AF Tutorial 7

3.12.2020

A1 / PS 6

H – przestrzeń Hilberta $\quad H^* = H$

Ta równość $H^* = H$

$$\varphi \in H^* \quad \exists!_{y_\varphi} \quad \text{t.że} \quad \varphi(x) = \langle x, y_\varphi \rangle$$

$$\|\varphi\| = \|y_\varphi\|_H$$

Gelfand triple.

A2 $(L^p)^* = L^{p'}$ $1 \le p < \infty$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$\forall \varphi \in (L^p)^* \quad \exists! \; g_\varphi \in L^{p'}$ $\quad \varphi(f) = \int f \, g_\varphi$

$$\|\varphi\| = \|g\|_{p'}.$$

$p = \infty$ $\quad (L^\infty)^* \leftarrow$ ŚMIETNIK.

A3

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t)\, e^{-t}\, dt$$

Chcemy policzyć normę $\varphi \in (L^p)^*$? $1 \le p \le \infty$.

dla $p \in (1, \infty)$

mamy $\|\varphi\| = \|e^{-t}\|_{p'} = \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-tp'} \right)^{1/p'} =$

$$= \left(\frac{1}{p'} \right)^{1/p'}$$

$p = 1.$ $$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t)\, e^{-t}\, dt$$

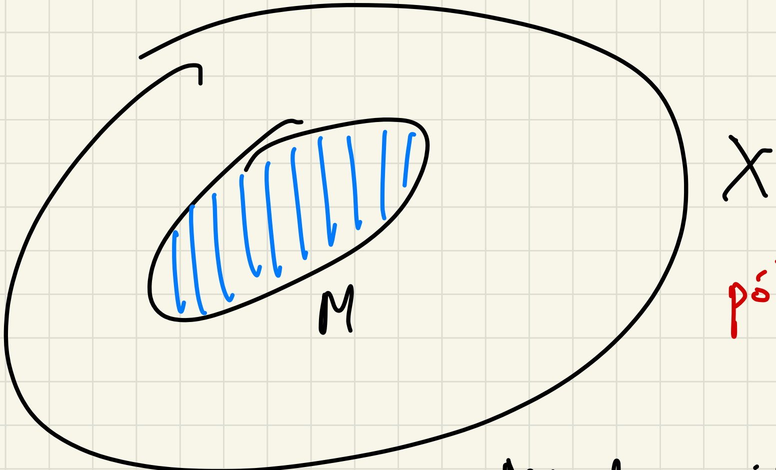
wiemy, że $(L^1)^* = L^\infty$ $$\|\varphi\| = \|e^{-t}\|_\infty = 1.$$

$p = \infty.$ $$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t)\, e^{-t}\, dt \quad \text{na } f \in L^\infty(\mathbb{R}^+).$$

$$|\varphi(f)| \leq \int_{\mathbb{R}^+} |f(t)|\, e^{-t}\, dt \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t}\, dt = \|f\|_\infty$$

$\Rightarrow \|\varphi\| \leq 1$ i $\|\varphi\| = 1$ bo $f = 1.$

Tw. Hahna-Banacha:
(analityczne)



$(X, \|\cdot\|_X)$, $M \subset X$ podprzestrzeń

Weźmy $p: X \to \mathbb{R}$ t. że

półnorma $\begin{cases} p(x+y) \leq p(x) + p(y) \\ p(tx) = t\,p(x) \quad \forall\, t \geq 0 \end{cases}$

Niech $g: M \to \mathbb{R}$ liniowe takim, że $g(x) \leq p(x)$.

Wówczas istnieje $f: X \to \mathbb{R}$ przedłużenie g na całe X t. że $f(x) \leq p(x)$.

B1 / PS6 !!!

$M \subset X$ podprzestrzeń, $g \in M^*$ $\Rightarrow$ wówczas istnieje przedłużenie $f \in X^*$ t. że

$$\begin{cases} f(x) = g(x) & \text{dla } x \in M \\ \|f\|_{X^*} = \|g\|_{M^*}. \end{cases}$$

!

D-d: $p(x) = \|x\| \, \|g\|_{M^*}$ jest półnormą

$$p(x+y) = \|x+y\| \, \|g\|_{M^*} \leq \|x\| \, \|g\|_{M^*} + \|y\| \, \|g\|_{M^*} = p(x) + p(y).$$

$\exists_f$ liniowa fun-e $\quad f(x) \leq \|g\| \, \|x\| \quad \forall_{x \in X}$.
(przedłużenie)

$\Downarrow$

Jaka jest norma f $\quad \|f\| \leq \|g\|$

ale ponieważ $f = g$ w M to $\|f\| = \|g\|$.

B2/PS6 "duality formula" $(X, \|\cdot\|)$

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\varphi(x)|$$

$$\boxed{\|x\| = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |\varphi(x)|.}$$

$\geq$, $\leq$?

$$\sup_{\|\varphi\|\leq 1} |\varphi(x)| \leq \underbrace{\|\varphi\|}_{\leq 1} \|x\| \leq \|x\|.$$

$$\|x\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|$$

$\geq$

$\leq$ (?)

Ustalmy sobie x_0. Chcemy $|\varphi_{x_0}(x_0)| = \|x_0\|$

$\|\varphi_{x_0}\| \leq 1$.

Niech $M = \operatorname{lin}(x_0)$. $\varphi_{x_0}(t x_0) = t\|x_0\|$.

- $\varphi_{x_0}(x_0) = \|x_0\|$
- $\|\varphi_{x_0}\| = 1$.

$\Rightarrow$ przedłużamy φ na X. Ozn. $\tilde{\varphi}$.

$$\|\tilde{\varphi}\| \leq 1$$

$\tilde{\varphi}(x_0) = \|x_0\|$. Bo to przedłużenie φ

$$\|x_0\| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x_0)|$$

$$\boxed{\|x\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|}$$

B3 / P36 Funkcjonały rozdz. punkty

$$\forall_{\varphi \in X^*} \quad \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Dod: $\|x_1 - x_2\| = \sup_{\substack{\varphi \in X^* \\ \|\varphi\| = 1}} |\varphi(x_1 - x_2)| = 0.$

B4 / PS6

$(X, \|\cdot\|_X)$ – p. Banacha

$A \subset X$ podzbiór

$\forall_{\varphi \in X^*}$ $\varphi(A)$ jest ograniczony w $\mathbb{R}$

$\cap$
$\mathbb{R}$

A jest ogr. $\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$

Dowieść że A jest ograniczony w X.

Rozw. $A \ni x$ $T_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ $T_x(\varphi) = \varphi(x)$.

$\forall_x$ T_x jest ograniczony: $|T_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \, \|x\| \Rightarrow$

$$\|T_x\| \leq \|x\| .$$

$\forall_{\varphi}$ $\underbrace{T_x(\varphi)}$ jest ograniczone

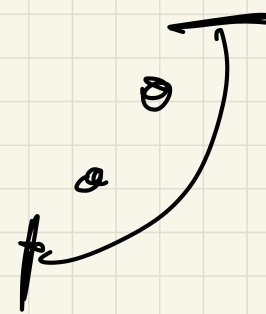
$= \varphi(x)$ ograniczone dla $x \in A$.

$\Longrightarrow \exists_C \quad \underbrace{\sup_{x \in A} \| T_x \|} \leq C$

tw. B-S

$\sup_{x \in A} \underbrace{\sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|} \leq C.$

$\sup_{x \in A} \|x\| \leq C$



B7/RS6

$$\Phi : \ell^1 \longrightarrow (\ell^\infty)^*$$

$$\ell^1 \ni x \longmapsto \left[\ell^\infty \ni y \longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \right]$$

$$\underbrace{\underbrace{\big(\Phi\underbrace{(x)}_{\in \ell^1}\big)}_{\in (\ell^\infty)^*}\underbrace{(y)}_{\in \ell^\infty}}_{\in \mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

- Φ jest dobrze zdef.
- Φ nie jest surjekcją

$$\big(\Phi(x)\big)(y) = \sum_{i=1} x_i y_i \qquad \Phi : \ell^1 \longrightarrow (\ell^\infty)^*$$

Ustalmy $x \in \ell^1$, mam pokazać $\Phi(x) \in (\ell^\infty)^*$.

$$\big|\big(\Phi(x)\big)(y)\big| = \Big|\sum x_i y_i\Big| \le \sum |x_i|\,|y_i| \le$$

$$\le \|y\|_\infty \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|x\|_1 \, \|y\|_\infty$$

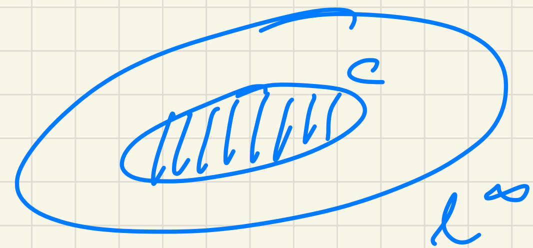
$$\Rightarrow \|\Phi(x)\| \le \|x\|_1 \Rightarrow \Phi(x) \in (\ell^\infty)^*.$$

Φ nie jest surjekcją :

W ℓ^∞ rozw. przestrzeń c = ciągi zbieżne.

Na c def. $\varphi(x) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ $\quad (\varphi : c \to \mathbb{R})$

$(x_1, x_2, \ldots)$

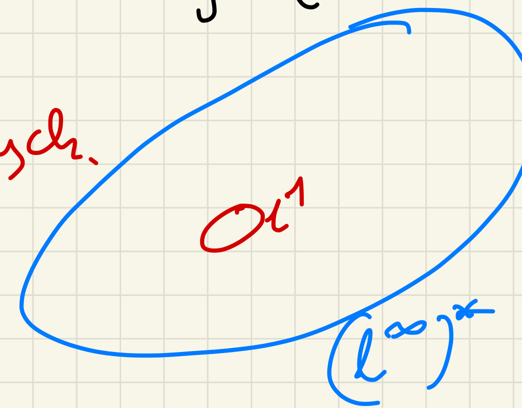


- φ jest liniowy
- $|\varphi(x)| \leq \|x\|_\infty \Rightarrow \|\varphi\| \leq 1.$

Przedłużamy do całego ℓ^∞ ($\tilde{\varphi}$ – przedłużenie).

Zał. że $\exists_{x \in \ell^1}$ $\tilde{\varphi}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ $\forall_{y \in \ell^\infty}$

Wiemy ile jest $\tilde{\varphi}$ na ciągach zbieżnych.



$$\tilde{\varphi}(e_i) = \varphi(e_i) = x_i$$

$$\varphi(e_i) = 0 \implies \underline{x = 0}.$$

Ale $x \neq 0$ bo $\tilde{\varphi}((1,1,1,\dots)) = 1$.

Tw. geometryczne H-B

$(E, \|\cdot\|)$ - p. unormowana

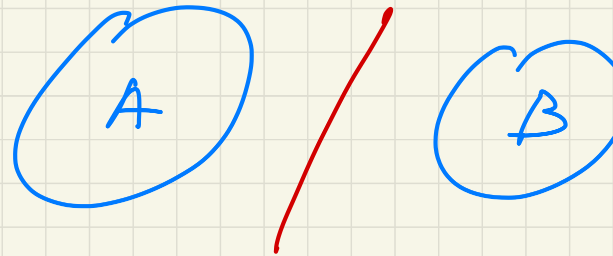
$A, B \subset E$, A, B - wypukłe, rozłączne, niepuste.

I A lub B otwarty

$\exists_{\varphi \in X^*} \exists_\lambda$ $\leftarrow \{\varphi(x) = \lambda\}$.

$$\sup_{a \in A} \varphi(a) \le \lambda \le \inf_{b \in B} \varphi(b).$$

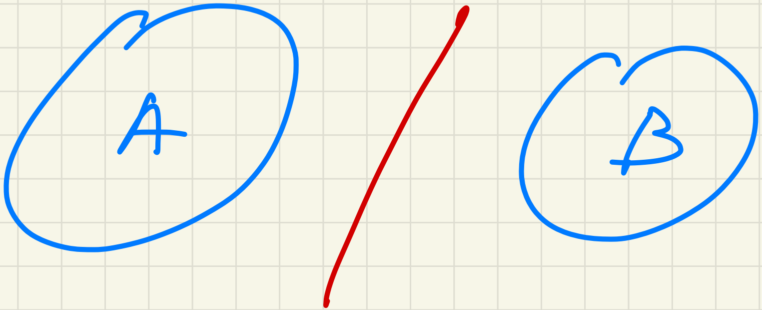
II A domknięty, B jest zwarty



$\exists_{\varphi \in X^*} \exists_\lambda$

$$\sup_{a \in A} \varphi(a) < \lambda < \inf_{b \in B} \varphi(b)$$

II A domknięty, B jest zwarty



$$\exists_{\varphi \in X^*} \exists_\lambda$$

$$\sup_{a \in A} \varphi(a) < \lambda < \inf_{b \in B} \varphi(b)$$

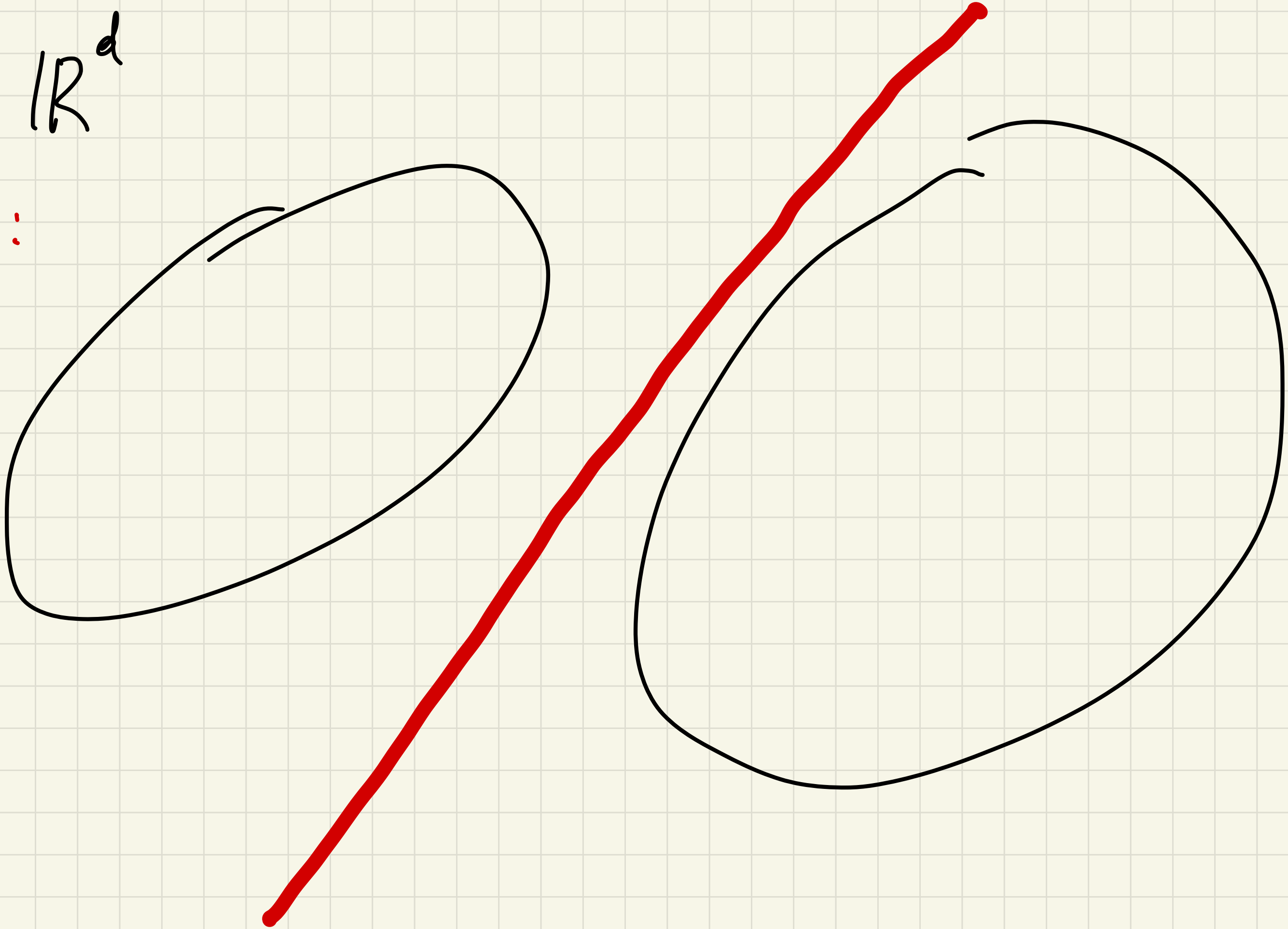
Najczęściej:

$B = \{x_0\}$

$A = \{$ domknięta podprzestrzeń $\}$

Na $\mathbb{R}^d$

Dowód:



C1 / PS6

E unormowana, $F \subset E$, $\overline{F} \neq E$

(F nie jest gęsta w E)

Istnieje φ : $\varphi|_F = 0$, $\|\varphi\| = 1$.

(F zawiera się w jądrze pewnego φ).

$A = \overline{F}$ domknięty

$B = \{x_0\}$ $x_0 \in E \setminus \overline{F}$

(jakiś istnieje)

$\Rightarrow$ $\exists_{\varphi \in E^*} \exists_\lambda$

$\sup_{a \in F} \varphi(a) < \lambda < \varphi(x_0)$

$\exists_{\varphi \in E^*} \exists_{\lambda}$

$$\sup_{a \in F} \varphi(a) < \lambda < \varphi(x_0)$$

(F jest podprzestrzenią) .

$\Rightarrow \varphi = 0$ na F (nawet na $\overline{F}$)

bo gdyby $\exists_{a \in F}\ \varphi(a) = \gamma \neq 0$ to $\varphi(\pm M a)$ dla dost. dużego M przekroczy λ.

$0 < \lambda < \varphi(x_0) \Rightarrow \varphi \neq 0$. Bierzemy $\dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}$.

C2 / PS6 $F \subset E$ podprzestrzeń.

$$\forall_{x \in F} \quad \varphi(x) = 0 \implies \varphi = 0$$

Wówczas F jest gęsta w E.

__D-d:__ Gdyby F nie była gęsta to $\overline{F} \neq E$, wówczas istnieje $\varphi|_F = 0$ ale $\varphi \neq 0$ (bo $\|\varphi\| = 1$).

(3) $M \subset H$, $\quad (M^\perp)^\perp = \overline{M}$ (dla domkniętych $M = (M^\perp)^\perp$).

podprzestrzeń — przestrz. Hilberta

$\to \overline{M} \subset (M^\perp)^\perp$. Wystarczy spr. że każdy $x \in M$, $x \in (M^\perp)^\perp$ (bo $(M^\perp)^\perp$ jest domknięty).

Chcę $x \in (M^\perp)^\perp$, tzn. $\forall_{y \in M^\perp} \langle x, y \rangle = 0$

To prawda bo $x \in M$ więc $\forall_{y \in M^\perp} \langle x, y \rangle = 0$.

$\rightarrow (M^\perp)^\perp \subset \overline{M}$.

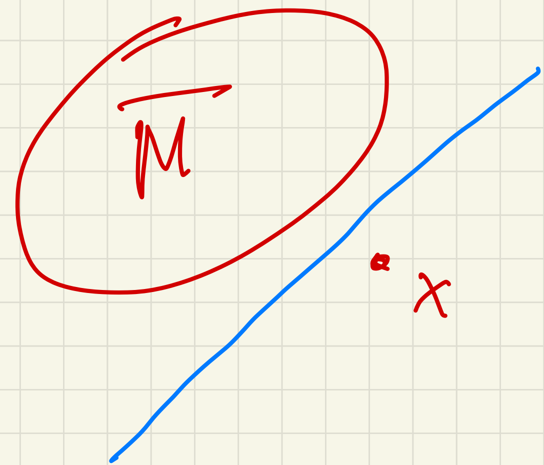
Załóżmy, że istnieje $x \in (M^\perp)^\perp$ ale $x \notin \overline{M}$.

$\exists_{\varphi \in H^*} \exists_{\lambda}$

$\sup_{y \in \overline{M}} \varphi(y) < \lambda < \varphi(x)$.

$\Downarrow \quad \exists_z \; \varphi(y) = \langle z, y \rangle$

$\sup_{y \in \overline{M}} \langle z, y \rangle < \lambda < \langle z, x \rangle$



$$\sup_{y\in\overline{M}} \langle z, y\rangle < \lambda < \langle z, x\rangle \qquad (x \notin \overline{M})$$

Chcemy się dowiedzieć czegoś o z.

M jest podprzestrzenią:

$$\forall_{y\in M} \langle z, y\rangle = 0 \Rightarrow z \in M^{\perp}.$$

$$0 < \lambda < \langle z, x\rangle = 0 \text{ bo } x \in (M^{\perp})^{\perp}.$$

! SŁABA ZBIEŻNOŚĆ

$(E, \|\cdot\|)$ przestrzeń unormowana

Mówimy, że ciąg $\{x_n\}$ ZBIEGA SŁABO do x

$(x_n \rightharpoonup x)$ jeżeli

$$\forall_{\varphi \in E^*} \quad \varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x) \qquad (\text{w } \mathbb{R})$$

A1 / BS7

- H – przestrzeń Hilberta $x_n \rightharpoonup x$

$\forall_{u \in H} \quad \langle x_n, u \rangle \longrightarrow \langle x, u \rangle$

- $L^p \quad 1 \leq p < \infty \quad$ (określone $L^{p'}$) $f_n \rightharpoonup f$

$\forall_{g \in L^{p'}} \quad \int f_n g \longrightarrow \int f g.$

A2/PS7 Słaba granica jest jedn. zdef.

Bierzemy $\{x_n\}$. Załóżmy że $x_n \rightharpoonup x$, $x_n \rightharpoonup y$.

$$\Rightarrow \forall_{\varphi} \quad \varphi(x_n) \to \varphi(x), \quad \varphi(x_n) \to \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

$$\Rightarrow x = y.$$

(bo funkcjonały rozdzielają punkty).

A3 / PS7 $x_n \rightharpoonup x$ słabo w E to ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony.

$\forall_{\varphi}$ $\{\varphi(x_n)\}_n$ jest zbieżny w $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\forall_{\varphi}$ $\{\varphi(x_n)\}$ jest ograniczony w $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists_{C} \|x_n\| \leq C$ (B3 dzisiaj),

(oszacowanie dyssypatywne)

$$\underbrace{x_n \rightharpoonup x}_{\forall\, \varphi \in E^* \quad \varphi(x_n) \to \varphi(x)} \qquad \boxed{\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|}$$

$$\|x\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \lim_{n\to\infty} |\varphi(x_n)| \leq$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |\varphi(x_n)| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

B1/PS7

Jesteśmy w nałym ℓ^2.

Rozpatrzmy ciąg $y_n = e_n = (0,0,\dots,0,1,0,\dots)$

↑ n.

Rozstrzygnąć czy $\{e_n\}$ zbiega mocno / słabo w ℓ^2.

Słaba zb. w ℓ^2: $\forall_{x \in \ell^2} \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x^i e_n^i} \longrightarrow 0$ przy $n \to \infty$.

$\forall_{x \in \ell^2} \quad x^n \longrightarrow 0$ przy $n \to \infty$.

(bo $\sum_{n \geq 1} |x^n|^2 < \infty$).

$\Rightarrow \quad e_n \rightharpoonup 0$

$$\|x\| \le \liminf \|x_n\|$$

$x_n = e_n$

$$0 \le 1$$

Czy zbiega mocno w ℓ^2?