(1)

$\mathcal{H}$ - Hilberta

(A) $\mathcal{K}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ jest domknięte w $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$

Weźmy $T_n \in \mathcal{K}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ $\quad T_n \to T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$

Chcemy pokazać, że T jest operatorem zwartym. Weźmy $x_m \in \overline{T(B(0,1))}$

$\forall_n$ T_n-zwarte $\Rightarrow$ z $(T_n x_m)$ możemy wybrać podciąg zbieżny.

$n=1$: z $T_1 x_m$ wybieram podciąg zbieżny $T_1 x_{m_{1,k}}$

$n=2$: z $T_2 x_{m_{1,k}}$ wybieram podciąg $T_2 x_{m_{2,k}}$

$\vdots$ itd.

Metodą diagonalną wybieram ciąg $y_{m_k} = x_{m_{k,k}}$

$\forall_n$ $\exists \tilde{y}_n$ t, że $T_n y_{m_k} \to \tilde{y}_n$ (bo od pewnego momentu $y_{m_k} \subset x_{m_{n,k}}$)

$\tilde{y}_n$ jest ciągiem Cauchy'ego:

$$\|\tilde{y}_n - \tilde{y}_l\| \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\|\tilde{y}_n - T_n y_{m_k}\|} + \underbrace{\|T_n y_{m_k} - T_l y_{m_k}\|}_{\leq \|T_n - T_l\| \cdot \|y_{m_k}\| \atop \downarrow \atop 0} + \underset{\downarrow \atop 0}{\|T_l y_{m_k} - \tilde{y}_l\|} \to 0 \qquad \text{// d.d.d. } n, l, k$$

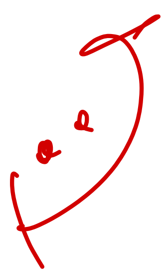
$\Rightarrow \exists \tilde{y}$ t, że $\tilde{y}_n \to \tilde{y}$

Pokażemy, że $T y_{m_k} \to \tilde{y}$

$$\|T y_{m_k} - \tilde{y}\| \leq \underbrace{\|T y_{m_k} - T_n y_{m_k}\|}_{\leq \|T - T_n\| \cdot \|y_{m_k}\|} + \underset{\downarrow \atop 0}{\|T_n y_{m_k} - \tilde{y}_n\|} + \underset{\downarrow \atop 0}{\|\tilde{y}_n - \tilde{y}\|} \to 0$$

$\Rightarrow$ z $T x_{m_k}$ można wybrać podciąg zbieżny

$\Rightarrow T \in \mathcal{K}(\mathcal{H},\mathcal{H})$



$\Rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ jest domknięte

(B) $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H},\mathcal{H})$, $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$

- $KS \in \mathcal{K}(\mathcal{H},\mathcal{H})$

Ustalmy $\{x_n\}$ - ograniczony w H. Pokażemy, że z $\{KSx_n\}$ można wybrać podciąg zbieżny.

$\|Sx_n\| \leq \underbrace{\|S\|}_{<\infty,\text{ bo } S\text{ - ciągłe}} \cdot \underbrace{\|x_n\|}_{\text{ograniczone}} \leq \|S\| \cdot \overbrace{C}^{\text{nie zależy od } n}$ $\quad$ - $\{Sx_n\}$ jest ograniczone

Ale K zwarte $\to$ z $\{KSx_n\}$ możemy wybrać podciąg zbieżny

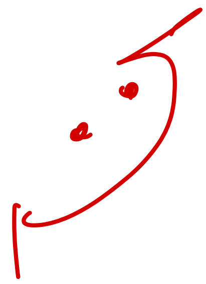
$\Rightarrow KS \in \mathcal{K}(H,H)$

• $SK \in \mathcal{K}(H,H)$

Ustalmy $\{x_n\}$ - ograniczone. K jest zwarte, więc z $\{Kx_n\}$ mogę wybrać podciąg zbieżny: $\exists\, z \in H$ taki że $Kx_{n_k} \to z$.

Z ciągłości S: $SKx_{n_k} \to Sz$

$$\|SKx_{n_k} - Sz\| \underset{\text{z liniowości}}{=} \|S(Kx_{n_k} - z)\| \leq \underbrace{\|S\|}_{\text{ograniczone}} \cdot \|Kx_{n_k} - z\| \to 0$$



Zatem z SKx_n można wybrać podciąg zbieżny

$\Rightarrow SK \in \mathcal{K}(H,H)$

(c)

$T \in \mathcal{L}(H,H)$, $\dim \operatorname{Im} T = n < \infty \Rightarrow T \in \mathcal{K}(H,H)$

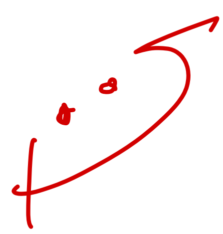
Chcemy pokazać, że $\overline{T(B(0,1))}$ jest zwarte

Skoro obraz T jest podprzestrzenią skończenie wymiarową, wystarczy pokazać, że $T(B(0,1))$ jest ograniczone.

$$x \in T(B(0,1)) \Rightarrow \exists\, y \in B(0,1) \quad x = Ty \Rightarrow \|x\| \leq \|T\| \cdot \|y\| \leq \underbrace{\|T\|}_{\text{skończone, } T \in \mathcal{L}(H,H)}$$

$\Rightarrow T(B(0,1))$ jest ograniczone

$\Rightarrow T$ - operator zwarty



$T: \ell^2 \to \ell^2$, $Tx = (y_i x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ $y \in \ell^\infty$

T-zwarty $\iff$ $y \in c_0$

($\Leftarrow$) $\forall_\varepsilon \exists_N \forall_{n>N} y_n < \varepsilon$

Weźmy $y \in c_0$ $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$

skończenie wiele miejsc niezerowych

$\exists \tilde{y}^n$ t, że $\tilde{y}^n \to y$, $\tilde{y}^n = (y_1^n, y_2^n, \dots, y_n^n, 0, 0, \dots)$

$T_{\tilde{y}^n}$ są operatorami zwartymi (bo $\dim \operatorname{Im} T_{\tilde{y}^n} = n < \infty$), wobec czego T_y,

jako granica operatorów zwartych, też jest zwarty

Jeszcze trzeba sprawdzić, że $T_{\tilde{y}^n} \to T$ w $\mathcal{L}(\ell^2, \ell^2)$: $\|T^n - T\| \leqslant \sup_{k \geq n} |y_k| \to 0$ bo $y \in c_0$.

($\Rightarrow$)

Weźmy $y \notin c_0$. Wówczas $\exists \varepsilon > 0$ $\forall_N \exists n > N$ t, że $|y_n| > \varepsilon$

Rozważamy ciąg $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, $\|e_n\|_{\ell_2} = 1$

n-te miejsce

$T_y e_n = (0, 0, \dots, y_n, \dots)$ $\leftarrow$ to nie jest ciąg Cauchy'ego:

$\exists_\varepsilon \forall_N \exists_{n,m}$ $\|T_y e_n - T_y e_m\|_{\ell^2}^2 = \left| |y_n|^2 + |y_m|^2 \right|^2 \geqslant |2\varepsilon^2|^2$

Zatem z $T_y e_n$ nie da się wybrać podciągu zbieżnego

$\Rightarrow T$ nie jest operatorem zwartym.

OK

② (A) $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

$\forall_{\varphi \in C_c^\infty(\Omega)}$, $\varphi \geqslant 0$ $\int_\Omega f\varphi \geqslant 0$ $\Rightarrow$ $f \geqslant 0$ p.w. na Ω

dodatniej miary

Przypuśćmy przeciwnie tzn. przypuśćmy, że istnieje $A \subset \Omega$, $\lambda(A) > 0$

t, że $f < \gamma < 0$ na A.

Z regularności miary $\forall_{\varepsilon > 0}$ istnieją F-zbiór domknięty i G-otwarty t, że:

$\lambda(G \setminus A) < \varepsilon$ i $\lambda(A \setminus F) < \varepsilon$

Wybieram $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ t, że $\psi = \begin{cases} 1 & x \in F \\ 0 & x \in \Omega \setminus G \end{cases}$, $0 \le \psi \le 1$

$$\int_\Omega f\psi = \overbrace{\int_{\Omega \setminus G} f\psi}^{0} + \int_{G\setminus F} f\psi + \int_F f\psi = \underbrace{\int_{G\setminus F} f\psi}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_F f}_{\mathrm{II}}$$

I $\left|\int_{G\setminus F} f\psi\right| \le \int_{G\setminus F} |f| = \int_\Omega |f| \cdot \mathbb{1}_{\{G\setminus F\}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej ($f \in \mathcal{L}^1$, $\lambda(G\setminus F) \le 2\varepsilon$)

II $\int_F f < \gamma \cdot \lambda(F) < 0$

Czyli $\int_\Omega f\psi < 0$ -> sprzeczność z założeniem

=> $f \ge 0$ p.w

(c) Q_i - d-wymiarowe rozłączne kostki o boku długości 1

=> $\exists f_i$ supp $f_i \subset 2Q_i$, $f_i \in [0,1]$ i $\sum_{i=1}^{\infty} f_i = 1$

Dla ustalonej kostki Q_i przyjmujemy $g_i := \chi_{Q_i} * \varphi_\varepsilon$ mollifier

[tzn. biorę funkcję taką jak w (C) : $g_i = 1$ na Q_i , $g_i = 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus 2Q_i$, $g_i \in [0,1]$]

Teraz f_i określamy następująco: $\begin{cases} f_1 = g_1 \\ f_i = g_i(1-g_{i-1})\dots(1-g_1) & i > 1 \end{cases}$

Tylko dla skończenie wielu ($:= N$) indeksów i $x \in \operatorname{supp} g_i$

$\underline{\sum f_i = 1}$

Dla $D = 1$, $N = 3$

Weźmy $x \in \mathbb{R}$ -> $\exists!\, i_x$ t, że $x \in Q_{i_x}$ $x \in \operatorname{supp} g_j$ $j = \{i_x - 1, i_x, i_x + 1\}$

$$\sum f_i(x) = \underbrace{g_{i_x-1}\underbrace{(1-\underbrace{g_{i_x-2}}_{=0})\dots(1-g_1)}_{=1}}_{=g_{i_x-1}(x)} + \underbrace{\underbrace{g_{i_x}}_{=1}(1-g_{i_x-1})\dots\underbrace{(1-\underbrace{g_1}_{=0})}_{=1}}_{=1-g_{i_x-1}(x)} + \dots \underbrace{g_{i_x+1}\underbrace{(1-\underbrace{g_{i_x}}_{=1})}_{=0}\dots(1-g_1)}_{=0} = 1$$

I analogicznie dla $N>3$:)

Można też położyć $f_i(x) := \dfrac{g_i(x)}{\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)}$:).

(D) $1 < p < \infty$

$f_n \rightharpoonup f$ w $L^p(\Omega)$ $\iff$ $\int_\Omega f_n\varphi \to \int_\Omega f\varphi$ $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ i $\{f_n\}$ ograniczone w $L^p(\Omega)$

$f_n \rightharpoonup f$ w $L^p(\Omega)$ $\iff$ $\forall \psi \in (L^p(\Omega))^*$ $\psi(f_n) \to \psi(f)$

Z tw. Riesza o reprezentacji wiemy, że $(L^p)^* = L^q$: $\quad 1<p<\infty$

$f_n \rightharpoonup f$ w $L^p(\Omega)$ $\iff$ $\forall g \in L^q(\Omega)$ $\int f_n g \to \int f g$

($\Rightarrow$)

$C_c^\infty(\Omega) \subset L^q$ - oczywiste

Tu trzeba być ostrożnym bo jak g nie ma zwartego nośnika to $g * \varphi_\varepsilon$ też nie będzie miał.
Dowód tej gęstości robi się tak że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{K_\varepsilon \text{ zwarty}}$ $\int_{\mathbb{R}^n\setminus K} |g|^p \le \varepsilon$. Potem bierze się $(g\mathbb{1}_{K_\varepsilon}) * \eta_\varepsilon$. To już jest w $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

($\Leftarrow$)

Weźmy dowolne $g \in L^q(\Omega)$

Znajduję $\tilde{g} \in C_c^\infty \cap L^q$ (gęsty podzbiór L^q) t, że $\|\tilde{g} - g\|_{L^q} < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

Mogę wziąć na przykład $g * \varphi_\varepsilon$. (mollifier)

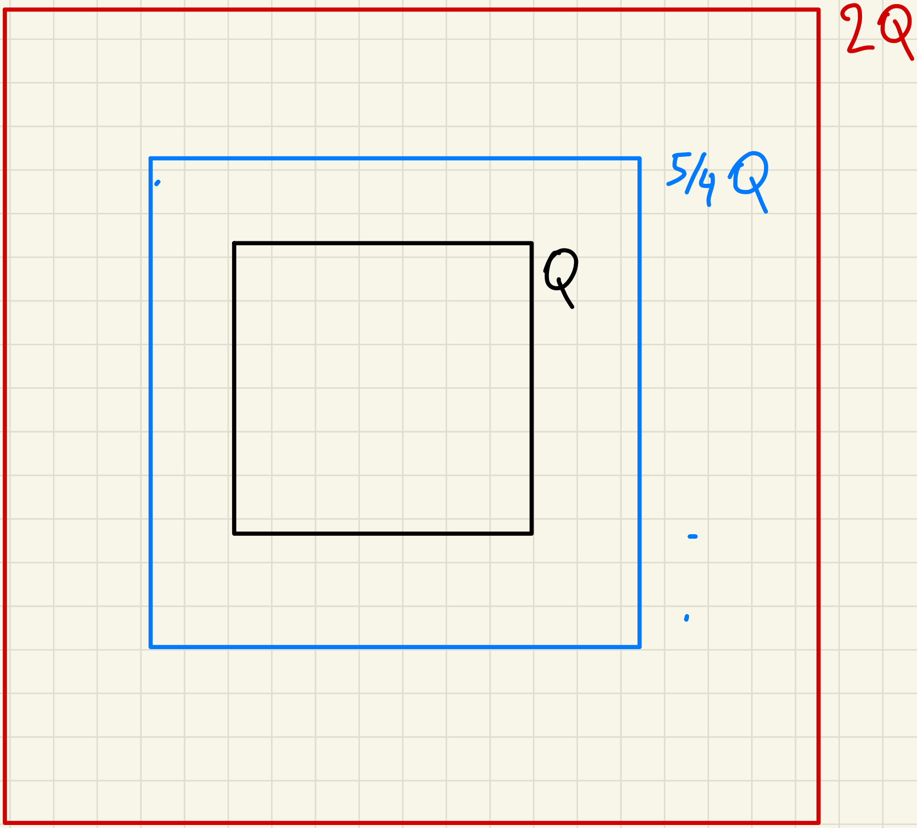
$$\left|\int f_n(x)\cdot g(x)\,dx - \int f(x)\cdot g(x)\,dx\right| = \int |g(x)||(f_n(x)-f(x))|\,dx \le$$

$$\le \int |g(x) - \tilde{g}(x) + \tilde{g}(x)||f_n(x) - f(x)|\,dx \le$$

$$\le \underbrace{\int |g(x)-\tilde{g}(x)|\cdot|f_n(x)-f(x)|\,dx}_{\le \underbrace{\|g(x)-\tilde{g}(x)\|_{L^q}}_{\varepsilon\to 0 \ \Downarrow \ 0}\cdot\underbrace{\|f_n(x)-f(x)\|_{L^p}}_{\text{ograniczone}}} + \underbrace{\int |\tilde{g}(x)|\cdot|f_n(x)-f(x)|\,dx}_{\Downarrow \ 0 \text{ - z założenia}} \longrightarrow 0$$

Zatem $\int f_n g \to \int f g$ $\forall g \in L^q$ i $f_n \rightharpoonup f$

(B) Bierzemy $f = \mathbb{1}_{\frac{5}{4}Q} * \eta_{1/100}$. Wtedy



Ponieważ $\mathbb{1}_{5/4Q} = 1$ na kostce $\frac{5}{4}Q$ to

$$\mathbb{1}_{5/4Q} * \eta_{1/100} = \int_{B(0,1/100)} \mathbb{1}_{5/4Q}(x-y)\,\eta_{1/100}(y)\,dy = 1$$

Zwracam uwagę, że $\mathbb{1}_Q * \eta_{1/100}$ nie wystarczy: przy brzegu zacznie się zerować. Trzeba sobie trochę zrobić zapasu miejsca.