Kolokwium 2

- → tw. Hahna – Banacha (analityczne)
- → tw. Hahna – Banacha (geometryczne)
- → $(L^p)^* = L^q$, $(c_0)^* = \ell^1$ itd. utożsamienie.
- → bazy, układy ortonormalne.

1) Tw. Hahna-Banacha (w. analityczna):

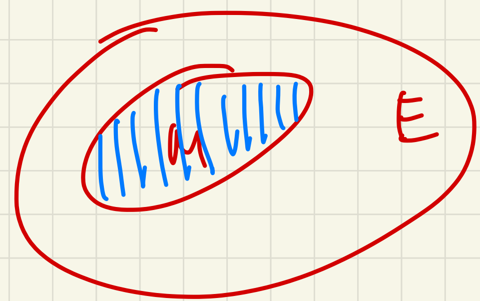
$(E, \|\cdot\|_E)$ - p. unormowana

$M \subset E$ podprzestrzeń

φ jest funkcjonałem ogr. na M $(\varphi \in M^*)$

$\Rightarrow$ istnieje przedłużenie $\tilde{\varphi}$ na całe E oraz

$$\|\tilde{\varphi}\|_{E^*} = \|\varphi\|_{M^*}.$$



Zad: $V = \{ a_2 x^2 + a_1 x : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$.

Funkcjonał na V $\quad F(v) = \int_0^1 \frac{v(x)}{x} \, dx$

1) Pok. że F jest ciągły i liniowy na V.

2) Pok. że F można przedłużyć do funkcjonału liniowego ciągłego na $C[0,1]$.

Rozw:

(1) Liniowy – ok. Ciągły (?)

Funkcjonał ciągły z def: tzn. $\|F\| < \infty$

$$\|F\| = \sup_{\|v\|_V = 1} |F(v)|$$

nie mamy zdef. normy na V

Możemy zdefiniować $\|v\|_V$ (w jakiś sposób):
Czy wynik zależy od tego wyboru normy?

Nie ma znaczenia bo przestrzeń V jest skończenie wymiarowa i wszystkie normy na V są sobie równoważne.

$$V = \{ a_1 x + a_2 x^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}.$$

$$\| v \|_V = \{ |a_1| + |a_2| \}$$

to jest norma bo:

- $\|v\|_V = 0 \iff v = 0$ ✓.
- $\|tv\|_V = |ta_1| + |ta_2| = |t|\,\|v\|_V$
- nierówność trójkąta analogicznie

$$\|F\| = \sup_{\|v\|_V \le 1} |F(v)| = \sup_{\|v\|_V \le 1} \int_0^1 \frac{a_1 x + a_2 x^2}{x}\,dx$$

$$\le \sup_{\|v\|_V \le 1} \int_0^1 |a_1 + a_2 x| \le \sup_{\|v\|_V \le 1} |a_1| + |a_2| \le 1.$$

Można inne normy

$$\|v\| := \sup_{x\in[0,1]} |v(x)|$$

$$\|F\| = \sup_{\|v\|\leq 1} |F(v)| = \sup_{\underbrace{\|v\|\leq 1}_{\|a_1x+a_2x^2\|_\infty\leq 1}} \left|\int_0^1 a_1 + a_2 x \right| dx$$

$$\leq \sup_{\|a_1x+a_2x^2\|_\infty\leq 1} |a_1| + |a_2|$$

$\leq$ (nie jest łatwe ale daje się to zrobić)

Ciągłość funkcjonału nie zależy od równoważności norm
(tzn. jak mam dwie normy równoważne to mogę liczyć normę względem dowolnej z nich)

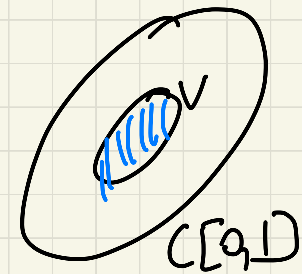
$\|v\|_1, \|v\|_2$ – równoważne

$\|F\|_1, \|F\|_2$ – normy operatorowe wzg $\|v\|_1, \|v\|_2$.

$$\|F\|_1 = \sup_v \frac{|F(v)|}{\|v\|_1} \leq \sup_v \frac{|F(v)|}{\|v\|_2} \cdot C \leq C\|F\|_2$$

(i analogicznie w drugą stronę).

(2) Można przedłużyć do $\varphi \in (C[0,1])^*$.



z tw. H-B (w. analityczna)

- $\varphi : V \longmapsto \mathbb{R}$
- φ jest ciągły, liniowy na V jako podprzestrzeni $C[0,1]$. z normą $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow$ wówczas istn. ciągłe, liniowe przedłużenie.

F jest ciągły na $(V, \|\cdot\|_V)$ $\quad \|v\|_V := |a_1| + |a_2|$

Potrzebujemy F jest ciągły na $(V, \|\cdot\|_\infty)$

$$|Fv| \leq C\|v\|_V \leq C\, C_{rów} \|v\|_\infty$$

Tutaj korzystamy z tego że $\|v\|_\infty$ też zadaje normę na V a wszystkie normy na sk. wym. przestrz. są sobie równoważne. Z tw. H-B wynika teza.

D.

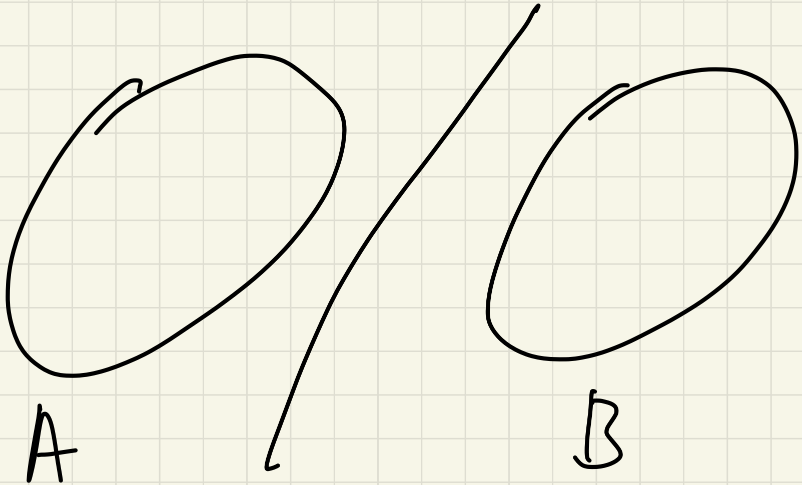
Własności p. skończenie wymiarowych.

- wszystkie normy są sobie równoważne
- kule są zwarte
- każda przestrzeń ma skończoną bazę.

($\Uparrow$ i Banach limit)

2) Tw. H-B (geometryczne)

$(E, \|\cdot\|)$ – p. unormowana



A, B – wypukłe, niepuste

- A domknięty
- B zwarty

$$\Rightarrow \underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\exists} \ \underset{\substack{\varphi \in E^* \\ \varphi \neq 0}}{\exists} \quad \sup_{a \in A} \varphi(a) < \lambda < \inf_{b \in B} \varphi(b).$$

ściśle separuje.

(2ga wersja: słabsza)

A – otwarty
B – dowolny

B, A wypukłe niepuste.

$$\exists_{\lambda} \ \exists_{\varphi \in E^*} \quad \varphi(a) < \lambda \leq \varphi(b)$$

(może się zdarzyć że $\sup\limits_{a \in A} \varphi(a) \leq \lambda \leq \inf\limits_{b \in A} \varphi(b)$).

nie musi być ścisłej separacji!

zad. na tw. geometryczne

C1. Let E be a normed space and $F \subset E$ be a linear subspace such that $\overline{F} \neq E$. Prove that there is $\varphi \in E^*$ such that $\varphi \neq 0$, $\|\varphi\| = 1$ and $\varphi(x) = 0$ for all $x \in F$.

C2. Let E be a normed space and $F \subset E$ be a linear subspace such that for all $\varphi \in E^*$

$$\forall_{x \in F}\ \varphi(x) = 0 \implies \varphi = 0.$$

Prove that F is dense in E.

C3. Let H be a Hilbert space and $M \subset H$ be its linear subspace. Prove that $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$. In particular, when M is closed, $(M^\perp)^\perp = M$.

~~**C4.** Let X be a vector space (not necessarily normed or Banach) over $\mathbb{R}$. Let $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ be linear functionals on $\mathbb{R}$ (i.e. linear maps from X to $\mathbb{R}$). Suppose that~~

$$\cancel{(\forall_{i=1,\ldots,k}\ \varphi_i(v) = 0)} \implies \varphi(v) = 0.$$

~~Prove that φ is a linear combination of $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, i.e. there are real numbers $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ such that $\varphi = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \varphi_n$.~~ *Hint:* Study $F(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x), \varphi(x))$.

~~**C5.** **(Riesz Lemma)** Let $(X, \|\cdot\|)$ be a normed space and $M \subset X$ a closed (strictly contained) subspace. Prove that for any $\alpha \in (0,1)$ there is $x \in X$ such that $\|x\| = 1$ and $\mathrm{dist}(x, M)$~~ $\geq \alpha$.

Zad. na tw. geometryczne

2. **(Mazur Lemma)** Let $C \subset E$ be a convex set. Prove that C is closed for convergence in norm if and only if C is closed for weak convergence. *Hint*: One implication is trivial, for another use geometric version Hahn-Banach.

Definitions:
C is closed for convergence in norm if for any $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset C$ such that $x_n \to x$ it follows that $x \in C$. This is exactly the same as statement that C is closed in E.
C is closed for weak convergence if for any $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset C$ such that $x_n \rightharpoonup x$ it follows that $x \in C$.

Losd. use thr. geometry one.

1. Let $I : L^2(0,1) \to \mathbb{R}$ be a (nonlinear!) function defined with

$$I(u) = \int_0^1 |u(x)|^{3/2} \cos^2(x)\, dx.$$

(A) Prove that I is continuous on $L^2(0,1)$.

(B) Prove that the set

$$\{(u,\lambda) \in L^2(0,1) \times \mathbb{R} : I(u) < \lambda\}$$

is open and convex.

(C) Fix $u \in L^2(0,1)$. Prove that there exists $v_u \in L^2(0,1)$ such that for all $w \in L^2(0,1)$ we have

$$I(u+w) \geq I(u) + \langle w, v_u \rangle.$$

What is v_u in the language of classical calculus for convex functions?

Remark: It is quite instructive to see why the version of Hahn-Banach theorem with compact/closed sets cannot be used here.

$F \subset E$, $\overline{F} \neq E$ ($\overline{F}$ jest ściśle zawarta w E)
podprzestrzeń

Pokaż że istnieje funkcjonał $\varphi \in E^*$ t. że $\varphi \neq 0$ i

$\varphi|_F = 0$.

Rozw: $\overline{F}$ – domknięta podprz. liniowa w E

$x_0 \in E \setminus \overline{F}$

2 tw. geom. $\exists_{\lambda} \exists_{\varphi \in E^*} \sup_{f \in \overline{F}} \varphi(f) < \lambda < \varphi(x_0)$

$$\exists_{\lambda} \ \exists_{\varphi \in E^*} \quad \underbrace{\sup_{f \in F} \varphi(f) < \lambda}_{} < \varphi(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$\varphi|_F = 0$ bo funkcjonał na PODPRZESTRZ

nie może być ograniczony

Finally, $0 < \lambda < \varphi(x_0)$ więc $\varphi \neq 0$.

$\square$.

POWRÓT 14:20.

3) Utożsamienia przestrzeni dualnych.

- $(L^p)^* = L^q \qquad 1 \le p < \infty$

każde $\varphi \in (L^p)^*$ jest postaci

$$\varphi(f) = \int_X f g \, d\mu(x). \quad (g \in L^q)$$

i to g jest wyznaczone jednoznacznie.

$$\|\varphi\|_{(L^p)^*} = \|g\|_{L^q}.$$

- $H^* = H$

każde $\varphi \in H^*$ zapisuje się jako

$$\varphi(h) = \langle h, x_\varphi \rangle \quad \text{dla pewnego } \underbrace{x_\varphi}_{\text{wyzn. jednoznacznie}}$$

$$\|\varphi\|_{H^*} = \|x_\varphi\|_H$$

- $(c_0)^* = \ell^1$ każde $\varphi \in (c_0)^*$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i, \quad y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^1$$

(A8 z PS6)

- $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$

$\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ $\qquad \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i$ dla pewnego $y \in \mathbb{R}^n$.

$\|\varphi\| = \|y\|$

A3. For $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ we define

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t)\, e^{-t}\, dt.$$

Find all p ($1 \le p \le \infty$) such that $\varphi \in (L^p(\mathbb{R}^+))^*$? For such p compute norm of φ as a functional on $L^p(\mathbb{R}^+)$.

$$\|\varphi\| = \sup_{f \in L^p} |\varphi(f)| = \dots$$

$1 \le p < \infty$ $\quad \|\varphi\|_{(L^p)^*} = \|e^{-t}\|_{L^{p'}}$

$p = \infty$ (liczymy ręcznie).

B5. Consider $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ with $1 \le p \le \infty$ and $1/p + 1/q = 1$. Prove that

$$\|f\|_p = \sup_{g \in L^q : \|g\|_q \le 1} \int_X f(x) g(x) d\mu(x),$$

$1 < p < \infty$

$$\|f\|_p \overset{(?)}{=} \sup_{g \in L^q, \|g\|_q \le 1} \underbrace{\int_X f(x)\, g(x)\, d\mu(x)}_{\varphi_f(g)}$$

$\varphi_f(g)$: φ_f jest funkcjonałem na L^q

jak $f \in L^p$

$$= \sup_{g \in L^q, \|g\|_q \le 1} \varphi_f(g) = \|\varphi_f\|_{(L^q)^*} = \|f\|_{L^p}.$$

$1 < p < \infty$

$$\|f\|_p \overset{(?)}{=} \sup_{g \in L^q,\ \|g\|_q \le 1} \underbrace{\int_X f(x)\, g(x)\, d\mu(x)}_{\varphi_f(g)\ :\ \varphi_f \text{ jest funkcjonałem na } L^q}$$

jak $f \in L^p$

$$= \sup_{g \in L^q,\ \|g\|_q \le 1} \varphi_f(g) = \|\varphi_f\|_{(L^q)^*} = \|f\|_{L^p}.$$

$1 \le q < \infty$

$\iff \underline{1 < p \le \infty}.$

2) ten argument powyżej działa dla $p=\infty$.

Co z $p=1$?

E - p. unormowana, E^* - p. dualna

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup_{\|x\|\leq 1} \varphi(x)$$

$$\|x\|_E = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \varphi(x)$$ (duality formula).

$$\|x\|_E = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \varphi(x)$$

$$E = L^1, \quad E^* = L^\infty$$

$$\|f\|_{L^1} = \sup_{\substack{\|\varphi\| \leq 1 \\ \varphi \in (L^1)^*}} \varphi(x) = \sup_{\substack{\|g\|_\infty \leq 1 \\ \varphi \in L^\infty}} \int f g \, d\mu(x)$$

$$(X \times \mathbb{R})^* =$$

$$\varphi \in (X \times \mathbb{R})^* \qquad \varphi(x,a) = \underbrace{\varphi(x,0)}_{\in X^*} + a\,\varphi(0,1)$$

$$\varphi(x,a) = f(x) + a \cdot c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$f \in X^*.$$

(A5).

4) Układy, bazy ortonormalne.

H – p. Hilberta

Układ ort. w H: $\{e_i\}_{i \in I}$ t. że $\|e_i\| = 1$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ dla $i \neq j$.

Baza ort. w H: maksymalny układ ort. w H.

(taki zawsze istnieje).

1) $\{e_i\}_{i\in I}$ jest bazą ort. $\iff H = \overline{\operatorname{span}\{e_i : i\in I\}}$

$\forall_{x\in H}$ istnieje ciąg $x_n \in \operatorname{span}\{e_i : i\in I\}$ $x_n \to x$ w H.

2) $\{e_i\}_{i\in I}$ układ ort: $\sum_{i\in I} (x,e_i)^2 \leq \|x\|^2$ (nier. Bessela)

$\Rightarrow (x,e_i) \to 0 \quad i\to\infty$.

3) $\{e_i\}_{i\in I}$ baza ort (tożsamość Parsevala)

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} (x,e_i)^2.$$

4) $\{e_i\}_{i\in I}$ jest bazą ort. H $\iff$

$$\{\langle x, e_i\rangle = 0 \implies x = 0\}$$

(Jak $\{e_i\}$ nie jest bazą to istnieje $x \perp e_i \ \forall_i$ takie że $x \neq 0$.)

Zadanie

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są układami ort. w H.

Zał. że $\{e_n\}$ jest bazą ort. w H oraz

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \| e_n - f_n \|^2 < 1.$$

Dowieść, że $\{f_n\}$ też jest bazą ort. w H.

Dow. Zał. że $\{f_n\}$ nie jest bazą. Wówczas istnieje

$x \perp\!\!\!\perp f_n$ ale $x \neq 0$.

$$\|x\|^2 = \sum (x, e_n)^2 = \sum (x, e_n - f_n)^2 \le$$

bo $(x, f_n) = 0$

$$\le \sum \|x\|^2 \|e_n - f_n\|^2$$

$$< \|x\|^2 \Rightarrow \text{sprzeczność.}$$

Przejrzeć zadanie:

1. (**criterion 1**) Prove that the orthonormal set $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ is actually the basis if and only if

$$\langle x, e_\alpha \rangle = 0 \text{ for all } \alpha \in \mathcal{A} \implies x = 0.$$

2. (**criterion 2**) Prove that the orthonormal set $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ is actually the basis if and only if

$$H = \overline{\operatorname{span}(e_\alpha : \alpha \in \mathcal{A})},$$

   where span is the space of all linear combinations.

3. Let $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be an orthonormal Schauder basis of $L^2(0,1)$. For given $t \in [0,1]$ compute:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^t x^3 f_n(x)\, dx \right|^2 .$$

4. Let $a_n = \int_0^{2\pi} t^2 e^{int}\, \mathrm{d}t$. Compute $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2$ and $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$.
5. Prove that if H is separable than it has a countable orthonormal basis.
6. Prove that separable infinite dimensional Hilbert space H is isometrically isomorphic to l^2.
7. ~~Consider Rademacher system: $r_0 = 1$ and $r_n = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi t))$. Prove that this is an orthogonal system but it is not an orthogonal basis of $L^2(0,1)$.~~
8. If $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ is an orthonomal set in H, for all $x \in H$ we have $\langle x, e_n \rangle \to 0$ when $n \to \infty$.

9. Let $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be an orthonormal set in Hilbert space H. Consider operator $T : H \to c_0$ defined with

$$Tx = \left(\frac{n}{n+1}\langle x, e_n\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Prove that T is well-defined. Is T a bounded linear operator? If yes, compute its norm.

10. If H is infinite dimensional, there is a sequence $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ such that $\|x_n\| = 1$ and $x_n \rightharpoonup 0$.[1]

11. Let $y \in l^\infty$, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is an orthonomal set in H and $u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i\, y_i$. Prove that $u_n \to 0$.

12. Let $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ be an orthonormal basis of H. Prove that

$$x_n \rightharpoonup x \text{ in } H \iff \langle x_n - x, e_\alpha\rangle \to 0 \text{ for all } \alpha \in \mathcal{A}.$$

+ własności rzutów, przestrzenie Hilberta, Zadanie $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, λ_n jest ograniczony

$\{e_n\}$ jest bazą ort. H

(A) Pokaż że istnieje dokładnie jeden operator liniowy

$$T e_n = \lambda_n e_n, \quad T \text{ ograniczony}$$

(B) Ile wynosi jego norma?

Rozw. Takie T jest jednoznacznie zdefiniowane

na $G := \operatorname{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ z liniowości.

$\overline{G} = H$ czyli G jest gęstą podprzestrzenią H.

$$x \in G \quad x = \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i \rangle e_i \qquad (N\text{-sk.})$$

$$\underbrace{Tx}_{\in H} = \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i \rangle \lambda_i e_i$$

$$\|Tx\| \leq \sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_i \rangle| \, \|\lambda\|_\infty = \|\lambda\|_\infty \overbrace{\sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_i \rangle|}^{\text{ten szereg nie musi być zbieżny}}$$

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \Big\langle \underline{\sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i\rangle \lambda_i e_i}, \underline{\sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i\rangle \lambda_i e_i} \Big\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 \langle x, e_i\rangle^2 \leq \|\lambda\|_\infty^2 \|x\|^2$$

z nier. Bessela

Zatem T jest ogr. na $(G, \|\cdot\|_H) \subset (H, \|\cdot\|_H)$ oraz $\overline{G} = H$. Z zał. domowego istnieje odpowiednie jedno przedłużenie na H.

Wiemy, że $\|Tx\| \le \|\lambda\|_\infty \|x\|$

$$\Rightarrow \|T\| \le \|\lambda\|_\infty$$

Wyst. pok. że $\|T\| = \|\lambda\|_\infty$.

Istnieje ciąg λ_{n_k} taki że $|\lambda_{n_k}| \nearrow \|\lambda\|_\infty$.

$x_k := e_{n_k}$ ← taki sam indeks co

$$Tx_k = \lambda_{n_k} e_{n_k} \Rightarrow \|Tx_k\| = |\lambda_{n_k}| \nearrow \|\lambda\|_\infty.$$

□.

4 | nad $\mathbb{C}$

$$a_n = \int_0^{2\pi} t^2 e^{int}\,dt = \int_0^{2\pi} e^{int}\,\overline{t^2}\,dt$$

$$= \langle e^{int}, t^2 \rangle_{L^2(0,2\pi)}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle e^{int}, t^2\rangle|^2 = \|t^2\|^2_{L^2(0,2\pi)}$$

tożsamość Parsevala

$\{e^{int}\}$ baza ON. w $L^2(0,2\pi)$

$$= \int_0^{2\pi} t^4\,dt = \dots$$

$\square$.

(WAŻNE)

$$\sum_{n\geq 1} |a_n|^2 \qquad \text{(NUDA)}$$

$k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, t^2\, dt = -\int_0^{-2\pi} e^{iku}\, u^2\, dt =$$

$u = -t$

$$= \int_{-2\pi}^{0} e^{iku}\, u^2\, du = \int_0^{2\pi} e^{iku}\, u^2\, du$$

okresowe co $(0, 2\pi)$