2. Definiujemy $T : c_0 \to c_0$ wzorem:

$$T(x) = \left(\frac{(-1)^n}{n} x_n\right)_{n=1}^{\infty} \quad \text{dla } x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0.$$

a) Wykazać, że $T \in B(c_0)$;

b) Sprawdzić czy T jest operatorem zwartym.

c) Znaleźć spektrum (widmo) $\sigma(T)$ operatora T.

$L(H, H)$

$L(H) = L(H, H)$

$B(E) = B(E, E) = L(E, E)$

$$Tx = \left(\frac{(-1)^n}{n} x_n \right) \qquad (x_n) \in c_0$$

1) $T \in L(c_0, c_0)$

- liniowym
- ograniczonym
- $c_0 \longmapsto c_0$

OK

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} x_n \right| \leq |x_n| \longrightarrow 0. \Rightarrow c_0 \longmapsto c_0$$

$$\|Tx\| = \sup_n \left| \frac{(-1)^n}{n} x_n \right| \leq \sup_n |x_n| = \|x\|$$

$\Rightarrow \|T\| \leq 1$ i $T \in L(c_0, c_0)$.

2) Czy <u>T jest zwarty</u>?

Jak (x^n) jest ograniczony w c_0 to z $(Tx^n)_{n\geq}$ można wybrać podciąg zbieżny.

$$\underbrace{T\underbrace{x^1}_{\in c_0}}_{\in c_0} = \overbrace{\left(\frac{(-1)^n}{n} x^1_n\right)}_{n\geq 0}$$

$$Tx^2 = \left(\frac{(-1)^n}{n} x^2_n\right)_{n\geq 0}$$

Próbujemy wybrać z $(Tx^n)_{n\geq 0}$ podciąg zbieżny w c_0 metodą przekątniową.

Niech M t. że $\|x^n\|_\infty \leq M$. Wówczas $\|Tx^n\|_\infty \leq M$.

$$y^n = Tx^n.$$

Niech $z^{(1)}$ podciąg $(Tx^n)_{n\geq 0}$ t. że ciągi pierwszych współrzędnych są zbieżne. $z^{(2)}$ podciąg $z^{(1)}$ t. że ciągi drugich wsp. są zbieżne. $z^{(k)}$ podciąg $z^{(k-1)}$ t. że ciągi k-tych wsp. są zbieżne.

OLEWAMY.

PRZYSZŁO ZBAWIENIE OD OLI ;)

$$Tx = \left(\frac{(-1)^n}{n} x_n \right)_{n \geq 0}.$$

$$T^{(k)} x = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n} x_n & n \leq k \\ 0 & n > k \end{cases}$$

$T^{(k)}$ jest zwarty.

T jest granicą $T^{(k)}$ w $\mathcal{L}(c_0, c_0)$.

$$\| T^{(k)} - T \|_{L(c_0, c_0)} = \sup_{\|x\|_{c_0} \leq 1} \| (T^{(k)} - T) x \|_{c_0}$$

$$= \sup_{\|x\|_{c_0} \leq 1} \sup_{n \geq k} \frac{1}{n} |x_n| \leq \frac{1}{k} \sup_{\|x\|_{c_0} \leq 1} |x_n|$$

$$= \frac{1}{k} \longrightarrow 0$$

przy $k \to \infty$.

zbiór operatorów zwartych
jest domknięty w $L(H,H)$:
jeżeli T_k zwarte i $T_k \to T$ w $L(H,H)$
to T też jest zwarty

- operatory całkowe, operatory mnożenia przez tw. spektralne

<u>Przykład:</u> $Mf(x) = g(x) f(x) \qquad L^2(\mathbb{R})$

$$Mf(x) = x\, f(x) \qquad \sigma(M) = [0,1]$$

- operatory na ciągach wygodnie z domkniętości operatorów zwartych w $L(H,H)$.

Dla operatora zwartego : $Te_i = i e_i$

- $0 \in \sigma(K)$
- wszystkie niezerowe są wartościami własnymi
- 0 jest jedynym (możliwym punktem skupienia)

Przykład: na $L^2(0,1)$ $(Tf)(x) = \int_0^x f(y)\,dy$.

On jest zwarty. $\Rightarrow 0 \in \sigma(K)$, nie ma wartości własnych
$\Rightarrow \sigma(K) = \{0\}$.

$$Tx = \left(\frac{(-1)^n}{n} x_n \right)_{n \geq 1}. \qquad T : c_0 \to c_0.$$

$$\sigma(T) = ?$$

T jest zwarty $\Rightarrow$ $0 \in \sigma(T)$.

Wektory, wartości własne $\quad Tx = \lambda x$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{(-1)^n}{n} - \lambda \right)}_{} x_n = 0 \quad \underset{n}{\forall} \quad \underset{x \neq 0.}{\exists}$$

$$\lambda = \frac{(-1)^n}{n}, \quad x = e_n$$

wektor jednostkowy

Niech $\lambda \neq \frac{(-1)^n}{n}$. $\Rightarrow$ Wtedy $x_n = 0$ $\forall_n$ czyli

nie ma innych wartości własnych.

Z tw. R-F wynika, że $\sigma(T) = \left\{0, \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n \geq 1}\right\}$.

Zasady. Proszę przedstawić do oceny jedynie **pięć** spośród sześciu zadań. Nie można posługiwać się notatkami, książkami, innymi pomocami, ani nie można komunikować się z innymi piszącymi czy światem zewnętrznym.

Iwona Chlebicka, Piotr Rybka, Jakub Skrzeczkowski

Zadanie 1. Rozważmy następujące przestrzenie:

$$X = C^1[0,1] \text{ z normą } \|f\|_X = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|,$$

$$Y = C^1[0,1] \text{ z normą } \|f\|_Y = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

1.1. Czy X, Y są przestrzeniami Banacha?
1.2. Niech $\varphi(f) = f'\left(\frac{1}{2}\right)$. Czy $\varphi \in X^*$? Czy $\varphi \in Y^*$?

Zadanie 2. Niech ciąg $\{f_n\} \subset L^2(0,1)$ zbiega słabo do $f \in L^2(0,1)$. Załóżmy, że

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_2 \le \|f\|_2.$$

Wykazać, że f_n zbiega do f w normie $L^2(0,1)$.

Zadanie 3. Załóżmy, że X i Y są przestrzeniami Banacha, zaś $T : X \to Y$ jest operatorem liniowym. Wykazać, że T jest ciągły wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $y^* \in Y^*$, $y^*(T)$ jest ciągłym funkcjonałem na X.

Zadanie 4. Niech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$. Skonstruować funkcję $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\to\mathbb{C})$ taką, że spełnione jest równanie

$$u(x) + \partial_1^4\partial_2^2\partial_3^2 u(x) + 4i\partial_1^2 u(x) + \partial_2^9 u(x) = f(x),$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^3$ i pochodne są zadane w notacji wskaźnikowej. Ile jest takich funkcji w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$?

Zadanie 5. Utożsamijmy $C[0,1]$ z domkniętą podprzestrzenią $L^\infty[0,1]$ i zdefiniujmy funkcjonał ϕ wzorem $\phi(f) = f(0)$. Pokazać, że istnieje $\Phi \in L^\infty[0,1]$ taki, że dla $f \in C[0,1]$ mamy $\Phi(f) = \phi(f)$ oraz $\|\Phi\| = \|\phi\|$. Czy istnieje funkcja $g \in L^1[0,1]$ taka, że dla każdej $f \in L^\infty[0,1]$ mamy $\Phi(f) = \int_0^1 g(x)f(x)\,dx$?

Zadanie 6. Załóżmy, że H jest przestrzenią Hilberta a operatory $P_i : H \to H$, $i = 1,\dots,n$ są rzutami ortogonalnymi. Wykazać, że $P = \sum_{i=1}^n P_i$ jest rzutem ortogonalnym wtedy i tylko wtedy, gdy $P_iP_j = 0 = P_jP_i$ dla $i \neq j$.

EGZAMIN

II TERMIN

Zadanie 1. Rozważmy następujące przestrzenie:

$$X = C^1[0,1] \text{ z normą } \|f\|_X = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|,$$

$$Y = C^1[0,1] \text{ z normą } \|f\|_Y = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

1.1. Czy X, Y są przestrzeniami Banacha?
1.2. Niech $\varphi(f) = f'\left(\frac{1}{2}\right)$. Czy $\varphi \in X^*$? Czy $\varphi \in Y^*$?

<u>Rozw:</u> Y jest, X nie jest

<u>1.1</u>: Niech $\{f_n\}$ ciąg Cauchy'ego w Y.

Wtedy $f_n(t)$, $f_n'(t)$ są zbieżne w $\|\cdot\|_\infty$

$\exists$ $\begin{matrix} f_n \longrightarrow f \\ f_n' \longrightarrow g \end{matrix}$ w $C[0,1]$.

- Chcemy $f' = g$ $\quad$ ($f \in C^1$ bo narazie $f \in C([0,1])$).
- Chcemy $f_n \to f$ w $C^1[0,1]$

$$f_n(t) = f_n(0) + \int_0^t f_n'(s)\,ds$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\,ds$$

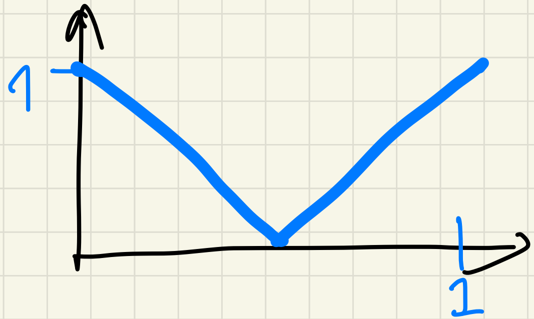
$\Rightarrow f \in C^1[0,1]$, $f' = g$.

$$\| f_n - f \|_{C^1[0,1]} = \| f_n - f \|_\infty + \| f_n' - g \|_\infty$$

$f' = g$

$$\longrightarrow 0, \text{ przy } n \to \infty.$$

1.2



$= f$

$\exists\, p_n$ wielomiany
$\| p_n - f \|_\infty \to 0.$
$p_n \in C^1[0,1].$

Gdyby $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ było p. Banacha to skoro $\|p_n - f\|_\infty \to 0$ to $\{p_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $C^1[0,1]$ $\left(\|p_n - p_m\|_\infty \leq \|p_n - f\|_\infty + \|p_m - f\|_\infty \right).$

Ale $p_n \to f$, $f \notin C^1[0,1].$

punktowo

zbieżność w normie $\|\cdot\|_\infty$

$$\|f\|_{C[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} x \, |f(x)|$$

(paskudny przykład).

1.2 (inaczej).

$(X, \|\cdot\|_1)$, $(X, \|\cdot\|_2)$ – p. Banacha

$$\exists_C \quad \|x\|_1 \leq C \|x\|_2$$

$\Rightarrow \exists_{\tilde{C}} \quad \|x\|_2 \leq \tilde{C} \|x\|_1 \Rightarrow$ normy są równoważne.

(wniosek z twierdzenia o odwzr. odwrotnym)

ciągła bijekcja ma ciągłą odwrotność na p. Banacha!

$$\left(C^1[0,1), \|\cdot\|_\infty\right)$$

$$\|f\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Gdyby Banacha $\quad \exists_C \quad \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \le C\|f\|_\infty$

$$\Rightarrow \|f'\|_\infty \le C\|f\|_\infty \qquad f_n = x^n$$

$$f_n = x^n \qquad \underbrace{\|n x^{n-1}\|_\infty}_{= n} \le C\|x^n\|_\infty = C$$

$$\Rightarrow n \le C \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}.$$

Czy $\varphi(f) = f'(1/2)$ $\in X^*$? $\in Y^*$?

$\|f\|_\infty$ $\qquad$ $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

Nie jest w X^* bo gdyby był

$$\exists_C \ \forall_f \ |\varphi(f)| \le C\|f\|_\infty$$

$$\exists_C \ \forall_f \ |f'(1/2)| \le C\|f\|_\infty$$

(...)

Zadanie 2. Niech ciąg $\{f_n\} \subset L^2(0,1)$ zbiega słabo do $f \in L^2(0,1)$. Załóżmy, że

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_2 \le \|f\|_2.$$

Wykazać, że f_n zbiega do f w normie $L^2(0,1)$.

$$f_n \rightharpoonup f \text{ w } L^2(0,1)$$
$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_2 \le \|f\|_2 \implies f_n \to f \text{ w } L^2(0,1).$$

<u>Rozw:</u> $\|f_n - f\|_2^2 = \langle f_n - f, f_n - f \rangle =$

$$= \langle f_n, f_n \rangle + \langle f, f \rangle - 2\langle f_n, f \rangle =$$

$$\|f_n - f\|_2^2 = \|f_n\|^2 + \|f\|^2 - 2\langle f_n, f\rangle$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 \le \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|^2}^{\le \|f\|^2} + \|f\|^2 + \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \left[-2\langle f_n, f\rangle\right]}_{= \lim_{n\to\infty} \left[-2\langle f_n, f\rangle\right] = -2\|f\|_2^2}$$

$$\le \|f\|^2 + \|f\|^2 - 2\|f\|_2^2 = 0.$$

in $L^2(0,1)$

$f_n \to f \Leftrightarrow \forall g \in L^2(0,1)$ $\langle f_n - f, g\rangle \to 0$. $g = f$.

$(\langle f_n, g\rangle \to \langle f, g\rangle)$.

Zadanie 3. Załóżmy, że X i Y są przestrzeniami Banacha, zaś $T : X \to Y$ jest operatorem liniowym. Wykazać, że T jest ciągły wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $y^* \in Y^*$, $y^*(T)$ jest ciągłym funkcjonałem na X.

T jest ciągły $\iff$ $\forall_{y^* \in Y^*}$ $y^*(T)$ jest ciągłym funkcjonałem na X.

$T: X \to Y$

"dla każdego punktu..." $\implies$ bd korzystać z tw. B–S

$y^* \circ T$ $\quad$ $y^*(\overbrace{Tx}^{\in Y}) \in \mathbb{K}$

Tw. B-S: X - p. Banacha, Y - p. unormowane

$\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ rodzina t. że $T_\alpha \in L(X,Y)$

i ponadto $\forall_x \sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha x\|_Y \leq C_x$

$$\Longrightarrow \exists_C \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha x\| \leq C$$

$$\Longleftrightarrow \exists_C \sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha\| \leq C.$$

T jest ciągły $\iff \forall_{y^* \in Y^*}$ $y^* \circ T$ jest ciągłym funkcjonałem na X.

$T : X \to Y$

$(\Rightarrow)$ $T : X \to Y$

$y^* : Y \to \mathbb{R}$ ciągły bo $y^* \in Y^*$

$\Rightarrow$ $y^* \circ T$ też jest ciągłe jako złożenie przekształceń.

$(\Leftarrow)$ $$\forall_{x} \sup_{\alpha \in A} \| T_\alpha x \|_Y \leq C_x$$

y^* $\quad \|x\| \leq 1$ $\quad (y^* \circ T)(x)$

Ponieważ $\varphi^* \circ T$ jest ciągłe na X

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} \varphi^* & \longmapsto & (\varphi^* \circ T)(x) \\ \cap & & \cap \\ Y^* & & \mathbb{R} \end{array}} \in Y^{**}$$

dla każdego x $\quad \varphi^* \longmapsto (\varphi^* \circ T)(x)$ jest ciągłe na Y^*.

$$|\varphi^*(Tx)| \leq \|\varphi^*\| \underbrace{\|Tx\|}_{<\infty} \quad C_x .$$

Chcemy stosować tw. B-S do operatorów

$$Y^* \ni y^* \longmapsto (y^* \circ T)(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} T: X \to Y \\ \forall_x \ Tx \in Y \end{array}}$$

te operatory są indeksowane $x \in X$, $\|x\| \leq 1$

Te operatory są ciągłe na $\mathcal{L}(Y^*, \mathbb{R})$ bo:

$$|(y^* \circ T)(x)| \leq \|y^*\| \, \|Tx\| \quad \text{dla ustalonego } x.$$

Aby z. 2 tw. B-S,

$$\forall_{y^* \in Y^*} \sup_{\|x\| \leq 1} |(y^* \circ T)(x)| \leq C_{y^*} = \|y^* \circ T\|$$

$$\forall_{y^* \in Y^*} \quad \sup_{\|x\| \le 1} |(y^* \circ T)(x)| \le C_{y^*} = \|y^* \circ T\|$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{\|y^*\| \le 1} \sup_{\|x\| \le 1} |(y^* \circ T)(x)| \le C \qquad \exists_{C}.$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{\|x\| \le 1} \underbrace{\sup_{\|y^*\| \le 1} |y^*(Tx)|}_{\|Tx\|} \le C \implies \overbrace{\sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\|}^{\|T\|.} \le C.$$

duality formula

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)| \quad \text{(definição)}$$

$$\|x\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|.$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_{n,k}| \leq \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} |b_{n_k}|}$$

$$|y^*(Tx)| = |y^*(Tx)|$$

$$|a_{n_k}| = |b_{n_k}|$$

$$\Downarrow$$

$$|a_{n_k}| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |b_{n_k}|$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_{n_k}| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |b_{n_k}|$$

Zadanie 4. Niech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$. Skonstruować funkcję $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\to\mathbb{C})$ taką, że spełnione jest równanie

$$\boxed{u(x)+\partial_1^4\partial_2^2\partial_3^2 u(x) + 4i\partial_1^2 u(x) + \partial_2^{\overset{7}{9}} u(x) = f(x),}$$

gdzie $x\in\mathbb{R}^3$ i pochodne są zadane w notacji wskaźnikowej. Ile jest takich funkcji w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$?

POWRÓT DO 14...

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$ = niesk. wiele razy różniczk. szybko znikające w niesk (znikające szybciej niż dowolny wielomian).

razem z pochodnymi.

$$u(x) + \partial_1^4 \partial_2^2 \partial_3^2 u(x) + 4i\,\partial_1^2 u(x) + \partial_2^9 u = f$$

$$\hat{u}(\xi) + (2\pi i)^8 \xi_1^4 \xi_2^2 \xi_3^2 \hat{u}(\xi) + 4i\,(2\pi i)^2 \xi_1^2 \hat{u}(x) + (2\pi i)^9 \xi_2^9 \hat{u}(\xi)$$

$$= \hat{f}(\xi)$$

$$\widehat{\partial_i u(x)} = (2\pi i \xi_i)\,\hat{u}(\xi)$$

$$\hat{u}(\xi) + (2\pi i)^8 \xi_1^4 \xi_2^2 \xi_3^2 \hat{u}(\xi) + 4i(2\pi i)^2 \xi_1^2 \hat{u}(x) + (2\pi i)^9 \xi_2^9 \hat{u}(\xi)$$

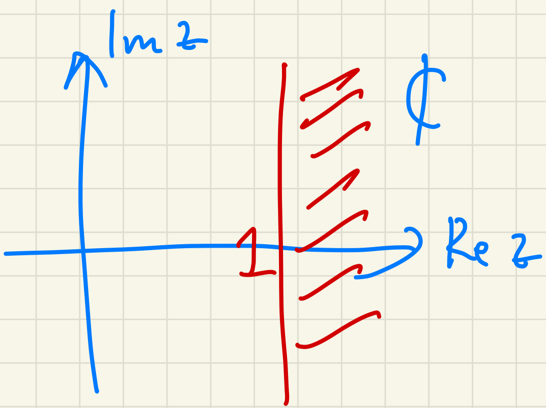
$$= \hat{f}(\xi)$$

$$\hat{u}(\xi)\left[1 + (2\pi)^8 \xi_1^4 \xi_2^2 \xi_3^2 - 4(2\pi)^2 i \xi_1^2 + i(2\pi)^9 \xi_2^9\right] = \hat{f}(\xi)$$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi).}{1 + (2\pi)^8 \xi_1^4 \xi_2^2 \xi_3^2 + i\left[(2\pi)^9 \xi_2^9 - 4\cdot(2\pi)^2 \xi_1^2\right]}$$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{\underbrace{\underbrace{1+(2\pi)^8\xi_1^4\xi_2^2\xi_3^2}_{\geq 1} + i\underbrace{\left[(2\pi)^9\xi_2^9 - 4\cdot(2\pi)^2\xi_1^2\right]}_{\text{lata}}}_{=\,p(\xi)}}$$

$$|p(\xi)| \geq 1.$$



$$f \in S(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \hat{f} \in S(\mathbb{R}^3)$$

$$\Rightarrow \hat{u} := \frac{\hat{f}}{p} \in S(\mathbb{R}^3).$$

$$\Rightarrow u := \left(\frac{\hat{f}}{p}\right)^{\vee} \in \underline{S(\mathbb{R}^3)}.$$

transformata Fouriera to bijekcja na $S(\mathbb{R}^3)$.

Agitujemy, że $u = \left(\frac{\hat{f}}{p}\right)^{\vee}$ spełnia równanie powyżej.

Ile jest takich $u \in S(\mathbb{R}^3)$?

Jedna bo: gdyby nie, to istniałyby $u_1, u_2 \in S(\mathbb{R}^3)$.

rozważamy różnicę $\tilde{u} = u_1 - u_2 \in S(\mathbb{R}^3)$

$$\tilde{u}(x) + \partial_1^4 \partial_2^2 \partial_3^2 \tilde{u}(x) + 4i\,\partial_1^2 \tilde{u}(x) + \partial_2^9 \tilde{u} = 0$$

$\Downarrow$

Stosujemy TF $\Rightarrow$ $\tilde{u} = \left(\dfrac{0}{P}\right)^{\vee} = 0 \Rightarrow u_1 = u_2.$

$$T:\ f \longmapsto u_f$$

po prawej stronie

rozwiązanie

Bez jednoznaczności ten operator nie jest dobrze zdefiniowany.

Zadanie 5. Utożsamijmy $C[0,1]$ z domkniętą podprzestrzenią $L^\infty[0,1]$ i zdefiniujmy funkcjonał ϕ wzorem $\phi(f) = f(0)$. Pokazać, że istnieje $\Phi \in (L^\infty[0,1])^*$ taki, że dla $f \in C[0,1]$ mamy $\Phi(f) = \phi(f)$ oraz $\|\Phi\| = \|\phi\|$. Czy istnieje funkcja $g \in L^1[0,1]$ taka, że dla każdej $f \in L^\infty[0,1]$ mamy $\Phi(f) = \int_0^1 g(x)f(x)\,dx$?

$$C[0,1] \subset L^\infty[0,1)$$

$$\phi(f) = f(0) \quad \text{na } f \in C[0,1].$$

1) Pokazać że istnieje $\Phi \in (L^\infty(0,1))^*$ taki, że $\forall_{f \in C[0,1]}$

$$\phi(f) = \Phi(f), \quad \|\Phi\| = \|\phi\|.$$

Wersja analityczna tw. H–B

$M \subset X$, $\varphi \in (M, \|\cdot\|_X)^*$. Wówczas istnieje przedłużenie na $(X, \|\cdot\|_X)^*$, $\|\varphi\| = \|\tilde{\varphi}\|$.

$\tilde{\varphi}$

$M = C[0,1]$

$\forall_{f \in C[0,1]} \quad \varphi(f) = f(0)$

$\uparrow$ liniowy

Chcemy $|\varphi(f)| \leq |f(0)| \leq \|f\|_\infty$.

Teza wynika z tw. H–B.

2) Czy istnieje $g \in L^1(0,1)$ takie, że dla każdego $f \in L^\infty(0,1)$:

$$\underline{\Phi}(f) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

$$(L^p)^* = L^q \quad \forall_{1 \le p < \infty}$$

$p = \infty$.

Patrz też:

B7. Prove that the map $\Phi : l^1 \to (l^\infty)^*$ given with $(\Phi(x))(y) = \sum_{i=1}^\infty x_i\, y_i$ is well-defined (i.e. $\Phi(x) \in (l^\infty)^*$ for all $x \in l^1$) but Φ is not surjective.
Remark: Roughly speaking, we say that $l^1 \subset (l^\infty)^*$ but $l^1 \neq (l^\infty)^*$.

Chcemy $g \in L^1(0,1)$ t. że $\forall_{f \in L^\infty(0,1)}$

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

Chcemy wydusić sprzeczność: nie ma takiej g.

Gdyby była

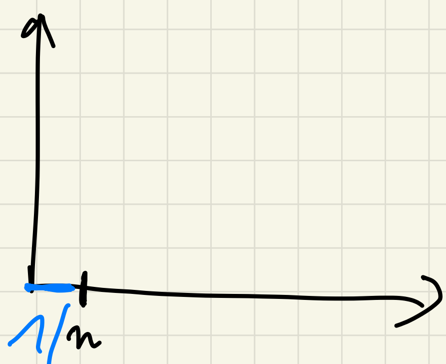
$\forall_{f \in C([0,1])}$

$$f(0) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

$$\forall_{f \in C[0,1]} \quad \underbrace{f(0) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx}$$

Intuicyjnie g musiałaby być "delta Diraca"

$f \in L^1(0,1)$ $\quad\Rightarrow\quad g = 0.$



$$f = \mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, 1]} \operatorname{sgn} g(x)$$

$$f(0) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

$$f = \mathbb{1}_{(\frac{1}{n}, 1)} \operatorname{sgn} g$$

$$0 = \int_{1/n}^{1} |g|\, dx \Rightarrow g = 0 \text{ na } \left(\tfrac{1}{n}, 1\right).$$

(to rozwiązanie złe bo $f \notin C([0,1])$.)

Poprawne rozwiązanie:

ma nośnik w $B(0,\varepsilon)$

$$f_\varepsilon = \left(\mathbb{1}_{(1/n,1)} \operatorname{sgn} g\right) * \eta_\varepsilon$$

$\in C([0,1])$

$\Rightarrow$ ma nośnik (nie zeruje się)

$(1/n-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$

(ε musi być $< 1/100n$)

$$\operatorname{supp}(f*g) = \operatorname{supp}(f)+\operatorname{supp}(g).$$

$$\int \underbrace{f(x)}_{x\in \operatorname{supp} f}\, g(\underbrace{x-y}_{x-y\in \operatorname{supp} g})$$

$y \in \operatorname{supp} g + \operatorname{supp} f.$

$$\forall_{f \in C[0,1]} \quad f(0) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \qquad g \in L^1(0,1)$$

$$f := f^{\varepsilon}$$

$$f^{\varepsilon}(0) = 0 = \int_0^1 f^{\varepsilon}(x)\, g(x)\, dx$$

Chcemy $\varepsilon \to 0$.

1) $f^{\varepsilon}(x) \longrightarrow f(x)$ p.w.

2) $f \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$ $\quad f^{\varepsilon} \to f$ w L^p

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \qquad 1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

$$\|f^\varepsilon\|_\infty \leq \underbrace{\|\eta_\varepsilon\|_1}_{=1} \underbrace{\|\mathbb{1}_{(1/n,1)} \operatorname{sgn} g\|_\infty}_{\leq 1} = 1.$$

$$f_\varepsilon = \left(\mathbb{1}_{(1/n,1)} \operatorname{sgn} g\right) * \eta_\varepsilon$$

$$\int_0^1 f^\varepsilon g \, dx \longrightarrow \int_0^1 f g \, dx \qquad g \in L^1(0,1),$$

$f^\varepsilon g \to f g$ punktowo

$|f^\varepsilon g| \leq |g| \in L^1(0,1)$

z tw. o zbieżności zmajoryzowanej.

$$0 = \int_0^1 \mathbb{1}_{(1/n,1)}(x) \operatorname{sgn} g(x) \cdot g(x) \, dx$$

$$= \int_{1/n}^1 |g(x)| \Rightarrow g(x) = 0 \text{ na } \left(\tfrac{1}{n}, 1\right)$$

$\Rightarrow g = 0$ p-w.

$$\boxed{\text{Chcemy } g \in L^1(0,1) \text{ t. że } \forall_{f \in L^\infty(0,1)} \quad \Phi(f) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx}$$

Gdyby istniała takie g to wiemy, że $g = 0$.

$$\Phi(1) = \phi(1) = 1$$

$$\neq$$

$$\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = 0$$