AF Tutorial 6

26. 11. 2020

B8 / PS3

Teor. konsekw. tw. B-S:

1) forma dwuliniowa ciągła $\Leftrightarrow$ ciągła po wsp.

2) $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ $\quad T_n x \to Tx \quad \forall_x \Rightarrow T \in \mathcal{L}(X, Y)$

Kontrprzykład na (2)

$X = \{$ciągi mające co najwyżej sk. wiele niezer. wyrazów$\}$

$(X, \|\cdot\|_\infty)$ nie jest p. Banacha bo ma przeliczalną bazę Hamela

$T_n : X \to X$

$T_n(x) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4, \dots, n x_n, 0, 0, \dots)$

$T_n \in \mathcal{L}(X, X)$? liniowy ✓

Weźmy $x \in X$ t. że $\|x\| \leq 1$.

$\|T_n(x)\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |k x_k| \leq n. \Rightarrow T_n \in \mathcal{L}(X, X)$

$\|T_n\| \leq n.$

Dla każdego $x \in X$ $T_n x$ jest zbieżny, bo od pewnego momentu to jest stały ciąg.

$$Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x \quad w \quad X$$

$T \in \mathcal{L}(X, X)$? Gdyby był T ogr. $\forall_{\|x\|_\infty \leq 1} \|Tx\|_\infty \leq C$ $\exists_C$

$x = e_i$ $\quad Te_n = (0, \dots, 0, n, 0, \dots)$

$\Rightarrow \quad n \leq C \quad \Rightarrow$ sprzeczność.

- tw. Banacha–Steinhausa: "dla każdego $x \in X$ ..."
- tw. o wykresie domkniętym: "sprawdzanie ogr. operatorów danych abstrakcyjnymi wzorami → brak wzoru".
- tw. o odwz. otw.: "ciągła bij. na ciągłą odwr."
  → równoważność norm →

- tw. Baire: w przestrzeni zupełnej przelicz. suma zbiorów domkniętych i brzegowych jest brzegowa

Brzegowe ⇝ puste wnętrze

$(X, \|\cdot\|_X)$

K jest brzegowy w X: $\forall_{x \in K} \forall_{r} \; B(x,r) \not\subset K$, C4 / PS4 Na $C[0,1]$ istnieje tylko jedna norma $\|\cdot\|_\infty$ taka, że $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ jest Banacha i że zbieżność $\|f_n - f\| \to 0$ wynika zbieżność punktowa

z tw. o równ. norm.

Rozw Załóżmy, że istnieje norma $\|\cdot\|_A$ na $C[0,1]$ o własnościach j.w.

$$T: (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_A)$$

$$Tf = f.$$

$$T : \underbrace{\left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty \right)}_{\substack{\| \\ X}} \to \underbrace{\left(C[0,1], \|\cdot\|_A \right)}_{\substack{\| \\ Y}}$$

$$Tf = f.$$

T jest ograniczony bo:

$G(T) = \{ (f, f) \}$ to jest domknięte w $X \times Y$.

$$(f_n, f_n) \to (f, g) \text{ w } X \times Y \overset{?}{\Longrightarrow} f = g.$$

$f_n \to f$ w X $\Rightarrow$ $f_n \to f$ punktowo

$f_n \to g$ w Y $\Rightarrow$ $f_n \to g$ punktowo z zał. $\Rightarrow f = g.$

$\Rightarrow$ T jest ogr. $\quad \|f\|_A \leq C\|f\|_\infty .$

Tak samo (albo z tw. o odwz. odwr.)

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_A .$$

(C5) Na $L^p(0,1)$ istnieje dokładnie jedna norma $\|\cdot\|_p$ taka, że $(L^p, \|\cdot\|_p)$ jest zupełna i $\|f_n - f\|_p \to 0$ to $\exists_{\text{podciąg}}$ $f_{n_k} \to f$ p.w. na $(0,1)$.

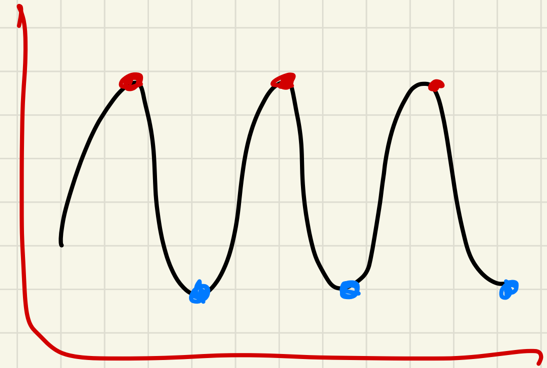
Rozw: Zał. że jest inna norma $\|\cdot\|_B$ o własnościach j.w.

$$T: \underbrace{(L^p(0,1), \|\cdot\|_p)}_{= X} \to \underbrace{(L^p(0,1), \|\cdot\|_B)}_{= Y}$$

$Tf = f$

T jest ograniczony ?

$$G(T) = \{(f, f)\} \subset X \times Y.$$



Spr. domkn.

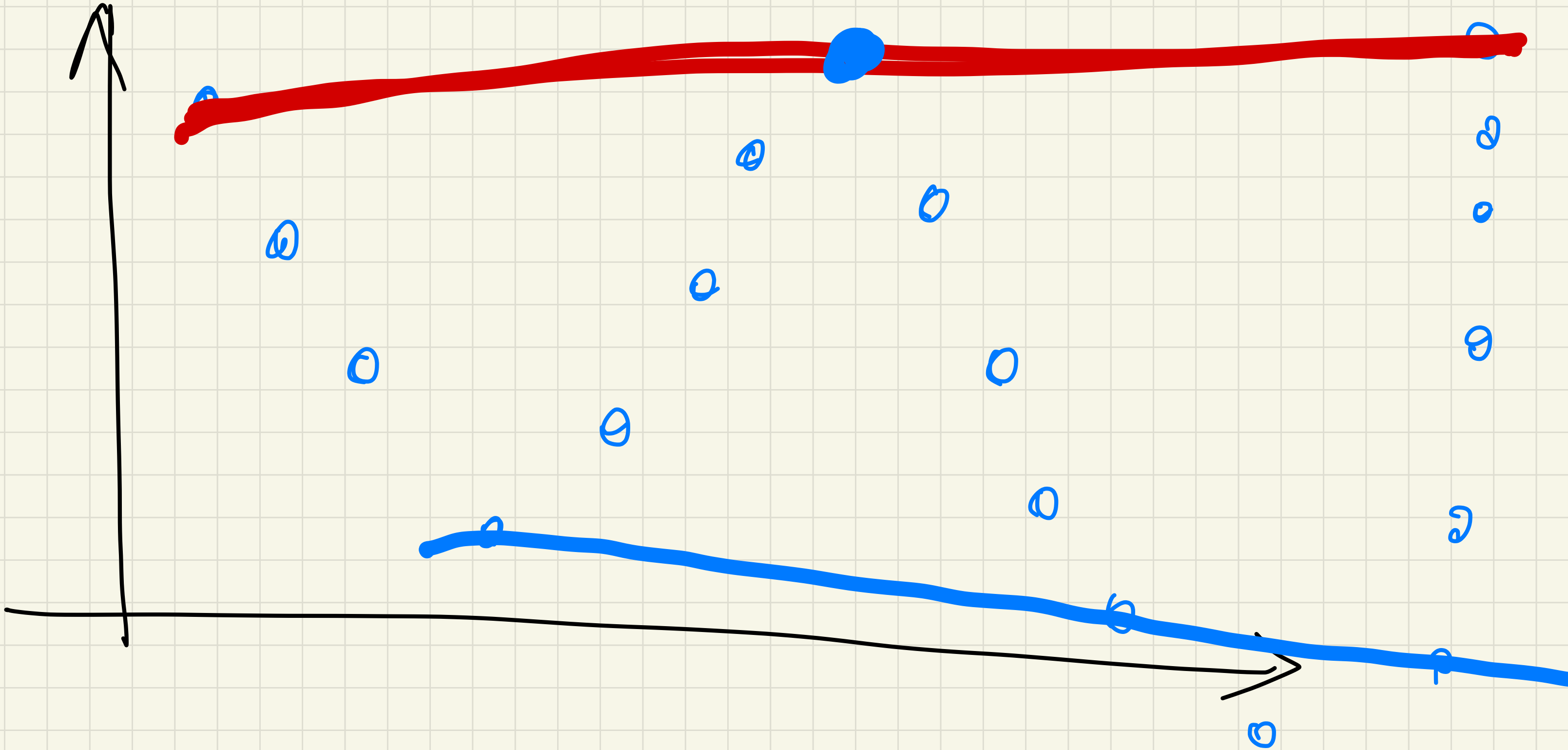
$$(f_n, f_n) \to (f, g) \text{ w } X \times Y. \overset{?}{\Rightarrow} f = g \text{ p.w.}$$

$$f_n \to f \text{ w } X \Rightarrow \exists n_k \; f_{n_k} \to f \text{ p.w}$$

$$f_n \to g \text{ w } Y \Rightarrow f_{n_k} \to g \text{ w } Y \Rightarrow$$

$$\exists n_{k_\ell} \; f_{n_{k_\ell}} \to g \text{ p.w}$$

$$\Rightarrow \boxed{f = g}$$



B5 / PS4

$A \in \mathcal{L}(X, X)$ Banacha

$$I + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_n A^n = 0 \quad \exists_n \ \exists_{c_i}$$

$\Rightarrow$ pokazać że A^{-1} istnieje i $A^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$.

Rozw: A jest ciągłe. A jest bijekcja? iniekcja, surjekcja

iniekcja: $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

surjekcja: $\forall_y \ \exists_x \ Ax = y$.

iniekcja : $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

surjekcja: $\forall_{y} \exists_{x} \; Ax = y$.

$$I + c_1 A + \dots + c_n A^n = 0 \quad / \cdot y$$

ustawiam $x \in \ker A \Rightarrow x + 0 + \dots + 0 = 0$

$\Rightarrow x = 0$.

ustalmy y, mam znaleźć x.

$$y + \underbrace{c_1 A y + \dots + c_n A^n y}_{} = 0$$

$$= A(c_1 y + \dots + c_n A^{n-1} y)$$

$x = -$ ___

A4 / PS 5

$$L^2(0,1) = \{ f \text{ mierzalne} : \int_0^1 |f(t)|^2 < \infty \}$$

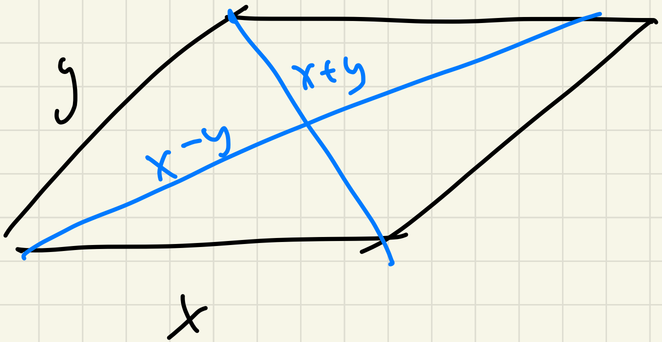
$$\{ f \text{ mierzalne} : \int_0^1 |f(t)|^2 e^t < \infty \}$$

$L^p(X, F, \mu)$ jest Banacha $\quad X = [0,1]$

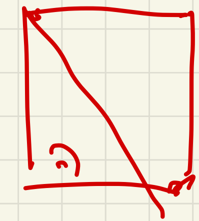
$$\mu = \lambda \cdot e^t$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} e^t \, dt.$$

A5 Tożsamość równoległoboku



$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$
$$= \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$



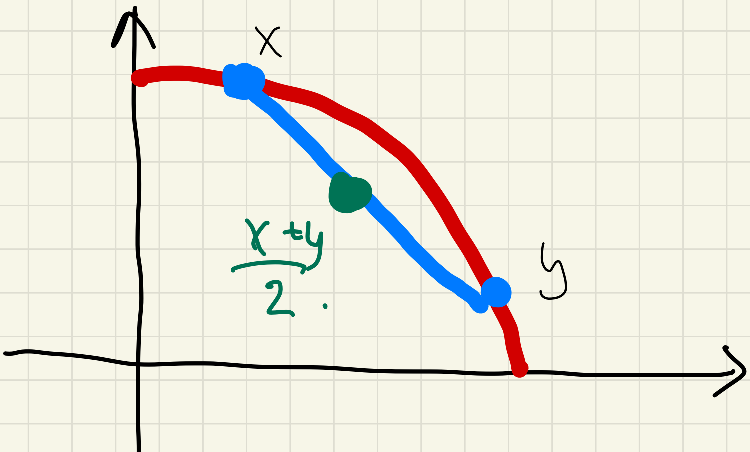
Jednostajna wypukłość:

$(E, \|\cdot\|_E)$ jest JW gdy $\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0}$

$$\|x\| = \|y\| = 1, \ \|x-y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1-\delta$$

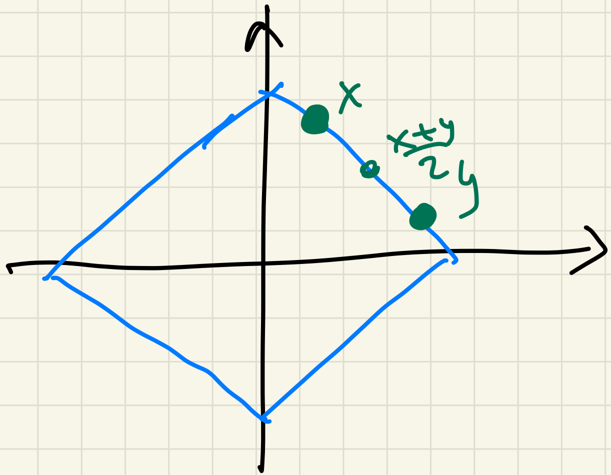
$(E, \|\cdot\|_E)$ jest JW gdy $\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0}$

$$\|x\| = \|y\| = 1 \ , \ \|x-y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1-\delta$$

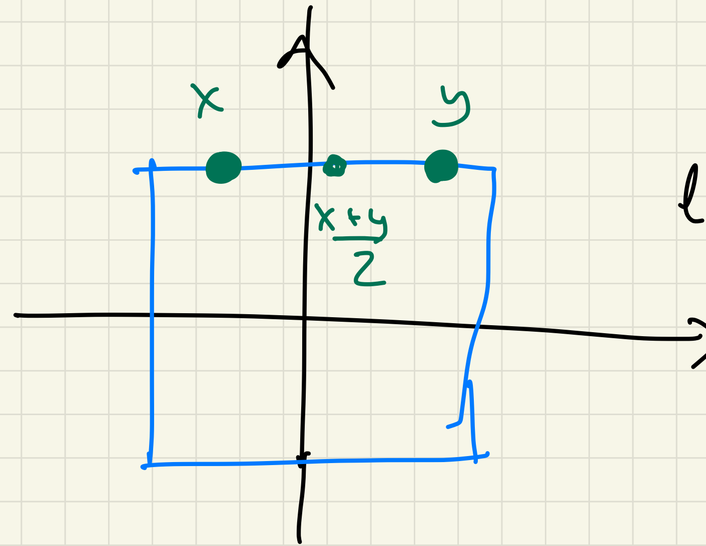


WŁASNOŚĆ SFERY.

Przykład: ℓ^1, ℓ^∞ na $\mathbb{R}^2$



ℓ^1



ℓ^∞

$|x_1| + |x_2| = 1$

$\max(|x_1|, |x_2|) = 1$

Zad: Każda przestrzeń Hilb jest jedn. wypukła.

$(E, \|\cdot\|_E)$ jest JW gdy $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0}$

$$\|x\| = \|y\| = 1, \ \|x-y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1-\delta$$

Ust. $\varepsilon > 0$. Mamy znaleźć $\delta > 0$ j-w,

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

Zał. że $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x-y\| \geq \varepsilon$

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

$$4 = 2 + 2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 = 4 - \underbrace{\|x-y\|^2}_{\geq \varepsilon} \leq 4 - \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \sqrt{1 - \varepsilon^2/4} = 1 - \delta$$

$$\delta = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}. \quad \checkmark.$$

Tw. Milmana – Pettisa ('70).

$$\underbrace{\text{Gdy } E \text{ jest jedn. wypukłe}}_{\text{geometryczna}} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{E^{**}}_{(E^*)^*} = E}_{\text{analityczna}}.$$

Komentarz ogóln. wcz. dom

$H \supset M$ podprzestrzeń liniowa domknięta

to $\quad H = M \oplus M^{\perp}$.

$$\forall_{x \in H} \quad x = P_M x + P_{M^{\perp}} x =$$

$$= P_M x + (I - P_M) x$$

1) $E = \operatorname{span}(1, t)^{\perp}$

$$E = \{ f \in L^2(0,1) : \int f(t)\,dt = 0, \int f(t) \cdot t = 0 \},$$

Span $(1, t)$ jest domknięta $\to$ prawda bo to jest sk-wym. podprzestrzeń.

2) $E^{\perp} = \operatorname{span}(1, t)$.

$K = \operatorname{span}(1, t)$

K jest domk..

$$H = K \oplus E = E \oplus E^{\perp} \Rightarrow E^{\perp} = K$$

Za tydzień: dla dowolnej podprzestrzeni $M \subset H$

$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}.$$

(konsekw. tw. Hahna-Banacha).

3) $\mathrm{dist}(g, M) = \|g - P_M g\| = \|P_{M^\perp} g\|.$

w $L^2(0,1)$ $\mathrm{dist}(g, M) = \left(\int_0^1 (g - P_M g)^2\right)^{1/2}.$

Tw. Riesza o reprezentacji:

H - przestrzeń Hilberta

$$\varphi \in H^* \quad \exists!_{x \in H} \quad \forall_{y} \quad \varphi(y) = \langle x, y \rangle .$$

$\Rightarrow$ lemat Laxa - Milgrama.

(1) $\int_0^1 t^2 f(t)\,dt = \int_0^1 e^t f(t)\,dt$

Pok. że istnieje $f \in L^2(0,1)$ spełniająca .

Czy taka f jest jedn. ?

$$\langle t^2, f \rangle = \langle e^t, f \rangle$$

$$\Rightarrow \langle t^2 - e^t, f \rangle = 0$$

$$f \perp \underbrace{\operatorname{span}(t^2 - e^t)}_{M} \qquad L^2(0,1) = \underset{1D}{M} \oplus \underset{\text{duży } D.}{M^\perp}$$

dużo takich f.

(C2) $a: H \times H \to \mathbb{R}$ symetryczna forma dwuliniowa, ciągła

$a(u,u) \geq \beta \|u\|^2$. (koercywność),

Pokazać, że $a(u,v)$ zadaje iloczyn skalarny na H i $(H, a(\cdot,\cdot))$ jest przestrzenią Hilberta (z tą samą topologią).

Rozw: gdyby to był iloczyn sk. to $\|u\|_A = \sqrt{a(u,u)}$.

$$\sqrt{\beta}\,\|u\| \leq \sqrt{a(u,u)} = \|u\|_A = \sqrt{a(u,u)} \leq \sqrt{C}\,\|u\|$$

ciągłości.

$$\Rightarrow \exists_{C_1, C_2} \quad C_1 \|u\| \leq \|u\|_A \leq C_2 \|u\|.$$

Pokażmy, że $\|u\|_A$ jest normą:

$$\|u\|_A = \sqrt{a(u,u)}.$$

- $\|u\|_A = 0 \iff u = 0$
- $\|u+v\|_A \leq \|u\|_A + \|v\|_A$
- $\|tu\|_A = |t| \, \|u\|_A.$

$$\|tu\|_A = \sqrt{a(tu,tu)} = \sqrt{t^2 a(u,u)} = |t| \sqrt{a(u,u)} = |t| \, \|u\|_A.$$

$$\|u+v\|_A \le \|u\|_A + \|v\|_A$$

<u>Wsk.</u> najpierw $|a(u,v)| \le \sqrt{a(u,u)}\sqrt{a(v,v)}$.

$$0 \le a(u-\lambda v, u-\lambda v) = a(u,u) + a(v,v)\lambda^2 - \lambda a(u,v) - \lambda a(v,u)$$

dod okr. a

$\lambda \in \mathbb{R}$
$u, v \in H$

$$= a(u,u) - 2\lambda a(u,v) + \lambda^2 a(v,v).$$

$$\lambda = \frac{a(u,v)}{a(v,v)}$$

$$0 \le a(u,u) - 2\frac{a(u,v)^2}{a(v,v)} + \frac{a(u,v)^2}{a(v,v)}$$

$$0 \leq a(u,u) - 2\frac{a(u,v)^2}{a(v,v)} + \frac{a(u,v)^2}{a(v,v)} \qquad / \cdot a(v,v)$$

$$0 \leq a(u,u)\, a(v,v) - a(u,v)^2$$

$$\Rightarrow \quad a(u,v)^2 \leq a(u,u)\, a(v,v).$$

$$a(u,v) \leq \sqrt{a(u,u)}\,\sqrt{a(v,v)} = \|u\|_A \, \|v\|_A$$

$$\|u+v\|_A \leq \|u\|_A + \|v\|_A$$

$$\|u+v\|_A^2 = a(u+v, u+v) = a(u,u) + a(v,v) + 2a(u,v)$$

$$\leq \|u\|_A^2 + \|v\|_A^2 + 2\|u\|_A \|v\|_A$$

$$= \left(\|u\|_A + \|v\|_A\right)^2 \qquad /\sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \|u+v\|_A \leq \|u\|_A + \|v\|_A.$$

(C3) Lemat Laxa-Milgrama

a jest jak w pop. zadaniu

$l \in H^*$

Pokazać, że istnieje dokł. jedno $u \in H$ t. że

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall_{v \in H}.$$

D-d: Rozważmy $(H, a(\cdot,\cdot))$.

$H^1 = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ $\qquad l \in (H^1)^*$

$H^2 = (H, a(\cdot, \cdot))$.

$$H^1 = (H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$$
$$H^2 = (H, a(\cdot , \cdot)).$$

$$l \in (H^1)^*$$

$$l \in (H^2)^* . \quad |l(h)| \leq C \|h\|_1 \leq \tilde{C} \|h\|_2 .$$

$$l \in (H^1)^*$$

$$l(v) = a(z, v) \qquad \exists!\, z \in H.$$

$$a(u,v) = l(v) \iff a(u,v) = a(z,v) \quad \forall v$$

$$\iff a(u-z, v) = 0 \quad \forall v.$$

$a(u-z, v) = 0 \quad \forall v \in H$

$\Rightarrow u - z \perp H \Rightarrow u = z.$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow -\Delta u = f \\ \\ \dots\end{array}\right]$$

rozw. z lematu Laxa-Milgrama.

$a(u,v) = l(v).$