AF Tutorial

10.12.2020

A4 / PS6

$$(H)^* = H$$

$$(L^p)^* = L^q \qquad 1 \le p < \infty \quad (q \text{ spn. od } L^p).$$

$$(\mathbb{R}^N)^* = \mathbb{R}^N \qquad e_1, e_2, \dots, e_N = \text{wektory jedn. w } \mathbb{R}^N$$

$$\varphi \in (\mathbb{R}^N)^* \longmapsto (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_N)).$$

A5 / PS6

X – przestrzeń unormowana

$(X \times \mathbb{R})^*$

$\varphi \in (X \times \mathbb{R})^*$ $\qquad u \in X, \; a \in \mathbb{R}$

$$\varphi(u, a) = \varphi(u,0) + \varphi(0,a) = \underbrace{\varphi(u,0)}_{\in X^*} + a \underbrace{\varphi(0,1)}_{c}$$

$\varphi(u,a) = \psi(u) + ac$ gdzie $\psi \in X^*$, $c \in \mathbb{R}$.

A 6 / PS6 $\quad 0 < p < 1$

$$L^p(0,1) = \{ f \text{ mierz}: \int |f(t)|^p < \infty \}.$$

to nie jest przestrzeń unormowana (nier. Δ nie zachodzi)

to jest p. metryczna z taką metryką:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^p \, dt$$

Teza: jedyny ciągły funkcjonał na $L^p(0,1)$ to 0.

$$(L^p)^* = \{0\}.$$

Załóżmy, że jest $\varphi \neq 0$ ciągły funkcjonał na $L^p(0,1)$.

Krok 1. Istnieje f takie że $|\varphi(f)| \geq 1$.

Tak, bo istnieje f że $\varphi(f) \neq 0$ i potem skalujemy.

Krok 2. Istnieje $s \in (0,1]$ takie że

$$\int_0^s |f(t)|^p dt = \frac{1}{2} \int_0^1 |f(t)|^p dt$$

$s \mapsto \int_0^s |f(t)|^p dt$ taka funkcja jest ciągła

$g_1 = f \mathbb{1}_{[0,s]}$ $\quad g_2 = f \mathbb{1}_{(s,1]}$

<u>Krok 3</u> $\quad f = g_1 + g_2$ $\quad$ (jasne)

$|f|^p = |g_1|^p + |g_2|^p.$ $\quad$ (jasne)

$\frac{1}{2} \int |f|^p = \int |g_1|^p = \int |g_2|^p.$ $\quad$ (jasne).

<u>Krok 4</u> Jedno z g_1, g_2 spełnia $|\varphi(g_1)| \geq \frac{1}{2}$.
(przyp.)

<u>D-d.</u> Gdyby $|\varphi(g_1)| < \frac{1}{2}$, $|\varphi(g_2)| < \frac{1}{2}$ to

$|\varphi(f)| \leq |\varphi(g_1)| + |\varphi(g_2)| < 1$ sprzeczność.

Zał. że g_1 spełnia $|\varphi(g_1)| > \frac{1}{2}$.

Weźmy $f_1 = 2g_1$.

$|\varphi(f_1)| \geq 1$ bo $|\varphi(g_1)| \geq \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 |f_1|^p = \int_0^1 2^p |g_1|^p = 2^p \int_0^1 |g_1|^p =$$

$$= 2^{p-1} \int_0^1 |f|$$ (pamiętamy $|\varphi(f)| \geq 1$)

Przez indukcję $\{f_n\}$ taki że $|\varphi(f_n)| \geq 1$

Przez indukcję $\{f_n\}$ taki że $|\varphi(f_n)| \geq 1$,

$$\underbrace{\int_0^1 |f_n|^p dt}_{\substack{\| \\ d(f_n,0)}} = \underbrace{\left(2^{p-1}\right)^n}_{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ 0}} \int_0^1 |f|^p dt$$

bo $p \in (0,1)$ $p-1<0$.

Sprzeczność bo $d(f_n,0) \longrightarrow 0$ (czyli $f_n \to 0$)

ale $|\varphi(f_n)| \geq 1$.

A8/PS6

$(c_0)^* =$

ciągi które zbiegają do 0

$c_0 = \{ (x_n)_{n \geq 1}$ takie że $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \}$.

$c_0 < \ell^\infty$ (bo zbieżny do 0 $\Rightarrow$ ograniczony)

$(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ – przestrzeń Banacha (było zad. dom).

$$(c_0)^* = l_1.$$

przestrzeń wszystkich funkcjonałów na c_0

$$T: l^1 \longrightarrow (c_0)^*$$

$$\underbrace{(T\underbrace{y}_{\in l^1})}_{(c_0)^*}\underbrace{(x)}_{c_0} = \underbrace{\sum x_i y_i}_{\in \mathbb{R}.} \qquad y \in l^1,\ x \in c_0$$

$$\underbrace{\underbrace{(T\underbrace{y}_{\in \ell^1})}_{(c_0)^*}\underbrace{(x)}_{c_0}} = \underbrace{\sum x_i y_i}_{\in \mathbb{R}.}$$

1) dobrze zdef $y \in \ell^1 \Rightarrow T_y \in (c_0)^*$

bo jest liniowy i ograniczony

$$|(T_y)(x)| \leq \sum |x_i||y_i| \leq \|x\|_\infty \sum |y_i| = \|x\|_\infty \|y\|_1$$

$$\Rightarrow \quad \|T_y\|_{(c_0)^*} \leq \|y\|_1 .$$

2 · T jest iniekcją

$$(Ty)(x) = \sum x_i y_i$$

$$\underbrace{T\underbrace{y}_{\in \ell^1}}_{(c_0)^*} \underbrace{(x)}_{c_0} = \underbrace{\sum x_i y_i}_{\in \mathbb{R}}.$$

$$Ty = 0 \implies y = 0$$

Rozważmy $x = e_i = (0, 0, \dots, \underset{\uparrow i}{1}, \dots)$

$$(Ty)(x) = y_i$$

$$\| \quad \implies y_i = 0 \quad \forall_{i} \implies \underline{y = 0}.$$

$$0$$

3. T jest surjekcją $\qquad (T\underline{y})(x) = \sum x_i y_i$

$\varphi \in (c_0)^*$. Znaleźć $y \in \ell^1$ $\quad Ty = \varphi$.

<u>Pomocniczy fakt:</u> $\underbrace{\mathrm{span}(e_1, e_2, \dots)}$ jest gęste w c_0

liniowe kombinacje sk. wielu elementów z $e_1, e_2, \dots$.

<u>D-d.</u> $x \in c_0 \quad x = (x_1, x_2, \dots)$

$$x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in \mathrm{span}(e_1, e_2, \dots)$$

$x^n \to x$ w c_0 bo $\|x^n - x\|_\infty = \sup\limits_{k \geq N} |x_k| \to 0$.

$\varphi \in (c_0)^*$. Znaleźć $y \in l^1$ $Ty = \varphi$.

$$y = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \ldots)$$

Dla $x \in \operatorname{span}(e_1, e_2, \ldots)$ mamy $Ty = \varphi$ bo

$$(Ty)(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \sum_{i=1}^{N} x_i \varphi(e_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{N} x_i e_i\right) = \varphi(x).$$

bo $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$

Tak naprawdę $Ty = \varphi$ na $c_0 = \overline{\operatorname{span}(e_1, e_2, \ldots)}$ z gęstości.

4. $\|Ty\|_{(c_0)^*} = \|y\|_1$

Mamy $\|Ty\|_{(c_0)^*} \leq \|y\|_1$.

y ustalone. Bierzemy $x^N = (\operatorname{sgn} y_1, \operatorname{sgn} y_2, \ldots, \operatorname{sgn} y_N, 0, 0, \ldots)$

$x^N \in c_0$, $\|x^N\| = 1$.

$$\|Ty\|_{(c_0)^*} \geq |(Ty)(x^N)| = \sum_{i=1}^{N} |y_i| \longrightarrow \|y\|_1.$$

$(N \to \infty)$

$\Rightarrow \|Ty\|_{(c_0)^*} = \|y\|_1$.

$$H^* = H$$

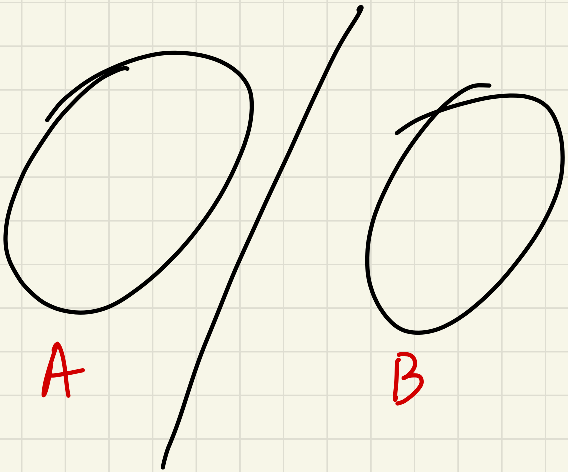
$$(L^p)^* = L^{p'} \qquad 1 \le p < \infty$$

$$(c_0)^* = \ell^1$$

$$(\mathbb{R}^N)^* = \mathbb{R}^N .$$

Tw. Hahna – Banacha (geometryczne)

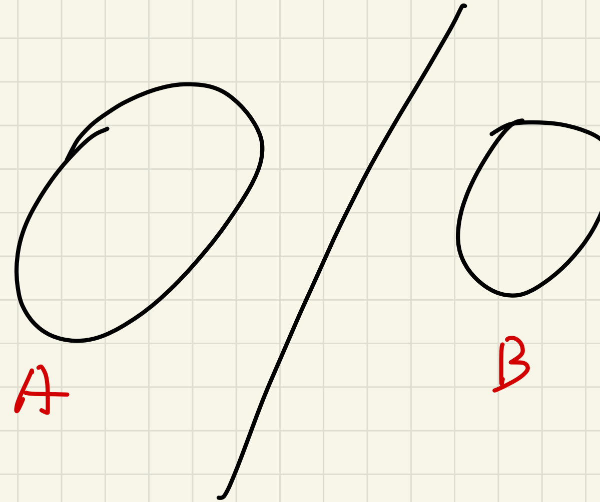
1



jeden z A, B jest otwarty

$$\exists_{\varphi} \exists_{\lambda} \quad \sup_{a\in A}\varphi(a) \le \lambda \le \inf_{b\in B}\varphi(b).$$

2

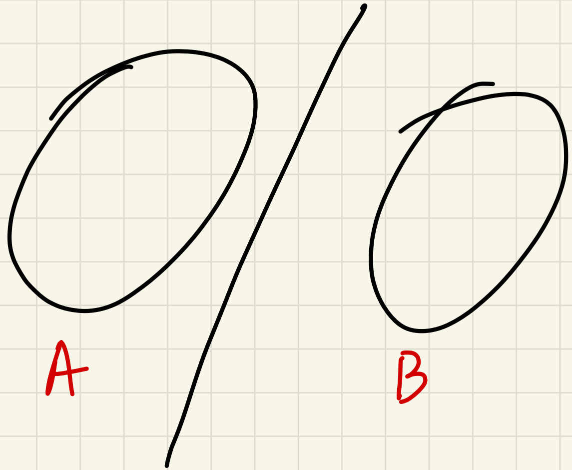


A – domknięty

B – zwarty.

$$\exists_{\varphi} \exists_{\lambda} \quad \sup_{a\in A}\varphi(a) < \lambda < \inf_{b\in B}\varphi(b)$$

1



Głupi funkcjonał:

$$\varphi = 0$$
$$\lambda = 0.$$

jeden z A, B jest otwarty

$$\exists_{\varphi} \exists_{\lambda} \quad \sup_{a\in A} \varphi(a) \leq \lambda \leq \inf_{b \in B} \varphi(b).$$

$$\exists_{\varphi} \exists_{\lambda} \quad \varphi(a) < \lambda \leq \varphi(b) \quad \forall_{a,b}$$

$\Rightarrow$ ZADANIE DOMOWE (1).

Zwartość $\longrightarrow$ $X = \mathbb{R}^n$ skończenie wymiarowa

Zbiory ogr. i domknięte jest zwarty:

$\dim X = \infty$ to to nie jest prawda!

Kula jednostkowa w niesk. wym przestrzeni nie jest zwarta.!

C5 / PS6

Lemat Riesza Jak M jest domkniętą podprzestrzenią X to $\forall_{a \in (0,1)}$ istnieje y_a, $\|y_a\| = 1$, taki że

$$\underbrace{\operatorname{dist}(M, y_a)}_{= \inf_{x \in M} \|x - y_a\|} \geq a.$$

M jest domkniętą podprzestrzenią

$\varphi|_M = 0$, $\varphi \neq 0$, $\|\varphi\| = 1$.

$a \in (0,1)$

$\|\varphi\| = 1$.

Istnieje y_a taki że $a < \varphi(y_a)$.

Bo: $1 = \|\varphi\| = \sup\limits_{\|y\|=1} |\varphi(y)|$

$$a < \varphi(y_a) \underset{\substack{\uparrow \\ x \in M}}{=\!=} \varphi(y_a - x) \leq \underbrace{\|\varphi\|}_{=1} \|y_a - x\|$$

$$\forall_{x \in M} \quad a < \|y_a - x\|$$

$$\Downarrow$$

$$a \leq \inf_{x \in M} \|y_a - x\| \qquad \text{(bo lewa strona nie zależy od } x\text{)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a \leq \operatorname{dist}(y_a, M)}$$

<u>Odpowiedź</u>: kiedy a może być 1

- w skończ. wym. przypadku zawsze
- w nieskoń. wym przestrzeni: X jest refleksywna.

C7 / PS6 $\quad X \quad \dim X = \infty$

kula jednostkowa nie jest zwarta.

Chcemy zwalczyć ciąg niemający podciągu zbieżnego.

Lemat Riesza: Jak M jest domkniętą podprzest. X to $\forall_{a \in (0,1)}$ istnieje y_a taki że $\|y_a\| = 1$.

$\underbrace{\text{dist}(M, y_a)} \geq a.$

Zacznijmy od x_1,

$\|x_1\| = 1.$

$M_1 = \text{span}(x_1).$

M_1 domkn. bo sk. wym.

x_1, $\|x_1\| = 1$, $M_1 = \operatorname{span}(x_1)$.

$\alpha = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ z lematu Riesza istnieje x_2 takie że

$$\operatorname{dist}(x_2, M_1) \geq \frac{1}{2}.$$

$M_2 = \operatorname{span}(x_1, x_2)$. Znajdujemy x_3 takie że

$$\operatorname{dist}(x_3, M_2) \geq \frac{1}{2}.$$

Przez indukcję x_k, takie że $\|x_k\| = 1$, $\|x_i - x_j\| \geq \frac{1}{2}$ $i \neq j$.

Taki ciąg nie może mieć podciągu zbieżnego.

Zwartości (obrazek)

$$G(u) = 0 \quad \text{(trudne równanie)}.$$

$$G(u^{\varepsilon}) + \varepsilon F(u^{\varepsilon}) = 0 \quad \text{(równanie jest już łatwe)}$$

$\varepsilon > 0$.

małe

Dla każdego $\varepsilon > 0$ jesteśmy w stanie to rozwiązać.

Chcemy wysłać $\varepsilon \to 0$.

Twierdzenie Banacha-Alaoglu-Bourbaki

H - przestrzeń Hilberta.

Niech (x^n) ciąg ograniczony. Wówczas (x^n) ma podciąg SŁABO zbieżny.

(spoiler na za tydzień).

Słaba zbieżność   E - p. Banacha

$$x_n \rightharpoonup x \iff \forall_{\varphi \in E^*} \ \varphi(x_n) \to \varphi(x).$$

A4 / PS7

$$x_n \to x \implies x_n \rightharpoonup x$$

Chcę $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. φ jest ciągłe.

A5/PS7

$x_n \rightharpoonup x$ w X

$f_n \to f$ w E^*

$\underbrace{f_n(x_n)}_{\in \mathbb{R}} \to \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}}$

Rozw.

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$

$$\leq \underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0} \underbrace{\|x_n\|}_{\leq C} + \underbrace{|f(x_n) - f(x)|}_{\to 0} \to 0.$$

(bo ciąg słabo zbieżny ogr.)

bo $x_n \rightharpoonup x$

B2 / PS7

$$\sin(nx) \longrightarrow 0 \quad w \quad L^2(0,2\pi).$$

(Chcemy $\forall_{g \in L^2(0,2\pi)}$ $\int_0^{2\pi} g(x)\sin(nx)\,dx \longrightarrow 0.$

Najpierw dla g która jest funkcją prostą.

$$g = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{(b_i, b_{i+1})}.$$

(funkcje schodkowe).

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{(b_i, b_{i+1})} \sin(nx)\,dx =$$

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{N} a_i \, \mathbb{1}_{(b_i, b_{i+1})} \sin(nx)\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{(b_i, b_{i+1})} \sin(nx)\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{b_i}^{b_{i+1}} \sin(nx)\, dx = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{-\cos(n b_{i+1}) + \cos(n b_i)}{n}$$

$$\longrightarrow 0 \qquad (\text{gdy } n \to \infty)$$

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin(nx)\,dx \longrightarrow 0.$$ dla $g =$ funkcje prosta.

Jak g mierzalna to istnieje ciąg funkcji prostych takich że $|g_i| \leq |g|$, $g_i \longrightarrow g$ p.w.

$g_i \longrightarrow g$ w $L^2(0,2\pi)$

Chcę $\int |g_i - g|^2 \longrightarrow 0$

1) $g_i \longrightarrow g$ punktowo

2) $|g_i - g| \leq |g_i| + |g| \leq 2|g|$ całk.

Tak, z tw. o zb. zmajoryzowanej.

Weźmy dowolne $g \in L^2(0, 2\pi)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech g_ε

$$\|g_\varepsilon - g\|_2 \leq \varepsilon$$

$$\left| \int g(x) \sin(nx)\, dx \right| \leq \left| \int g(x) - g_\varepsilon(x) \sin(nx)\, dx \right| + \left| \int g_\varepsilon(x) \sin(nx)\, dx \right|$$

$$\leq \underbrace{\|g - g_\varepsilon\|_2}_{\leq \varepsilon} \underbrace{\|\sin(nx)\|_2}_{\leq C} + \int g_\varepsilon(x) \sin(nx)\, dx$$

nier Höldera

$$\underbrace{\left|\int g(x)\sin(nx)\,dx\right| \leq}\ C\varepsilon + \left|\int g_\varepsilon(x)\sin(nx)\,dx\right|$$

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int g(x)\sin(nx)\,dx\right| \leq C\varepsilon + \underbrace{\limsup_{n\to\infty}\left|\int g_\varepsilon(x)\sin(nx)\,dx\right|}_{=0}$$

$$\leq \underbrace{C\varepsilon}_{\varepsilon\text{-dowolne}}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int g(x)\sin(nx)\,dx\right| = 0$$

$$\Rightarrow \sin(nx) \longrightarrow 0 \text{ w } L^2(0,2\pi).$$

$\sin(nx) \to 0$

B3/PS7

$\sin(nx) \to$? w L^2 ? $\to$ TAK

$\sin(nx) \to$? w L^2 ?

$\sin(nx) \to$? p.w. na $(0, 2\pi)$?

Gdyby $\sin(nx)$ zbiegał w L^2 mocno to $\sin(nx) \to 0$ w L^2

$$\int_0^{2\pi} |\sin(\underbrace{nx}_{y=nx})|^2 dx = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi n} |\sin(y)|^2 dy = \int_0^{2\pi} |\sin(y)|^2 dy$$

$$> 0$$

Czy $\sin(nx)$ zbiega punktowo?

$\sin(nx) \to g$ punktowo

$\Downarrow$

$\sin(nx) \to g$ w L^2 ze zbieżności zdominowanej

$\Downarrow$

a my wiemy że nie zbiega!