_\infty$
• c_0 z normą $\|\cdot\|_\infty$	• $P[0,1]$ z normą $\|f\|_\infty$
• $C^0[0,1]$ z normą $\|\cdot\|_\infty$	
• $C^k[0,1]$ z normą $\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty+\dots+\|f^{k}\|_\infty$	
• C_0 z $\|\cdot f\|_\infty$	
• C_{Lip} z $\|f\|_\infty+\lvert f\rvert_{Lip}$	
• $C^\alpha[0,1]$ z $\|f\|_\infty+\lvert f\rvert_\alpha$	

B5 | PS3

E, F - przest. Banacha

$a : E \times F \to \mathbb{R}$

$$B(f,g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \qquad \left(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1 \right) = E = F.$$

X $=$

przy ust. $f \in X$ $\quad g \mapsto B(f,g)$ to jest ciągłe.

$$\left| \int_0^1 \underbrace{f(x)} g(x)\, dx \right| \leq \|f\|_\infty \underbrace{\int_0^1 |g(x)|\, dx} = \|f\|_\infty \|g\|_1$$

Gdyby B było ciągłe po obydwu wsp. $\exists_C$

$$|B(f,g)| \leq C \, \|f\|_1 \, \|g\|_1 \quad \forall_{f,g \in X}.$$

$$\left|\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dy\right| \leq C \int |f(x)|\, dx \int |g(x)|\, dx$$

$f=g$ $$\int_0^1 f^2(x)\, dx \leq C\left(\int |f(x)|\, dx\right)^2 \quad \forall_{f \in X}.$$

$f = x^n$ $$\frac{1}{2n+1} \leq C\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \quad \forall_n.$$

$$\Rightarrow \quad (n+1)^2/2n+1 \leq C \quad \Rightarrow \text{sprzeczność.}$$

B7 $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(E, F)$ ← p. unormowana.

↑ p. Banacha

$\forall_x$ $\{T_n x\}_n$ jest zbieżny w F tzn. $T_n x \to Tx$

$\Rightarrow$ ta granica definiuje ogr. operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

PUNKTOWA GRANICA OP. OGR.

JEST OP. OGR.

$f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$ funkcje ciągłe

$f_n(x) \longrightarrow \mathbb{1}_{\{1\}}$. $\rightarrow$ to nie jest ciągłe

funkcja x^n nie jest liniowa!

$\forall_x \{T_n x\}_n$ jest zbieżny w F tzn. $T_n x \to Tx$

$\Rightarrow$ ta granica definiuje ogr. operator $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

operatorowe

(1) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$

BS: $\forall_x \exists_{C_x} \|T_n x\|_F \leq C_x$ (jedn. po n).

To prawda bo $\{T_n x\}$ jest zbieżny więc ograniczony.

$$\exists_C \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| \leq C$$

(2) $T \in \mathcal{L}(E,F)$ $\qquad \|T\| \overset{?}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$

$$\forall_x \quad \|Tx\|_F \leq \|(T-T_n)x\|_F + \|T_n x\|_F$$

$$\|Tx\|_F \leq \liminf_{n\to\infty} \|(T-T_n)x\|_F + \liminf_{n\to\infty} \|T_n x\|_F$$

$$= 0 + \liminf_{n\to\infty} \underbrace{\|T_n x\|_F}_{\leq \|T_n\|\cdot\|x\|_E}$$

$$\|Tx\|_F \leq \|x\|_E \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$$

$$\Rightarrow \quad \|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$$

Wersja Wojtka: $\|T\| \leq \sup_n \|T_n\|$.

- Twierdzenie Banacha-Steinhausa
- Twierdzenie o grafie domkniętym
- Twierdzenie o odwzorowaniu odwrot.

na pr. Banacha E, F

CIĄGŁA BIJEKCJA MA CIĄGŁĄ ODWROTNOŚĆ

B1 / PS 4 : X – przestrzeń liniowa

1) $\|\cdot\|_1, \ \|\cdot\|_2$ – normy na X

2) $(X, \|\cdot\|_1), \ (X, \|\cdot\|_2)$ – p. Banacha

3) $\exists_C \quad \|x\|_2 \leq C \|x\|_1$

$\Rightarrow \ \exists_{\tilde{C}} \quad \|x\|_1 \leq \tilde{C} \|x\|_2 .$

$\longrightarrow$ normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ są równoważne

Dowód: $T : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ identyczność

- bijekcja $\checkmark$.
- op. ograniczony: $\|Tx\|_2 \leq C\|x\|_1$

$$\Updownarrow$$

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \checkmark.$$

$\Rightarrow$ T^{-1} jest ograniczony $\|T^{-1}x\|_1 \leq \tilde{C}\|x\|_2$

$\Rightarrow$ $\underline{\|x\|_1 \leq \tilde{C}\|x\|_2}$.

B2 | PS4

$C[0,1]$ z normą $L^p(0,1)$ $1 \leq p < \infty$ nie jest Banacha.

Zał. że $(C[0,1], \|\cdot\|_p)$ jest Banacha. Wiemy, że $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ jest Banacha.

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \exists_C \quad \|f\|_\infty \leq C\|f\|_p$$

1) $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ – normy na X

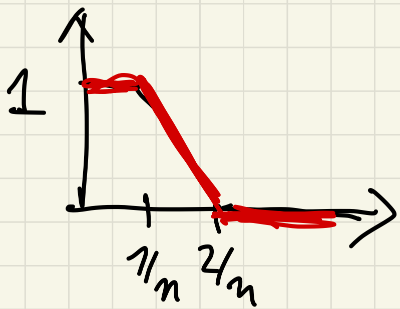
2) $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ – p. Banacha

3) $\exists_C \quad \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$

$\Rightarrow \exists_{\tilde{C}} \quad \|x\|_1 \leq \tilde{C}\|x\|_2$.

$\exists_C \quad \|f\|_\infty \leq C \|f\|_p$ to jest nierówność!

$\forall_{f \in C([0,1])} \quad \|f\|_\infty \leq C \left(\int_0^1 |f(t)|^p \right)^{1/p}.$

$f_n =$ 

$\|f_n\|_\infty \leq C \left(\int_0^1 |f_n(t)|^p \right)^{1/p}$

$\|f_n\|_\infty = 1$, $\quad C \left(\int_0^1 |f_n(t)|^p \right)^{1/p} \leq C \left(\frac{2}{n}\right)^{1/p}$

$\Rightarrow 1 \leq C \left(\frac{2}{n}\right)^{1/p} \quad n \to \infty \quad \underset{\sim}{1 \leq 0}$ sprzeczność.

B3 $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ nie jest Banacha

ciągi (x) t. że $\sum |x_i| < \infty$.

Dowód

Gdyby $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ Banacha; wiemy, że $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ jest Banacha.

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1$$

$$\Rightarrow \exists_C \quad \|x\|_1 \le C \|x\|_\infty$$

$$x_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n}, 0, 0, \dots)$$

$$n \le C \quad \forall_n$$

$\Rightarrow$ sprzeczność

Przestrzenie Hilberta H:

Iloczyn skalarny $\langle \cdot , \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ $\quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C})$.

1) $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$
2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3) $\langle x, x \rangle > 0 \quad x \neq 0 \; ; \; \langle 0, 0 \rangle = 0.$

Przestrzeń Hilberta H ma dany iloczyn skalarny $\langle \cdot , \cdot \rangle$

i dla $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $\quad (H, \|\cdot\|)$ jest Banacha.

A 1 $L^2(0,1)$, ℓ^2

iloczyn skalarny na $L^2(0,1)$:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \qquad \text{nad } \mathbb{C}$$

(nad $\mathbb{C}$: $\|x\| = \sqrt{x \cdot \overline{x}}$)

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx. \qquad \text{nad } \mathbb{R}$$

ℓ^2: $\quad x = (x_1, \ldots)$

$\quad\quad y = (y_1, \ldots)$

nad $\mathbb{C}$: $\quad \sum x_i \cdot \overline{y_i} = \langle x, y \rangle$

nad $\mathbb{R}$: $\quad \sum x_i y_i = \langle x, y \rangle$.

A2 $C[0,1]$ nad $\mathbb{R}$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

$(C[0,1], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest Hilberta?

Gdyby była to $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$ byłaby Banacha a

już wiemy, że nie jest :)

(A3) $x \perp y$ tzn. $\langle x, y\rangle = 0$ nad $\mathbb{C}$.

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (\text{Pitagoras}).$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle =$$

$$= \overline{\langle x+y, x\rangle} + \overline{\langle x+y, y\rangle} =$$

$$= \overline{\langle x, x\rangle} + \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle x, y\rangle} + \overline{\langle y, y\rangle}$$

$$= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\underbrace{\langle y, x\rangle}_{=0} + \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

$z = a + bi$

$\overline{z} = a - bi$

$K \subset H$

zbiór domk. wyp, niepusty

pr. Hilb

P_K – rzut prostopadły

$P_K : H \longrightarrow H$

$P_K(x)$ to jest taki punkt z $K \ni y$

że $\inf\limits_{z \in K} \|z - x\| = \|y - x\|$

RZUT

$$\inf_{z \in K} \|z - x\| = \|P_K x - x\|$$

DOP. ORT:

$K \subset H$

$$K^{\perp} = \{ y \in H : \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall_{x \in K} \}.$$

ROZKŁAD NA SUMĘ PROSTĄ

$M \subset H$, M domknięta podprzestrzeń (liniowa)
(rzut na M jest dobrze zdef.).

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

$$\forall_{x \in H} \ \exists!_{\substack{y_1 \in M \\ y_2 \in M^{\perp}}} \quad x = y_1 + y_2$$

$$y_1 = P_M x$$

$$y_2 = P_{M^{\perp}} x = x - P_M x.$$

B1 $K \subset H$, K podzbiór.

$K^\perp$ jest domknięte, jest liniową podprzestrzenią.

$\shortparallel$ $\{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall_{y \in K}\}$.

• liniowa podprzestrzeń: $x_1, x_2 \in K^\perp \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha x_1 + \beta x_2 \in K^\perp$

$$\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \underbrace{\langle x_1, y \rangle}_{=0} + \beta \underbrace{\langle x_2, y \rangle}_{=0} = 0.$$

• domknięte: $\{x_n\} \subset K^\perp$, $x_n \to x$ w H $\underset{?}{\Longrightarrow}$ $x \in K^\perp$.

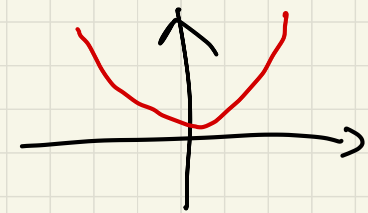
$\{x_n\} \subset K^\perp$, $x_n \to x$ in H $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $x \in K^\perp$.

$\underset{y \in K}{\forall}$ $\langle x_n, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$ $\forall_{y \in K}$.

$$\langle x_n - x, y \rangle \underset{\text{C-S}}{\leq} \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to 0$$

(B3) $X = \{ f \in L^2(-1,1) : f(x) = f(-x) \}$.

parzyste.



(i) X jest domknięte w $L^2(-1,1)$.

$\{f_n\} \subset X \quad f_n \to f$ w $L^2(-1,1) \overset{?}{\Longrightarrow} f \in L^2(-1,1)$.

Istnieje $f_{n_k} \to f$ p.w. na $(-1,1)$.

$f_{n_k}(x) = f_{n_k}(-x)$. $\Rightarrow$ $f(x) = f(-x)$. $\Rightarrow f \in X$.

$\square$.

(ii) $X^{\perp} = \{ f \in L^2(-1,1) : \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx = 0 \quad \forall g \in X \}$.

$$0 = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx = \int_{-1}^{0} f(x) g(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x) g(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{1} f(-x) \underbrace{g(-x)}_{=g(x)}\, dx + \int_{0}^{1} f(x) g(x)\, dx \qquad g \in X$$

$$= \int_{0}^{1} g(x) \left[f(x) + f(-x) \right] dx . \qquad \forall g \in X .$$

$$X^{\perp} \stackrel{?}{=} \{ f \in L^2(-1,1) : f(x) = -f(-x) \} .$$

$$\int_0^1 g(x)\left[f(x)+f(-x)\right]dx = 0 \quad \forall_{g\in X}.$$

$$X^{\perp} \overset{?}{=} \underbrace{\{ f\in L^2(-1,1):\ f(x)=-f(-x) \}}_{=N}.$$

Tatwe. ten war. jest speł.

$f\in N \Rightarrow f\in X^{\perp}$

f t. że $f(x)=-f(-x) \Rightarrow f\in X^{\perp}$

$f\in X^{\perp} \Rightarrow f\in N.$

$$g(x):=f(x)+f(-x) \in X. \Rightarrow \int_0^1 \left[f(x)+f(-x)\right]^2 dx = 0.$$

$$\Rightarrow f(x)+f(-x)=0 \Rightarrow f(x)=-f(-x).$$

$f \in L^2(0,1)$

$$P_x f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

$$P_{x^\perp} f(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

z jednoznaczności to są rzuty.

B6 $E = \{ f \in L^2(0,1) : \int_0^1 f(t) = \int_0^1 f(t)\, t = 0 \}$.

Wyznaczyć odległość $g(t) = t^3$ od E.

Rozw: $\operatorname{dist}(g, E) = \inf_{f \in E} \| f - g \| = \inf_{f \in E} \left[\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \right]^{1/2}$

$E = \{ f \in L^2(0,1) : \langle f, 1 \rangle = \langle f, t \rangle = 0 \}$

$= \{ \operatorname{span}(1, t) \}^{\perp}$.

Chcę $\inf_{f \in E} \int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 \, dt = \| g - P_E g \|^2$

$E = (\operatorname{span}\{1, t\})^{\perp}$

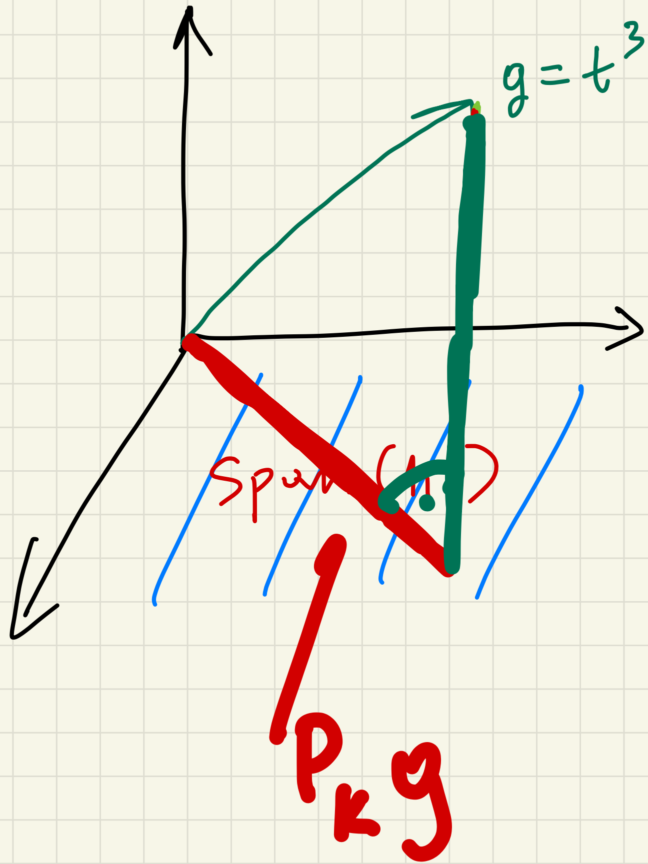
rzut na E jest trudny

rzut na $\operatorname{span}\{1, t\} = K$ jest łatwiejszy

zatem mam $P_K g$ i $P_E g = g - P_K g$.

$P_K g = ?$

$K = \text{span}\{1, t\}$



$P_K g = a + bt$

$a = ? \quad b = ?$

$P_K g - g \perp 1$

$P_K g - g \perp t$

$$P_K g - g \perp 1 \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 (a+bt-t^3)\,dt = 0 \\ \int_0^1 (a+bt-t^3)\,t\,dt = 0 \end{cases}$$
$$P_K g - g \perp t$$

$$\begin{pmatrix} P_K g = a+bt \\ g = t^3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} - \frac{1}{4} = 0 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} - \frac{1}{5} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{1}{5}, \quad b = \frac{9}{10} \Rightarrow P_K g = -\frac{1}{5} + \frac{9}{10} t.$$

$$\mathrm{dist}^2(g, E) = \int_0^1 |\underbrace{g(t) - P_E g(t)}_{P_K g}|^2 =$$

$$= \int_0^1 |P_K g|^2 \, dt = \int_0^1 \left| -\frac{1}{5} + \frac{9}{10} t \right|^2 = \frac{13}{100} .$$