Zadanie 1

(Ola, Krysiek)

B3 $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$, $1 \le p, q \le \infty$, $r \in [p, q]$

1/1

<u>Teza</u>: $f \in \mathcal{L}^r$, istnieje $\alpha \in [0,1]$ t. że $\|f\|_r \le \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha}$

Znajdziemy α t. że $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ $\left(\Leftrightarrow 1 = \frac{\alpha r}{p} + \frac{(1-\alpha) r}{q} \right)$

$$\int |f|^r d\mu(x) = \int |f|^{\alpha r} \cdot |f|^{(1-\alpha) r} d\mu(x) \underset{\text{Hölder dla } \frac{p}{\alpha r} \text{ i } \frac{q}{(1-\alpha) r}}{\le} \left[\int (|f|^{\alpha r})^{\frac{p}{\alpha r}} d\mu(x) \right]^{\frac{\alpha r}{p}} \left[\int (|f|^{(1-\alpha) q})^{\frac{q}{(1-\alpha) r}} d\mu(x) \right]^{\frac{(1-\alpha) q}{r}} =$$

$$= \left(\int |f|^p d\mu(x) \right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left(\int |f|^q d\mu(x) \right)^{\frac{(1-\alpha) r}{q}} = \|f\|_p^{\alpha r} \|f\|_q^{(1-\alpha) r} \Leftrightarrow$$

$$\|f\|_r \le \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha} < \infty$$

(zatem $f \in \mathcal{L}^r$)

A gdyby $q = \infty$?

Wtedy $f \in \mathcal{L}^\infty \rightsquigarrow \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_x |f| =: M$

To znaczy $|f(x)| < M$ prawie wszędzie.

$$\|f\|_r = \|f \cdot \mathbb{1}_{\{x : f(x) < M\}}\|_r$$

$$\|f\|_r = \left(\int |f|^r d\mu(x) \right)^{1/r} \le \left(\int |f|^p \cdot |f|^{r-p} d\mu(x) \right)^{1/r} \le \left(\int |f|^p \cdot \underset{\Downarrow \alpha}{M^{r-p}} d\mu(x) \right)^{1/r} \le$$

$$\le \left(M^{r-p} \cdot \int |f|^p d\mu(x) \right)^{1/r} = M^{\frac{r-p}{r}} \cdot \|f\|_p^{p/r} < \infty$$

Dla $\alpha := p/r \in [0,1]$ nierówność zachodzi.

$f \in \mathcal{L}^r$

Zadanie 2 (Adam, Jan Kostrun)

ZAD.2 (C1)

Niech $\|f\|_B = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$

$\|\cdot\|_B$ jest normą prawda

bo jest zdefiniowany

1) $0 = \|f\| = \underbrace{|f(0)|}_{\geq 0} + \sup_{x\in[0,1]} \underbrace{|f'(x)|}_{\geq 0} = 0$

$\Rightarrow f(0) = 0$ oraz $\sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = 0 \Leftrightarrow$

moduł $\geq 0 \Rightarrow f'(x) = 0$

zatem

$f(0) = 0 \wedge f'(x) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

jednorodność wynika

2) $\|\alpha f\|_B = |\alpha f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |(\alpha f)'(x)| = |\alpha||f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |\alpha f'(x)|$

$= |\alpha|\left(|f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|\right) = |\alpha| \|f\|_B$ jednorodność pochodnej

oraz $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup B$ gdy A, B są stałe

3) $\triangle$

$\|f+g\|_B = |(f+g)(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |(f+g)'(x)| =$

$= |f(0) + g(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x) + g'(x)| \leq$

$\leq |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} (|f'(x)| + |g'(x)|) + g(0)$ z nierówności modułów

$= f(0) + \sup |f'(x)| + g(0) + \sup |g'(x)| = \|f\|_B + \|g\|_B$

Czy dana $(C[0,1], \|\cdot\|_B)$ jest p-strzenią Banacha?

Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w naszej przestrzeni, wtedy ciąg $\{f_n(0)\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Ponieważ obie przestrzenie są zupełne istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$

$f_n(0) \xrightarrow[|\cdot|]{} \alpha$ oraz g' t. że $f_n' \xrightarrow[\sup]{} g'$ (w przestrzeni $(C[0,1], \sup)$) $\|\cdot\|_B$

ponadto f_n jest C^1 to f_n' jest ciągłe oraz dąży do g' ciągłej

Rozważmy funkcję

$h(x) = \alpha + \int_0^x g'(t)\,dt$ wtedy $h(0) = \alpha$ i $h'(x) = g'(x)$

twierdzimy, że $h(x)$ jest szukaną granicą ciągu f_n

→ VERTE

Wtedy $k_1 \in \mathbb{N}$ będzie t, że dla $\forall\, n \geq k_1$ mamy $|f_n(0) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

i $k_2 \in \mathbb{N}$, że $\forall_{n \geq k_2} \sup_{x \in [0,1]} |f_n'(x) - \varphi'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Wtedy dla $n \geq \max(k_1, k_2)$ mamy

$$\|h - f_n\|_B = |h(0) - f_n(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |h'(x) - f_n'(x)| =$$

$$= |a - f_n(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |\varphi'(x) - f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$