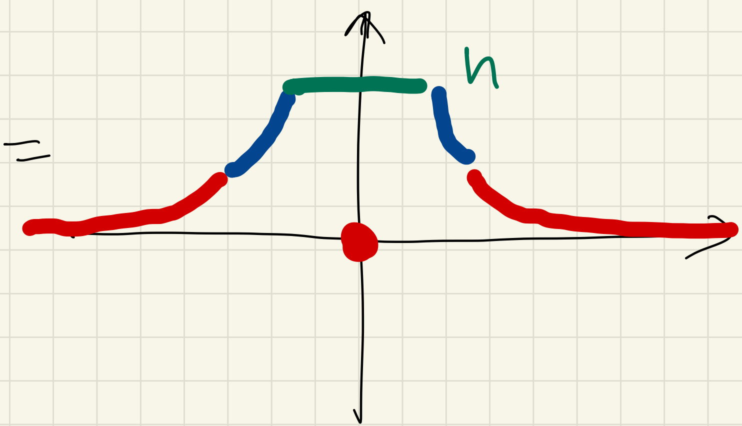
Z1/dodatkowe

$$X = \{ f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{x \to \pm\infty} (\ \ x^2)\,|f(x)| = 0 \}$$

$$\|f\|_X = \sup_x (\ \ x^2)\,|f(x)|$$

Rozw: X jest unormowana

$f_n(x) =$



$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x^3 & |x| \geq 1 \\ \cancel{\frac{1}{x}} & |x| \in (\frac{1}{n}, 1) \\ n & x \in (0, \frac{1}{n} \end{cases}$$

Jak $f_n \to f$ w X

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{x^2} \underbrace{\sup_{x} x^2 |f_n(x) - f(x)|}_{= \|f_n - f\|}$$

w każdym $x \neq 0$ $f_n(x) \to f(x)$.

Co gdyby wziąć normę

$$\|f\|_X = \sup_{x} (1+x^2) |f(x)|$$

w tym zadaniu?

$$\|f\|_X = \sup_x (1+x^2)|f(x)| \geq \sup_x |f(x)|.$$

Wiemy, że $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ jest przestrzenią Banacha.

Gdy f_n ciąg Cauchy'ego w $X \Rightarrow$ ciągiem Cauchy'ego w $C_0(\mathbb{R}) \Rightarrow f_n$ mają granicę w C_0. Oznaczmy ją f

2) $\|f_n - f\|_X \longrightarrow 0$

1) $f \in X$

1) $f \in X$

$$|f(x)|(1+x^2) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|f_n(x)|(1+x^2)} \leq$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty$$ ograniczone.

2)

$$|(1+x^2)|\,|f_n(x) - f(x)| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} |(1+x^2)|\,|f_n(x) - f_m(x)|$$

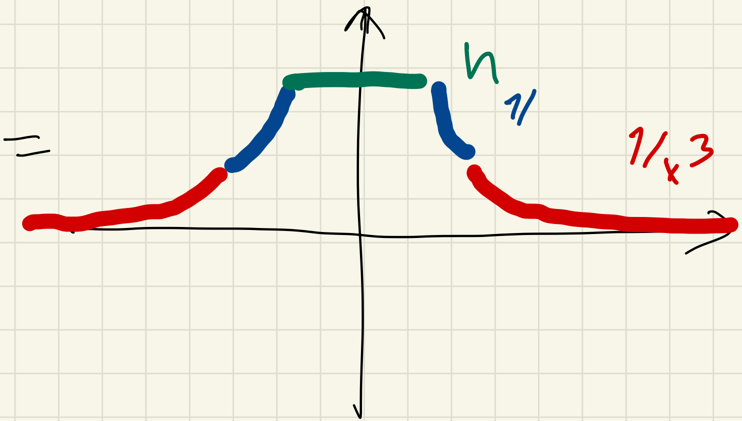
$$\leq \underbrace{\limsup_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|}$$ nie zależy od x.

$$\|f_n - f\|_X \leq \limsup_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_X$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n - f\|_X \leq \limsup_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_X = 0$$

bo $\{f_n\}$ ciąg Cauchy'ego w X.

$f_n(x) =$



$$\|f\|_X = \sup_x x^2 |f(x)|$$

Gdyby f_n był zbieżny w X to dla każdego $x \neq 0$

$f_n(x)$ też zbiega punktowo.

Rozwiązanie:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x^3 & |x| \geq 1 \\ \cancel{\frac{1}{x}} & |x| \\ n & |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

1) f_n jest ciągiem Cauchy'ego w $(X, \|\cdot\|_X)$. Rozważmy pomocniczą przestrzeń Y

$$Y = \{ f \text{ mierz}: \ |f(x)|\, x^2 \in L^\infty \}, \quad \|f\|_Y = \sup_x |f(x)|\, x^2.$$

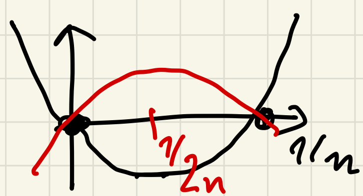
$X \subset Y$ $\quad$ X jest podprzestrzenią Y

f_n zbiega w Y do $f(x) = \begin{cases} 1/x^3 & |x| \geq 1 \\ 1/x & |x| < 1. \end{cases}$

$$\|f_n - f\|_Y = \sup_x |x|^2 \, |f_n(x) - f(x)| =$$

$$= \sup_{x \in [0, \frac{1}{n}]} |x|^2 \left| n - \frac{1}{x} \right| = \sup_{x \in [0, \frac{1}{n}]} \left| n|x|^2 - |x| \right|.$$

$$= \sup_{x \in [0, \frac{1}{n}]} |x| \, \big| n|x| - 1 \big| \underset{\uparrow \, 1/2n}{=} \frac{1}{2n} \left| n \frac{1}{2n} - 1 \right| = \frac{1}{4n} \to 0.$$



$f_n \to f$ w $(Y, \|\cdot\|_Y)$

$\Rightarrow$ f_n jest ciągiem Cauchy'ego w Y (bo ciągi zbieżne są Cauchy'ego)

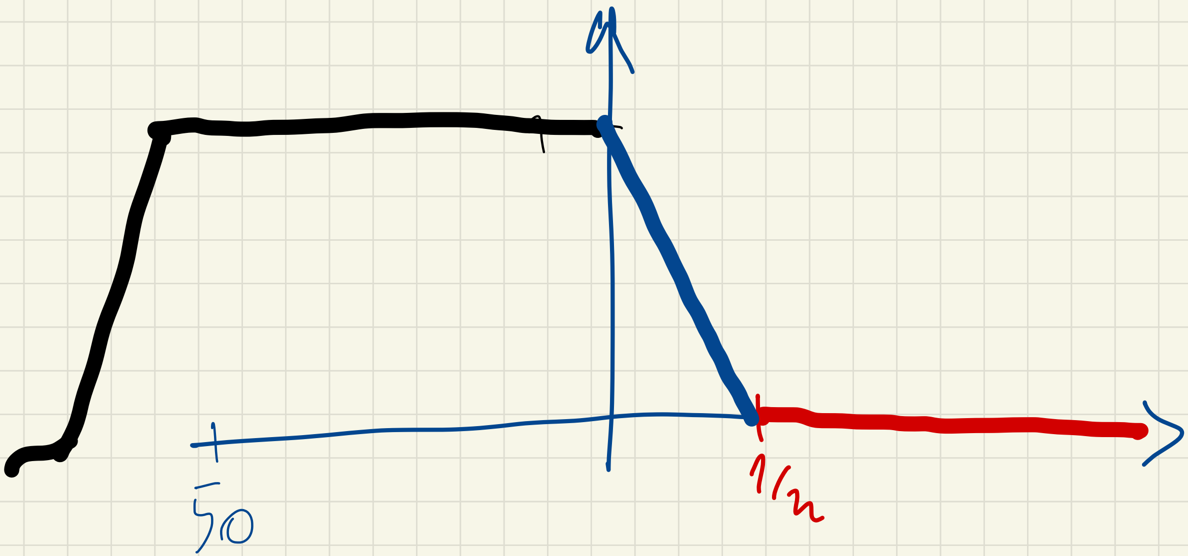
$\Rightarrow$ f_n jest ciągiem Cauchy'ego w X (bo normy w X i Y są takie same)

Gdyby f_n był zbieżny w X do $\tilde{f} \in X$

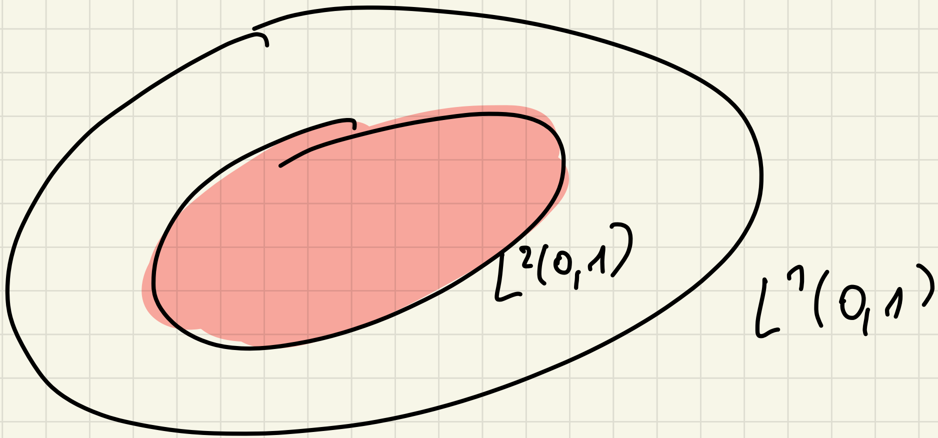
$$\|f_n - \tilde{f}\|_X = \|f_n - \tilde{f}\|_Y \quad \text{więc } f_n \to \tilde{f} \text{ w } Y.$$

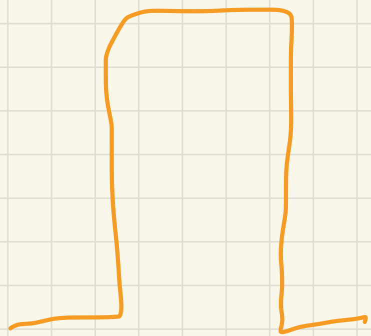
Sprzeczność bo $\tilde{f} = f$ ale $f \notin X$.

INNY PRZYKŁAD.



Zad $(L^2, \|\cdot\|_1)$ jest zupełna





wieża

Unormowanie

Jedyna trudność:

$$\|f\|_X = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$\sup_{x \neq 0} x^2 |f(x)| = 0$$

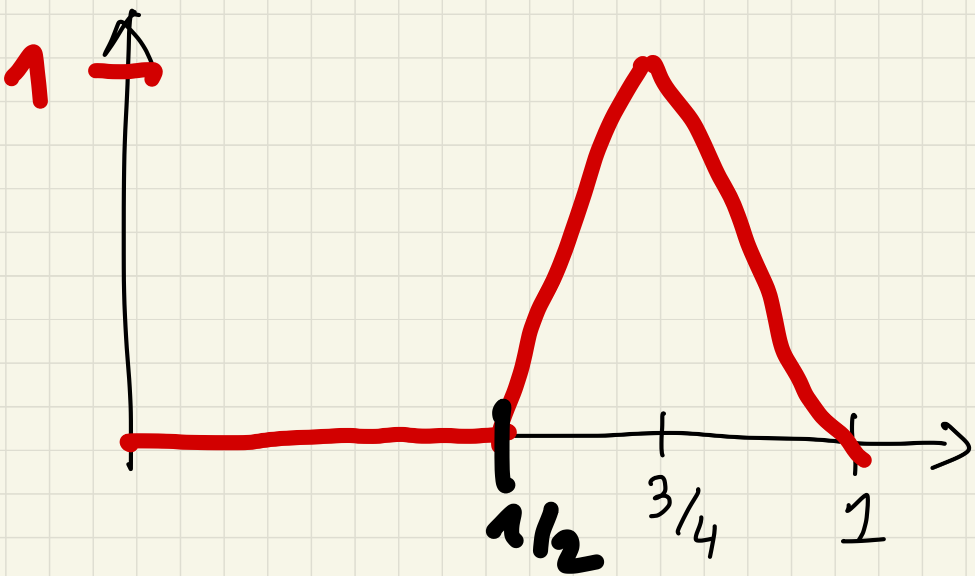
$$\Downarrow$$

$$|f(x)| = 0 \quad \forall_{x \neq 0} \xrightarrow{\text{ciągłość}} f = 0 \quad \forall_x$$

Zadanie 2

$$Y = C[0,1] \qquad \|f\|_Y = \sum \frac{1}{k^2} \left| f\left(\frac{1}{k}\right) \right|$$

To nie spełnia $\|f\|_Y = 0 \Rightarrow f = 0$

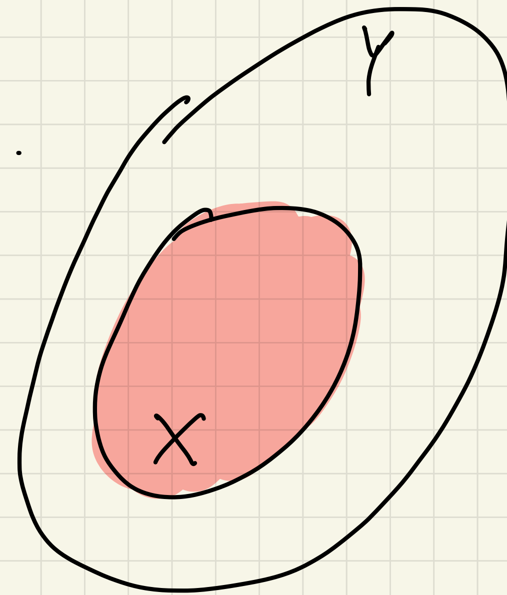


Zadanie 3 / dodatkowe

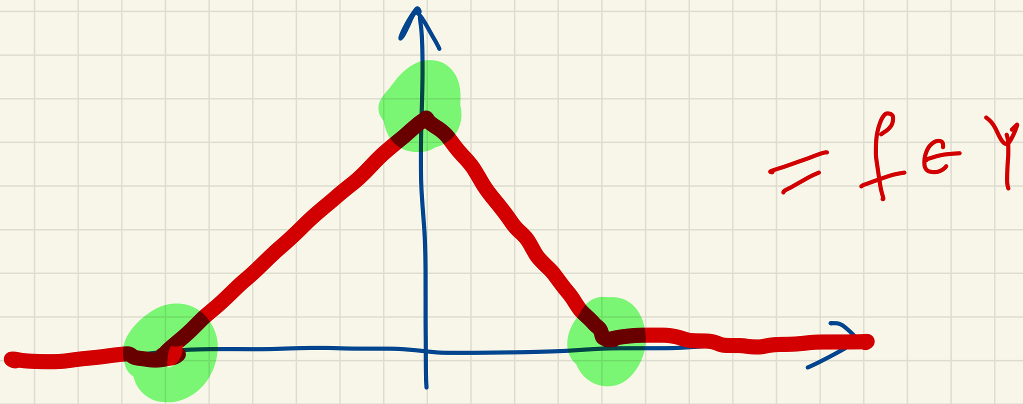
$$X = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| < \infty \right\}.$$

$$\|f\|_X = |f(0)| + \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,dx.$$

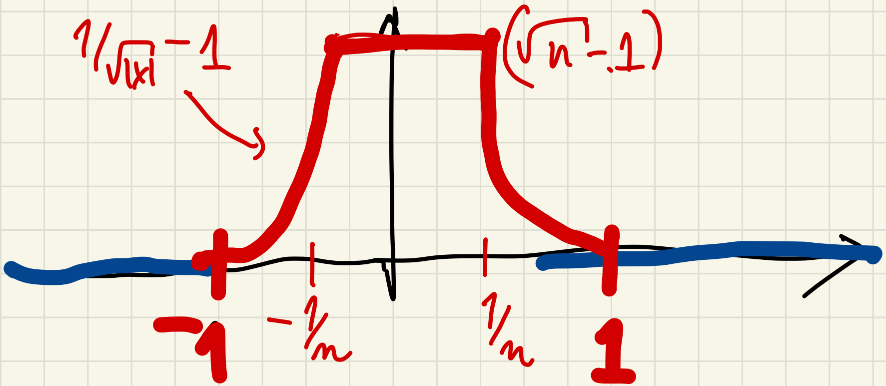
$$Y = \left\{ f \text{ ciągłe},\ f' \text{ istnieje p.-w.}, \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| < \infty \right\}.$$



$$Y = \{ f \text{ ciągłe}, \ f' \text{ istnieje p.-w.}, \ \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| < \infty \} .$$



Ten przykład nie działa przez aproksymację wielomianami bo nie kontrolujemy zbieżności pochodnych. (To można zrobić przez splot).



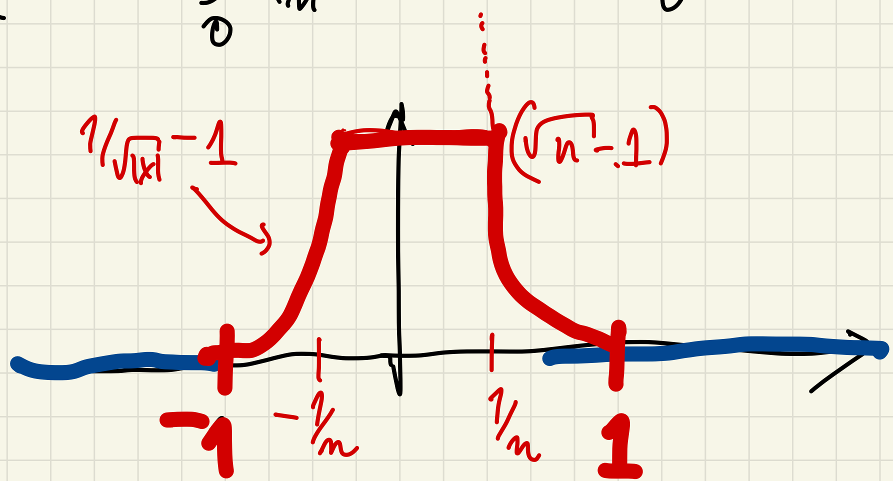
$= f_n'$

$Y = \{ f$ ciągłe, f' istnieje p-w., $\int^{\infty} |f'(x)| < \infty \}$

$$f_n(x) = \int_0^x f_n'(t)\,dt$$

Ostateczny pomysł na ciąg (kontrprzykład)

$f_n(x) = \int_0^x f_n'(t)\,dt$ gdzie f_n' dane:



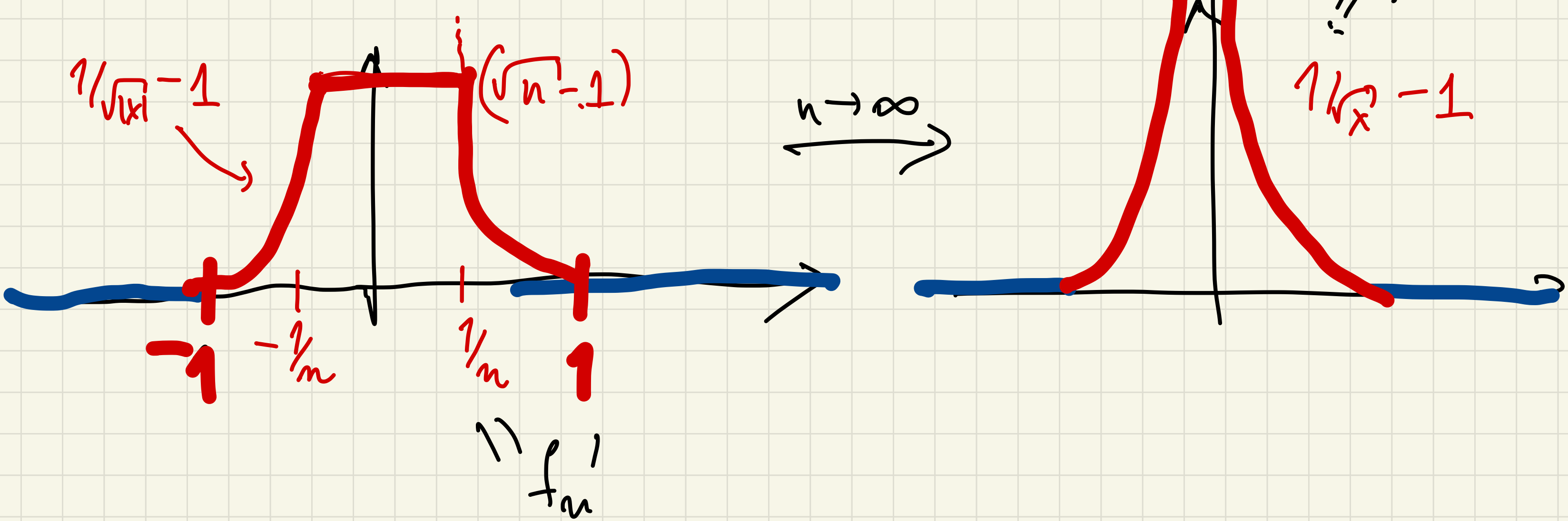
$= f_n'$

$f_n \in X$ bo $f_n \in C^1$, $\int |f_n'| < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n'| = 2\int_0^1 |f_n'| \le 2\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) dx < \infty$$

bo $\frac{1}{\sqrt{x}}$ całkowalny.

Pokażemy, że zbiega w Y



$$f_n' \to f' \text{ w } L^1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

Chcemy $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f_n' - f'| \to 0$

$$\| $$

$$2\int_0^{1/n} \left| \left(\sqrt{n} - 1\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \right| = 2\int_0^{1/n} \left| \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| dx$$

$$= 2\int_0^{1/n} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{n}\right) = 2\left(2\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n}\right) \to 0$$

przy $n \to \infty$.

Puenta $\bullet \int_{\mathbb{R}} |f_n' - f'| \, dx \longrightarrow 0$

$\bullet \ |f_n(0) - f(0)| = 0.$

Mamy ciąg funkcji $\{f_n\} \subset Y$ zbieżny w Y. $\Rightarrow$ jest Cauchy'ego w X $\Rightarrow$ gdyby zbiegał w X to jego granica pokrywałaby się z granicą w Y $\Rightarrow$ tak nie może być bo ta granica nie należy do X.

Zadanie 2 / zeszłe kolokwium

Mamy $L^p(\mathbb{R}^+)$ $\quad 1 \leq p \leq \infty$

$$(Tf)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} f\left(\frac{x}{2^j}\right).$$

- dla jakich p jest dobrze określony $(f \in L^p \Rightarrow Tf \in L^p)$
- dla jakich liniowy, ograniczony.

Dobre określony

$$Tf(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} f\left(\frac{x}{2^j}\right)$$

Szereg zbiega gdy $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left\| f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right)\right\|_p < \infty$.

$$\left\| f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right)\right\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^+} \left| f\left(\frac{x}{2^j}\right)\right|^p dx \underset{\substack{y = \frac{x}{2^j} \\ 2^j\, dy = dx}}{=} \int_{\mathbb{R}^+} |f(y)|^p\, 2^j\, dy$$

$$= 2^j \, \|f\|_p^p$$

$$\Rightarrow \left\| f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right)\right\|_p \doteq 2^{j/p} \, \|f\|_p .$$

Wracam do szeregu:

sprawdzamy zb. bezwzgl.: $\sum \frac{1}{2^j} \cdot 2^{j/p} \|f\|_p =$

$$= \left(\sum 2^{j/p - j} \right) \|f\|_p \qquad 1 < p < \infty \text{ jest ok}$$

Puenta: jest dobrze określony dla $1 < p \leq \infty$

Co z $p = \infty$: $\sum \frac{1}{2^j} \underbrace{\left\| f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right) \right\|_\infty}_{\leq \|f\|_\infty} \leq \|f\|_\infty .$

Przypadek $p = 1$

$$f = \mathbb{1}_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R}^+)$$

Gdyby $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} f\left(\frac{x}{2^j}\right)$ był zbieżny to ciąg sum częściowych

zbiegałby w L^1: $S_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}_{[0,2^j]}$

$$\| S_N \|_1 = \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}_{[0,2^j]} = N,$$

więc nie może zbiegać bo ciąg zbieżny jest ograniczony

Teraz już badamy $p>1$.

Przy dobrej określoności pokazaliśmy, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left\| f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right)\right\|_p \leq \left(\sum 2^{j/p - j}\right) \|f\|_p \qquad 1<p<\infty$$

$$\sum \frac{1}{2^j} \left\| f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right)\right\|_\infty \leq \|f\|_\infty . \qquad p=\infty$$

Jak dostać że T jest ograniczony

$\exists_C \quad \|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$

$1 < p < \infty$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left\| f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right)\right\|_p \leq \left(\sum 2^{j/p - j}\right) \|f\|_p \quad 1 < p < \infty$$

$$Tf = \lim_{N\to\infty} S_N f$$

$$\left(\sum 2^{j/p - j}\right) \|f\|_p.$$

$$\|S_N f\|_p \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} \left\| f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right)\right\|_p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left\| f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right)\right\|_p$$

$\|Tf\|_p$ bo wiemy, że $S_N f \to Tf$ w L^p.

Pokazaliśmy że gdy $\sum_{k\geq 1} x_k$ jest zbieżny w X to mamy nierówność trójkąta

$$\left\| \sum_{k\geq 1} x_k \right\| \leq \sum_{k\geq 1} \|x_k\|$$

Dowód: $S_N = \sum_{k=1}^{N} x_k$ $\quad \|S_N\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k\geq 1} \|x_k\|$

i przejść do granicy. $\square$.

WRACAMY

O 17:25.

Zadanie 4 / dodatkowe

$$T: \ell^1 \to c_0 \qquad (Tx)_n = \sum_{k=n}^{\infty} x_k$$

$x \in \ell^1: \quad \sum |x_k| < \infty$

$x \in c_0: \quad x_k \to 0$ przy $k \to \infty$.

1) dobrze zdef.
2) ograniczony
3) policzyć normę

$T: \ell^1 \to c_0$ bo jeśli $\sum |x_k| < \infty$ to $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{\infty} x_k = 0$.

(to jest ogon szeregu zb.),

Ograniczony : $\underbrace{\|Tx\|_{c_0}}_{\|Tx\|_\infty \leq C.} \leq C \quad \forall \|x\|_1 \leq 1.$

$$\|Tx\|_\infty = \sup_n \left| \sum_{k=n}^{\infty} x_k \right| \leq \sup_n \sum_{k=n}^{\infty} |x_k| =$$

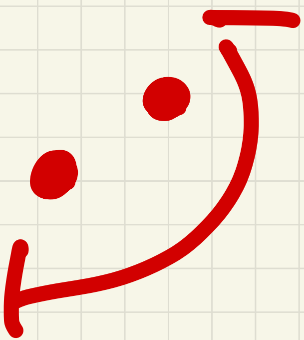
$$= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq 1.$$

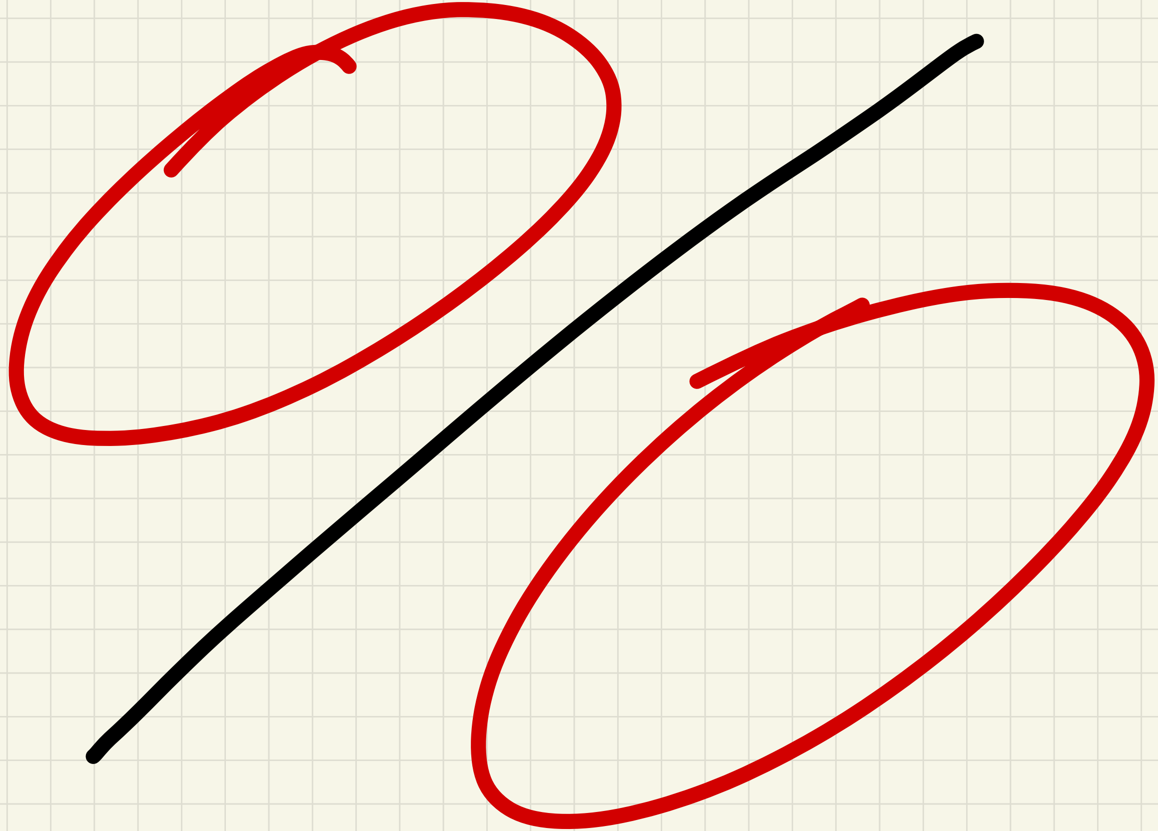
$\Rightarrow T \in \mathcal{L}(l^1, c_0), \quad \|T\| \leq 1.$

Próbujemy pokazać, że $\|T\| = 1$.

$$x = (1, 0, 0, \ldots) \qquad \|x\|_1 = 1.$$

$$Tx = (1, 0, 0, \ldots) \qquad \|Tx\|_\infty = 1.$$





Zadanie 5.

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t) e^{-t} \, dt \qquad 1 \leq p \leq \infty.$$

Znaleźć wszystkie p $1 \leq p \leq \infty$ $\varphi \in (L^p(\mathbb{R}^+))^*$.

czyli φ - funk. ogr. lin. na $L^p(\mathbb{R}^+)$.

- liniowość ✓.
- ograniczoność: $|\varphi(f)| = \left| \int_{\mathbb{R}^+} f(t) e^{-t} dt \right| \leq$

$$\leq \int \underbrace{|f(t)|}_{p} e^{-t}\,dt \leq \left(\int |f(t)|^p\right)^{1/p} \underbrace{\left(\int (e^{-t})^{p'}\right)^{1/p'}}$$

to ok ha $p' \neq \infty$.

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-tp'}\right)^{1/p'} = \left[\left(-e^{-tp'}\frac{1}{p'}\right)\Big|_0^{\infty}\right]^{1/p'} = \left[\frac{1}{p'}\right]^{1/p'} = (p')^{-1/p'}$$

i.e. $p \neq 1$.

$$|\varphi(f)| \leq \|f\|_p \cdot (p')^{-1/p'} \qquad 1 < p \leq \infty$$

$$|\varphi(f)| \leq \|f\|_p \, \|e^{-t}\|_{\infty} = \|f\|_p \qquad \text{ha } p = 1.$$

$$|\varphi(f)| \le \|f\|_p \cdot (p')^{-1/p'} \qquad 1 < p \le \infty$$

$$|\varphi(f)| \le \|f\|_p \, \|e^{-t}\|_\infty = \|f\|_p \quad \text{dla } p=1.$$

Ustalmy $p \in [1, \infty]$. Ustalmy α i rozważmy funkcję

$$e^{-\alpha t} \qquad (\alpha \text{ jakoś zależy od } p).$$

$$\|e^{-\alpha t}\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\alpha t p} \, dt = \frac{1}{\alpha p}$$

$$\Rightarrow \|e^{-\alpha t}\|_p = \left(\frac{1}{\alpha p}\right)^{1/p}.$$

$$f = \frac{e^{-\alpha t}}{\|e^{-\alpha t}\|_p} \qquad \|e^{-\alpha t}\|_p = \left(\frac{1}{\alpha p}\right)^{1/p}.$$

$$\varphi(f) = \int \frac{e^{-\alpha t}}{\|e^{-\alpha t}\|_p} \cdot e^{-t}\, dt = \frac{1}{\|e^{-\alpha t}\|_p} \frac{1}{1+\alpha} = \left(\frac{1}{p'}\right)^{1/p'}$$

Czy istnieje α taka żeby tu była równość?

$$(1+\alpha) = (p')^{1/p'} (\alpha p)^{1/p}$$

$$\alpha = \frac{p'}{p}$$

$$(RHS) = (p')^{1/p'} (p')^{1/p} = p' \quad \text{bo } \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.$$

$$(LHS): \quad 1 + \frac{p'}{p} = p' \quad \text{bo } \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.$$