(1)

$R, L : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$

1+1

$Rx = (0, x_1, x_2, \dots)$, $Lx = (x_2, x_3, x_4, \dots)$

1° $\sigma(R) = ?$

Wiemy, że $|\sigma(R)| < \|R\|$ $\to$ liczymy $\|R\|$

$$\|R\| = \sup_{\|x\|_2 \le 1} \|Rx\|_2 = \sup_{\|x\|_2 \le 1} \Big|\sum_{i=2} x_i^2\Big|^{1/2} \le \sup_{\|x\| \le 1} \|x\|_2 = 1$$

dla $\tilde{x} = (0, 1, 0, 0, \dots)$: $\|\tilde{x}\|_2 = 1$ i $\|Rx\|_2 = 1$

$\Rightarrow \|R\| = 1$

Zatem $\sigma(R) \subset \overline{B(0,1)}$

Szukamy wartości własnych R, tzn $\lambda \in \mathbb{C}$ i $\underset{\neq 0}{x \in \ell^2}$ t. że

$$Rx = \lambda x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$$

Taka równość jest spełniona jedynie dla $x = 0$

Wniosek: R nie ma wartości własnych

Przypadek I : $\lambda \neq 0$

Sprawdzamy czy $R - \lambda I$ ($|\lambda| \le 1$, $\lambda \neq 0$) jest surjekcją

tzn czy $\forall y \in \ell_2 \ \exists x \in \ell_2$ t. że $(R - \lambda I)x = y$?

$$\Leftrightarrow \quad (-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, x_2 - \lambda x_3, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -\lambda x_1 \\ y_k = x_{k-1} - \lambda x_k & k > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{y_1}{\lambda} \\ x_k = \frac{x_{k-1} - y_k}{\lambda} \end{cases}$$

Wystarczy rozważyć $y = (1, 0, 0, \dots)$

Wtedy takie równanie spełnia jedyne $x = \left(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda^2}, -\frac{1}{\lambda^3}, \dots\right)$

Ale $x \notin l_2$: $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\lambda^i}\right|^2 = \infty$ dla $|\lambda| \leq 1$

Wniosek: $R - \lambda I$ nie jest odwracalne dla $\lambda \neq 0$, $|\lambda| \leq 1$

Przypadek II: $\lambda = 0$

R nie jest surjekcją, ponieważ obraz $R \subset \{x \in l^2 : x_1 = 0\}$

Zatem $\sigma(R) = \overline{B(0,1)}$

2° $\sigma(L) = ?$

Zauważmy, że $R^* = L$:

$\forall x, y \in l^2$ $\quad \langle Rx, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (Rx)_i \, \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, \overline{y_{i+1}} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, (L\overline{y})_i = \langle x, Ly \rangle$

$$\begin{cases} Rx_1 = 0 \\ Rx_i = x_{i-1} & i > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow R^* = L$

sprzężenie

domknięcie

$$\sigma(L) = \sigma(R^*) = \overline{\sigma(R)} = \overline{\overline{B(0,1)}} = \overline{B(0,1)}$$

3° Czy $R(L)$ są operatorami zwartymi?

Nie, ponieważ $\overline{B(0,1)}$ nie może być widmem operatora zwartego.

Wtedy każdy element $\overline{B(0,1)}$ byłby wartością własną $R(L)$ co, jak wykazaliśmy, prawdą nie jest. Tu można argumentować bez tego, że to wartości własne bo w spektrum operatora zwartego 0 może być jedynym punktem skupienia.

② (A) Czy $J : L^p(0,1) \to L^q(0,1)$ $p \geq q \geq 1$ jest operatorem zwartym?

- Dla $p \geq q$ J jest dobrze określone (nierówność Höldera)

2A

Niech $\{f_n\}$ ($f_n = \sin(2\pi n x)$) ograniczony w $L^p(0,1)$. Załóżmy, że $I: L^p \to L^q$ jest zwarty czyli $\{f_n\}$ ma podciąg zbieżny

$$f_{n_k} \longrightarrow f \quad w \ L^q(0,1).$$

Stąd możemy wybrać kolejny podciąg zbieżny prawie wszędzie na $(0,1)$:

$$f_{n_{k_l}} \longrightarrow f \quad p.w.$$

Ponieważ $|f_{n_{k_l}}| \leq 1$ i $1 \in L^2(0,1)$ to $f_{n_{k_l}} \longrightarrow f$ w $L^2(0,1)$ na mocy tw. o zbieżności zmajoryzowanej. Dalej, $f_{n_{k_l}} \longrightarrow f$ w $L^2(0,1)$ ale my już wiemy, że $f_n \rightharpoonup 0$ w $L^2(0,1)$ czyli $f=0$.

Jednakże $\|f_n\|_q^q = \int_0^1 |\sin(2\pi n x)|^q = \int_0^1 |\sin(2\pi x)|^q$ > 0 więc $f_n \not\to 0$ w L^q. Sprzeczność.

(B) $\quad J: C^{1/2}[0,1] \to C[0,1]$

Chcemy pokazać, że z każdego ciągu $\{f_n\}$ ograniczonego w $C^{1/2}$ można

wybrać podciąg zbieżny w $C[0,1]$

Weźmy dowolny taki ciąg $\{f_n\} \in C^{1/2}[0,1]$.

Posłużymy się twierdzeniem Arzeli-Ascoliego → Sprawdzamy jego założenie

1° $\{f_n\}$ wspólnie ograniczone w $C[0,1]$

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \|f_n\|_\infty + |f_n|_{1/2} \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \|f_n\|_{C^{1/2}} \leqslant M < \infty$$

f_n ograniczone w $C^{1/2}$ z założenia

2° $\{f_n\}$ jednakowo ciągłe, tzn $\forall_\varepsilon \exists_\delta \forall_{n\geqslant 1} \forall_{x\in[0,1]}$ $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$$f_n \in C^{1/2}[0,1] \text{ i ograniczone} \Rightarrow \exists M<\infty \ \forall_{n\geqslant 1} \quad \|f_n\|_{C^{1/2}} < M$$

$$\|f_n\|_{C^{1/2}} = \|f_n\|_\infty + |f_n|_{1/2} < M$$

$$\|f_n\|_\infty + |f_n|_{1/2} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{1/2}} < M$$

$$\Rightarrow \forall_n \ \forall_{x,y} \quad |f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|^{1/2} \quad (*)$$

Teraz ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$.

Twierdzę, że dla $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{M}\right)^2$ zachodzi implikacja: $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Istotnie, weźmy y t. że $|x-y|<\delta$:

$$|f(x)-f(y)| \underset{(*)}{\leqslant} M\cdot|x-y|^{1/2} < M\cdot\delta^{1/2} = M\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{M} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Wobec tego spełnione są założenia tw A-A i z $\{f_n\}$ można wybrać

podciąg zbieżny w $C[0,1]$

$\Rightarrow$ J jest operatorem zwartym.