Zadanie 1

A) $\varphi_n \in F^*$

1) liniowość

$f, g \in F \quad \varphi_n(f+g) = n\int_0^{1/n} (f+g)(t)\, dt = n\int_0^{1/n} f(t)\, dt + n\int_0^{1/n} g(t)\, dt = \varphi_n(f) + \varphi_n(g)$ ✓

$\alpha \in K,\ f \in F \quad \varphi_n(\alpha f) = n\int_0^{1/n} \alpha f(t)\, dt = \alpha \cdot n \int_0^{1/n} f(t)\, dt = \alpha\, \varphi_n(f)$ ✓

2) ograniczoność $\quad n \in \mathbb{N}$ - ustalone $\quad f \in C[0,1],\ \|f\|_2 \le 1 \quad \left(\int_0^1 f(t)^2 dt\right)^{1/2} \le 1$

nierówność Höldera

$\|\varphi_n\| = \sup_{\|f\|_2 \le 1} \|\varphi_n f\| = \sup_{\|f\|_2 = 1} \|\varphi_n f\| = \sup_{\|f\|_2 = 1} \left| n \int_0^{1/n} f(t)\, dt \right| \le \sup_{\|f\|_2 = 1} n \int_0^{1/n} |f(t)| \cdot 1\, dt \le \sup_{\|f\|_2 = 1} n \left(\int_0^{1/n} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{1/n} 1\, dt \right)^{1/2} \le n \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \le \sqrt{n}$ ✓

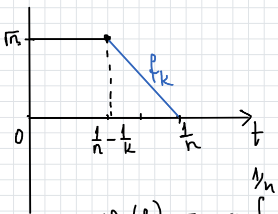
Zatem $\varphi \in F^*$.

B) $\forall_{f \in F} \ \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(f)| < \infty$

$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| n \int_0^{1/n} f(t)\, dt \right| \le \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| n \int_0^{1/n} |f(t)|\, dt \right| \le \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|\ n \int_0^{1/n} 1\, dt = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ zatem $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(f)| \le \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| < \infty$.

C) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\| = \infty$

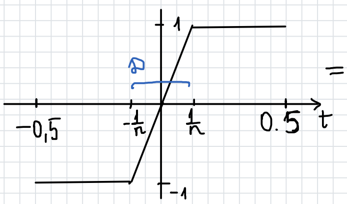
Pokażemy, że $\|\varphi_n\| = \sqrt{n}$. Wtedy $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{n} = \infty$.



$\|f_k\|_2 \le \left(\int_0^{1/n} (\sqrt{n})^2 dt \right)^{1/2} = 1$

$\varphi_n(f) = n \int_{\frac{1}{n} - \frac{1}{k}}^{1/n} f_k(t)\, dt + n \int_0^{\frac{1}{n} - \frac{1}{k}} \sqrt{n}\, dt \ge n \int_0^{\frac{1}{n} - \frac{1}{k}} \sqrt{n}\, dt = n\sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k} \right) \xrightarrow{k \to \infty} \sqrt{n}$

Tw. Banacha-Steinhausa nie zachodzi, bo przestrzeń $C[0,1]$ z normą $\|\cdot\|_2$ nie jest przestrzenią Banacha.



$= f_n \in C[0,1] \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f(t) = \begin{cases} -1 & t \in [-0{,}5, 0) \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t \in (0, 0{,}5] \end{cases} \notin C[0,1]$

$\|f_n - f\|_2^2 = \int_D (1 - xn)^2 dx = 2\int_0^{1/n} (1 - nx)^2 dx = \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{4}{3n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Ten przykład trzeba tylko przesunąć o 0.5 w prawo :)

Zadanie 2

rodzina operatorów

$|a(x,y)| \leq C_x \|y\|_F \iff |a(x, \frac{y}{\|y\|_F})| \leqslant C_x$. Niech $a_y : E \to \mathbb{R}$, $a_y(x) = a(x,y)$ $\{a_y\}_{\|y\|_F=1}$

$\Rightarrow \sup_{\|y\|_F=1} |a_y(x)| \leqslant C_x$

E jest Banacha, więc z tw. Banacha Steinhausa dla rodziny $\{a_y\}_{\|y\|_F=1}$ mamy $\sup_{\|y\|_F=1} \|a_y\| \leqslant C$, $C \geqslant 0$ nie zależy od x i y

$$|a(x,y)| = \|y\|_F \, |a(x, \frac{y}{\|y\|_F})| = \|y\|_F \, |a_{\frac{y}{\|y\|_F}}(x)| \leqslant \|y\|_F \|x\|_E \|a_{\frac{y}{\|y\|_F}}\| \leqslant \|y\|_F \|x\|_E \cdot C$$

$$|a(x,y)| \leqslant C \cdot \|y\|_F \|x\|_E \quad \blacksquare$$