(1)

$\exists\ \varphi$ - ograniczony funkcjonał na l^∞ t, że

- $\varphi((x_0, x_1, x_2, \dots)) = \varphi((x_1, x_2, x_3, \dots))$
- $x \in l^\infty \Rightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \varphi(x_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$
- $x \in l^\infty$ i x - zbieżne $\Rightarrow \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Niech $W = \{x \in l^\infty : \exists \alpha \ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \alpha\} \subset l^\infty$

W jest podprzestrzenią:

- $0 \in W$
- $a \in K$, $x = (x_1, x_2, \dots) \in W \rightsquigarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} =: \xi$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ax_1 + \dots + ax_n}{n} = a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = a \cdot \xi \Rightarrow ax \in W$$

- $x, y \in W \rightsquigarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} =: \xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} =: \zeta$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + y_1 + \dots + x_n + y_n}{n} = \xi + \zeta \Rightarrow x + y \in W$$

Określmy $\tilde{\varphi} : W \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

z definicji podprzestrzeni W φ jest dobrze określone.

Ponadto $\tilde{\varphi}$ jest liniowe.

Pokażemy, że $\tilde{\varphi}$ jest ograniczone:

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{x \in W \\ \|x\|_\infty \leq 1}} |\tilde{\varphi}(x)| = \sup_{\substack{x \in W \\ \|x\|_\infty \leq 1}} \left| \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right| \leq \sup_{\substack{x \in W \\ \|x\| \leq 1}} \left| \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \|x\|_\infty}{n} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{x \in W \\ \|x\|_\infty \leq 1}} \|x\|_\infty = 1$$

Zatem $\tilde{\varphi} \in W^*$

Posługując się analityczną wersją tw. Hahna-Banacha możemy przedłużyć je do $\varphi \in (\ell^\infty)^*$ tak, że $\|\tilde{\varphi}\|_{W^*} = \|\varphi\|_{(\ell^\infty)^*}$

φ posiada żądane własności:

- $\varphi((x_1, x_2, \dots)) = \varphi((x_2, x_3, \dots))$

Przypuśćmy przeciwnie, że $\exists\, x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ t, że:

$\varphi((x_1, x_2, \dots)) = u$, $\varphi((x_2, x_3, \dots)) = v$, $u \neq v$

Wówczas definiujemy $\tilde{x} = (\underbrace{x_1 - x_2}_{\tilde{x}_1}, \underbrace{x_2 - x_3}_{\tilde{x}_2}, \dots)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \dots + \tilde{x}_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + \dots}{n} = 0$$

Zatem $\tilde{x} \in W$ i $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = 0$

z liniowości φ : $0 = \varphi(\tilde{x}) = \varphi((x_1, x_2, \dots)) - \varphi((x_2, x_3, \dots)) = u - v$

$\Rightarrow u = v$

- $\liminf\limits_{n\to\infty} x \leq \varphi(x) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ dla $x \in \ell^\infty$

Weźmy dowolne $x \in \ell^\infty$.

Niech $g = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ i $G = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

zawsze istnieją dla $x \in \ell^\infty$

Wtedy $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N$ t, że że $\forall_{n > N} \quad x_n + \varepsilon > g \iff x_n - g + \varepsilon > 0$

$\tilde{x} := \overset{N}{x} - g + \varepsilon = (x_{N+1}, x_{N+2}, \dots) - g + \varepsilon = (x_{N+1} - g + \varepsilon, x_{N+2} - g + \varepsilon, \dots) \geq 0$

$0 \leq \varphi(\tilde{x}) = \underbrace{\varphi(x^N)}_{= \varphi(x)} - \varphi(g) + \varphi(\varepsilon)$ <~ TO UDOWODNILIŚMY PRZED CHWILĄ

$\Leftrightarrow$

$\varphi(x) \geq \varphi(g) - \varphi(\varepsilon) = g - \varepsilon$

// ale ε jest dowolny

$\Rightarrow \varphi(x) \geq g = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$

I analogicznie możemy pokazać, że $\varphi(x) \leq G$

- $x \in l^\infty$ i x - zbieżne $\Rightarrow \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Z poprzedniego punktu:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \varphi(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Ale x - zbieżne $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

$\Rightarrow \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Zad 2

$C \subset E$, wypukły

C - domknięte ze względu na normę

$\Leftrightarrow$

C - domknięte ze względu na słabą zbieżność. (?)

($\Leftarrow$)

Chcę pokazać, że: $x_n \in C$, $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x \in C$.

Jeśli $x_n \to x$, to $x_n \rightharpoonup x$:

Weźmy dowolne $\varphi \in E^*$.

$\varphi(x_n) - \varphi(x) = \varphi(x_n - x) \leq \|\varphi\| \cdot \|x_n - x\| \to 0$

skończone, $\varphi \in E^*$

$\downarrow$
0

Z założenia: $x \in C$

(=>)

Przypuśćmy, że taka implikacja nie zachodzi,

$\exists\, x_n \in C$ t, że $x_n \to x$, ale $x \in C$.

Wiemy, że C jest wypukłe i domknięte (z założeń).

$\{x\}$ - zbiór zwarty.

Geometryczne tw. Hahna-Banacha orzeka, że

$\exists\, \varphi \in E^* \ \exists\, \lambda$ t, że: $\sup\limits_{a \in C} \varphi(a) < \lambda < \varphi(x)$

W szczególności $\forall_n\ \exists\, \gamma > 0$ $|\varphi(x) - \varphi(x_n)| > \gamma$

Sprzeczność ($x_n \rightharpoonup x \iff \forall \varphi\ \varphi(x_n) \to \varphi(x)$)

Zatem C domknięty ze względu na słabą zbieżność