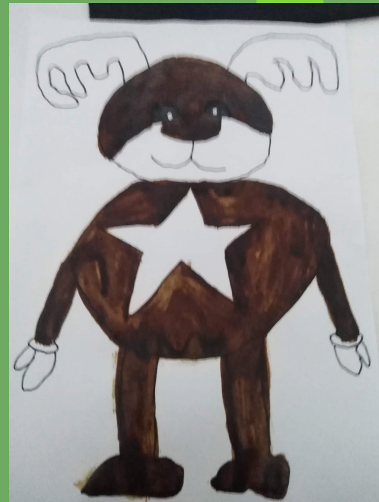
AF Tutorial 9

17.12.2020



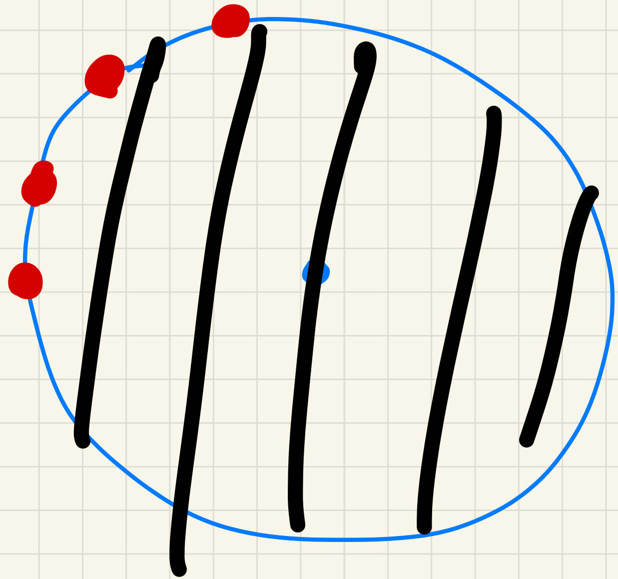
2. **(Mazur Lemma)** Let $C \subset E$ be a convex set. Prove that C is closed for convergence in norm if and only if C is closed for weak convergence. *Hint*: One implication is trivial, for another use geometric version Hahn-Banach.

Definitions:
C is closed for convergence in norm if for any $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset C$ such that $x_n \to x$ it follows that $x \in C$. This is exactly the same as statement that C is closed in E.
C is closed for weak convergence if for any $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset C$ such that $x_n \rightharpoonup x$ it follows that $x \in C$.

Sfera $S = \{ x \in E : \|x\| = 1 \} \to$ domknięty : tak bo norma jest ciągła. $x_n \in S$, $x_n \to x \Rightarrow \|x\| = 1$

w ℓ^2 $\|x_n\| = 1$, $x_n \rightharpoonup 0$ (przykład)

$x_n = (0, 0, 0, \dots 0, 1, 0, \dots)$
$\uparrow n.$



Przykład na to że wypukłość jest istotna w lemacie Mazura w $\mathbb{R}^n$ baza ortonormalna $e_1, e_2, \dots, e_n$.

1 nierówn. Bessela (na wiki Teodory dowód)

$\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - układ ortonormalny w H

$$\forall_x \sum_{\alpha \in A} \langle e_\alpha, x \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

dla każdego x jest co najwyż. przeliczalnie wiele składników, które są niezerowe,

$\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest bazą ON H gdy jest maks. ukł. ort. w H $\Leftrightarrow$ nie istnieje większy układ orton.

(4) Tożsamość Parsevala (równość w $\leq$ Bessela).

$$\forall_{x \in H} \quad \underbrace{\sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle^2}_{\uparrow} = \|x\|^2$$

tylko przelicz. wiele niezerowych

(B) $$x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$$ ten szereg zbiega w H

(dla każdego x).

Łatwiejsze kryt. na to że $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ jest baz.

(1) $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ baza ON $\iff \left[\forall_\alpha \langle x, e_\alpha\rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \right]$

($\Rightarrow$) Załóżmy, że $\langle x, e_\alpha\rangle = 0$ $\forall_{\alpha\in A}$ i $\{e_\alpha\}$ jest baz.

$$x = \sum \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha = 0 \qquad \square.$$

($\Leftarrow$) $\{e_\alpha\}$ nie jest OB. Istnieje f, $f \perp e_\alpha$ $\forall_{\alpha\in A}$

$\|f\| = 1$. Sprzeczność bo $\langle f, e_\alpha\rangle = 0$ ale $f \neq 0$.

$\square$.

Z tego korzystaliście żeby pokazać że

$$\left\{ e^{ikx} \right\}$$

$i = \sqrt{-1}$

jest układem ortonorm. w $L^2(0,2\pi)$.

(WYKŁAD).

② $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ baza ort $\iff$ $H = \overline{\text{span}\{e_\alpha : \alpha\in A\}}$

domknięcie

skończone kombi. liniowe

($\Rightarrow$) Musimy pokazać, że dla każdego $x\in H$ istnieje $\exists x_n \in \text{span}\{e_\alpha : \alpha\in A\}$ $x_n \to x$ w H.

My wiemy $x = \sum_{\alpha\in A} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$ ten szereg zbiega w H

($S_N x$ = N-ta suma częściowa tego szeregu).
niezerowych składników.

Wiemy, że $S_N x \to x$ w H.

$S_N x \in \operatorname{span}\{e_\alpha : \alpha \in A\} \Rightarrow H = \overline{\operatorname{span}\{e_\alpha : \alpha \in A\}}$

$(\Leftarrow)$ $H = \overline{\operatorname{span}\{e_\alpha : \alpha \in A\}}$ gdzie e_α układ ortonorm.

$\Rightarrow$ e_α jest bazą ON.

Zał. że istnieje f, $f \perp e_\alpha$ $\forall_{\alpha \in A}$, $\|f\| = 1$.

Istnieje ciąg $f_n \in \operatorname{span}\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ taki, że $f_n \to f$.

$\langle f_n, f \rangle = 0 \Rightarrow$ z ciągłości $\langle f, f \rangle = 0$

$\Rightarrow \|f\| = 0$ sprzeczność

1) $\langle x, e_\alpha \rangle = 0 \ \forall_{\alpha \in A} \Rightarrow x = 0$

przydaje się do pokazania że coś jest (albo nie jest bazą).

2) $H = \overline{\operatorname{span}\{e_\alpha : \alpha \in A\}}$

"ciągła własność" zachodzi dla każdego e_α $\Longrightarrow$ własność zachodzi dla całego H.

3 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ to jest baza o. n. $L^2(0,1)$.

$t \in (0,1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^t x^3 f_n(x)\, dx \right|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \mathbb{1}_{x\in(0,t)} x^3 f_n(x)\, dx \right|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left\langle \mathbb{1}_{x\in(0,t)} x^3, f_n(x) \right\rangle \right|^2 = \left\| \mathbb{1}_{x\in(0,t)} x^3 \right\|_2^2$$

$$\underbrace{\sum_{\alpha\in A} \langle x, e_\alpha \rangle^2 = \|x\|^2}$$

$$\left\| \mathbb{1}_{x\in(0,t)} x^3 \right\|_2^2 = \int_0^1 \mathbb{1}_{x\in(0,t)} x^6 \, dx =$$

$$= \int_0^t x^6 \, dx = \frac{1}{7} t^7.$$

II.

Zadanie 4 (dokł. to samo co 3 tylko $f_n = e^{inx}$).

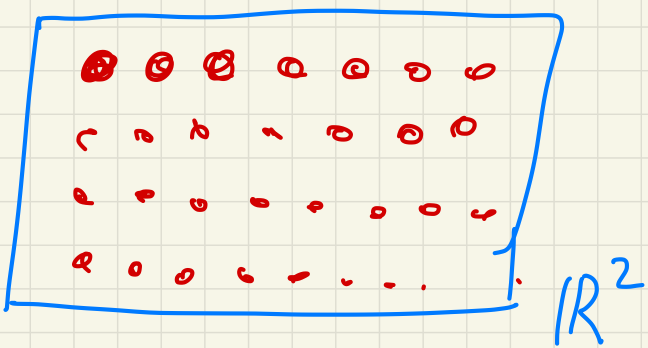
baza znana z wykładu.

(5) H – ośrodkowa przestrzeń Hilberta

ma przeliczalny podzbiór gęsty

(np. $\mathbb{R}$ jest ośrodkowe bo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ gęste w $\mathbb{R}$)

D-d. Niech $\{x_k\}_{k \geq 1}$ przeliczalny podzbiór gęsty w H.



Niech $H_n = \underbrace{\mathrm{span}(x_1, \ldots, x_n)}_{\text{skończ. lin. kombinacje } x_1, \ldots, x_n}$

Z GALu mamy algorytm Grama-Schmidta który daje nam układ ort. $\{y_1, \ldots, y_{k_n}\}$ $(k_n \leq n)$.

taki, że $H_n = \mathrm{span}\{y_1, \ldots, y_{k_n}\}. = K_m$

$$H = \overline{\mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots\}} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} K_m} =$$

$$= \overline{\mathrm{span}\{y_1, y_2, \ldots\}} \Rightarrow \{y_i\} \text{ jest baza ort. w } H.$$

170 Per Enflo.

H – ośrodkowe p. Hilberta

$$x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle x, e_i \rangle e_i$$

ten szereg zbiega w normie

Czy to prawda dla ośr. p. Banacha.

$\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ jest bazą ℓ^p, $p < \infty$

$C[0,1]$, $L^p(0,1)$.

⑥ H: p. Hilb ośrodkowa jest izom. Izomorficzna z małym ℓ^2.

$T: H \to \ell^2$ Niech $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ baza H.

$$Tx = (\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \ldots) \in \ell^2,$$

dobrze zdef. $x \in H \Rightarrow Tx \in \ell^2$. ?

$$\|Tx\|^2_{\ell^2} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle x, e_i\rangle^2 = \|x\|^2_H. \Rightarrow \|Tx\|_{\ell^2} = \|x\|_H.$$

def normy

(izometria)

iniekcja

$$\|Tx\|_2 = \|x\|_H$$

$x \in \ker T$

$Tx = 0$

$\Downarrow$

$x = 0$

surjekcja.

$T: H \to l^2$

Ust. $y \in l^2$. Mam znaleźć $x \in H$ t. że $Tx = y$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{y_i}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{e_i}_{\in H}.$$

$y \in l^2$. Dlaczego $\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{y_i}_{\in l^2} \underbrace{e_i}_{\in H}$ ma sens?

$S_N = \sum_{i=1}^{N} y_i e_i$. Chcemy, że $\{S_N\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w H.

$$\| S_N - S_M \|^2 = \langle S_N - S_M, S_N - S_M \rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=M+1}^{N} y_i e_i, \sum_{i=M+1}^{N} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=M+1}^{N} y_i^2 \longrightarrow 0.$$

$M, N \to \infty$

⑧ !!!

$\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ układ ortonormalny w H

$$\Rightarrow \forall_x \ \langle x, e_i\rangle \longrightarrow 0 \qquad i\to\infty$$

$\Uparrow$: zostanie tego faktu

D-d: $$\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2}_{} \leq \|x\|^2 \qquad \text{(Bessel)}$$

ten szereg (L1(2B)) jest zbieżny

$$\langle x, e_i\rangle^2 \longrightarrow 0 \qquad \text{(war. konieczny zbieżności szeregu)}$$

Ćwicz. na bazy ortonormalne:

<u>TWIERDZENIE</u> (Banach-Alaoglu-Bourbaki).

H - ośrodkowa przestrzeń Hilberta.

$\{x_n\}_{n \geq 1}$ będzie ograniczony w H $\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| \leq C \right)$.

Wówczas istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ taki, że

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \quad \text{w } H$$

W trakcie tego dowodu: METODA DIAGONALNA (to skomentuję potem).

DOWÓD Chcemy $\{x_{n_k}\}_k$ taki że $\forall_{y \in H}$ $\underbrace{\langle x_{n_k}, y \rangle}_{\in \mathbb{R}} \to \langle x, y \rangle$ dla pewnego $x \in H$.

Zaczniemy od $y = e_i$ dla $i = 1, 2, \ldots$ (Ta baza istnieje bo jesteśmy w ośrodk. przestrzeni Hilberta),

$$|\langle x_n, y \rangle| \underset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leqslant} \|x_n\| \cdot \|y\| \leq \left(\sup_n \|x_n\|\right) \|y\|.$$

Ponieważ w $\mathbb{R}$ ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny

to $\exists_{x_{n_k}}$ $\langle x_{n_k}, e_1 \rangle \to a_1 \in \mathbb{R}$ jest zbieżny

$\exists_{x_{n_{k_l}}}$ $\langle x_{n_{k_l}}, e_2 \rangle \to a_2 \in \mathbb{R}$ jest zbieżny.

$x_n \supset x_n^{(1)} \supset x_n^{(2)} \supset \ldots$ rodzina podciągów.

$\langle x_n^{(i)}, e_k \rangle \to a_k$ $\forall_{k=1,\ldots,l}$

$$(x_n) \supset (x_n^{(1)}) \supset (x_n^{(2)}) \supset \dots$$

Jak wybrać jeden podciąg ?

$$y_n = x_n^{(n+1)}$$

n-ty wyraz (n+1) podciągu.

$$\langle y_n, e_i \rangle \longrightarrow a_i \quad \forall_{i \in \mathbb{N}} \quad (n \to \infty) \quad (?)$$

(to jest prawda bo $y_n \subset x_n^{(i)}$ od pewnego n).

Mamy ciąg $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset H$ t. że $\forall_i \ \langle y_n, e_i\rangle \to a_i = \langle x, e_i\rangle$

Chciałoby się:

$$x = \sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{a_i}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{e_i}_{\in H}$$ (nie wiemy czy on jest zbieżny)

$$G = \operatorname{span}(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots) \subset H$$

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \langle y_n, x\rangle$$

$$|\varphi(x)| \leq \sup_n \|y_n\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|\varphi\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\| \leq \sup_n \|x_n\|.$$

Mam φ ogr. na $G = \operatorname{span}(e_1, e_2, \dots)$

Przedłużamy φ na H (z zad. domowe (2 lub 3))

Wiemy, że istn. dokł. jedno przedłużenie (bo $H = \overline{G}$)

$$\varphi \in H^* \Rightarrow \exists_{z \in H} \quad \varphi(x) = \langle x, z \rangle.$$

Wracamy na G:

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \langle y_n, x \rangle$$

$$\varphi(x) = \langle x, z \rangle$$

Znaleźliśmy z taki, że

$$\langle y_n, x\rangle \longrightarrow \langle z, x\rangle \quad \forall_{x \in \operatorname{span}(e_1, e_2, \dots)}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle y_n, x\rangle \longrightarrow \langle z, x\rangle \quad \forall_{x \in H}$$

$$y_n \rightharpoonup z$$

$$(\Uparrow)$$

$\Uparrow$!

$\sin(2\pi n x) \rightharpoonup 0$ w $L^2(0,1)$

$\sin^2(2\pi n x) \rightharpoonup 1/2$ w $L^2(0,1)$

SŁABE GRANICE NIEŚĆ.

SĄ PATOLOGICZNE.

B4/PS7

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{w } H$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^2 \le \|x\|^2 \qquad \text{dodatkowy warunek}$$

$$\Rightarrow x_n \to x \quad \text{w } H.$$

Rozw. $\|x_n - x\|^2 = \langle x_n, x_n\rangle + \langle x, x\rangle - 2\langle x_n, x\rangle$

$$= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 \le \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, x\rangle$$

$$\le \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0.$$

A7 | PS6

PRZESTRZENIE REFLEKSYWNE.

$(E, \|\cdot\|)$ - p. unormowana

$J : E \longrightarrow E^{**}$

$$\underbrace{(J\underbrace{x}_{\in E})}_{\in E^{**}}(\underbrace{\varphi}_{\in E^*}) = \underbrace{\varphi}_{\in E^*}(\underbrace{x}_{\in E}).$$

J jest dobrze zdef

$$\|Jx\|_{E^{**}} = \sup_{\substack{\varphi \in E^* \\ \|\varphi\| \leq 1}} (Jx)(\varphi) = \sup_{\substack{\varphi \in E^* \\ \|\varphi\| \leq 1}} \varphi(x) = \|x\|_E$$

duality formula

- J jest dobrze zdef. $\qquad \|Jx\|_{E^{**}} = \|x\|_E$
- J jest iniekcją

(E refleksywna gdy J jest surjekcją).