Wzorcowe rozwiązanie do zadań 1, 4, 5.

Kuba Skrzeczkowski

ZADANIE 1

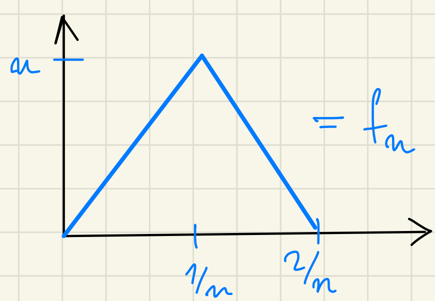
Sprawdzenie że dwydwie przestrzenie są unormowane jest typowe i nie sprawiło nikomu problemów. Problemy były z zupełnością.

Zupełność przestrzeni X: Przestrzeń X nie jest zupełna.

Najprostszy argument wykorzystuje wniosek z tw. o funkcji odwrotnej: jeżeli przestrzeń liniowa Z jest p. Banacha z normami $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ i mamy $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ to mamy też $\|x\|_2 \leq \tilde{C}\|x\|_1$ dla pewnej stałej $\tilde{C}$.

W tym zadaniu mamy $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, która jest p. Banacha oraz $\|f\|_X \leq 3\|f\|_\infty$. Gdyby więc $(C[0,1], \|\cdot\|_X)$ była p. Banacha to $\exists_C \ \|f\|_\infty \leq C\|f\|_X$.

Rozważmy f_n zadane na rysunku. Mamy $\|f_n\|_\infty = n$

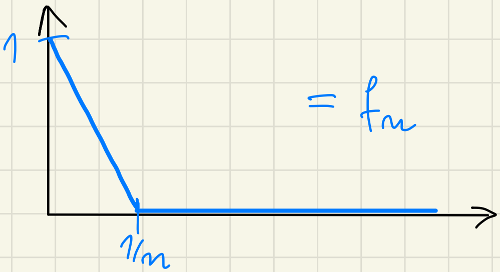


oraz $\|f_n\|_X = \sup_{x \in [0, \frac{2}{n}]} |f_n(x)| \cdot x$

$\leq \frac{2}{n} \cdot n = 2$. Zatem

$n \leq 2C \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$ co prowadzi do sprzeczności.

Inny argument pojawiający się w pracach był bardziej explicite i bazował na bezpośredniej konstrukcji ciągu Cauchy'ego który nie ma granicy w X. Niech f_n będą jak na rysunku. Mamy



$$\|f_n - f_m\|_X = \sup_X x\, |f_n(x) - f_m(x)|$$

bo $f_n(0) = f_m(0) = 1$. Ponadto, $|f_n|, |f_m| \leq 1$ i te funkcje różnią jedynie na przedziale $[0, 1/\min(m,n)]$. Zatem

$$\|f_n - f_m\|_X \leq 1/\min(m,n) \cdot 2 \leq \frac{2}{\min(m,n)}$$

co dowodzi że $\{f_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w X. By pokazać, że $\{f_n\}$ nie ma granicy w X zauważmy, że gdyby $\exists_{f \in X}$ $f_n \to f$ w X to $f_n(t) \to f(t)$ (punktowo) dla każdego $t \in [0,1]$.

Istotnie, dla $t = 0$ mamy $|f_n(0) - f(0)| \leq \|f_n - f\|_X \to 0$.

Dalej, dla $t \in (0,1]$ mamy z definicji normy

$$|f_n(t) - f(t)| \leq |(f_n(t) - f_n(0)) - (f(t) - f(0))| + |f_n(0) - f(0)|$$

$$\leq \frac{t\, |(f_n(t) - f_n(0)) - (f(t) - f(0))|}{t} + |f_n(0) - f(0)|$$

$$\Rightarrow |f_n(t)-f(t)| \le \frac{\|f_n-f\|_X}{t} + |f_n(0)-f(0)| \to 0$$

gdy $n \to \infty$.

Natomiast ciąg funkcji $\{f_n\}_n$ zbiega punktowo do funkcji, która nie jest ciągła. Z jednoznaczności granicy punktowej dostajemy sprzeczność.

UWAGA: Nie jest prawdą, że zbieżność w każdej normie na $C[0,1]$ implikuje zbieżność punktową. Na przykład,

$$\|f\| := \sup_{x\in[0,1]} x\,|f(x)|$$

Ciąg $\{f_n\}$ j.w. **jest zbieżny** w tej normie do zera bo $\|f_n\| \le \frac{1}{n}$ ale f_n nie zbiega punktowo do zera. Dlatego ciąłem punkty za wykorzystanie w tym zadaniu zbieżności punktowej bez żadnego komentarza.

Zupełność przestrzeni Y: najprościej było zauważyć, że norma $\|\cdot\|_Y$ jest równoważna normie L^1:

$$\int_{-1}^{1} |f| \le \int_{-1}^{1} |f|\,(1+t^2) \le 2\int_{-1}^{1} |f|$$

więc skoro L^1 jest zupełna to Y też jest zupełna.

Inne rozwiązanie zapisuje Y jako przestrzeń $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ dla $X = (-1,1)$, $\mu = \lambda(1+t^2)$. To okiota ale tu jest mały detal. Mianowicie,

$$L^p(X, \mathcal{F}, \mu) := \left\{ f \text{ mierzalne} : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\},$$

natomiast przestrzeń w zadaniu była dana jako

$$Y = \left\{ f \in L^1(-1,1) : \int_{-1}^{1} |f| (1+t^2) \, dt < \infty \right\}.$$

Trzebaby zastąpić $f \in L^1(-1,1)$ przez f mierzalne ale to jest niemal trywialne bo $\int_{-1}^{1} |f| (1+t^2) \, dt < \infty$ implikuje $\int_{-1}^{1} |f| < \infty$.

$\square$

ZADANIE 4

$$A = \{f \in C[0,1] : \|f\|_\infty \le 1\}$$

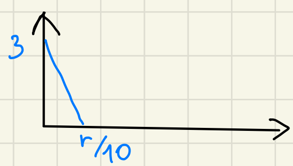
(A) Domkniętość A: niech $\{f_n\} \subset A$, $f_n \to f$ (tzn. $\int_0^1 |f_n - f| \to 0$) gdzie $f \in C[0,1]$. Chcemy $f \in A$. Skoro $f_n \to f$ w $L^1(0,1)$ to f_n ma podciąg zbieżny p.w. na $[0,1]$ co dowodzi że $|f(x)| \le 1$ p.w. Ale f jest ciągła więc $|f(x)| \le 1 \ \forall_x \Rightarrow f \in A$. □.

Inne rozwiązanie: można to zrobić też na palcach. Bsog $\exists_{t_0}$ $f(t_0) > 1$. Z ciągłości mamy przedział $I \ni t_0$ taki że $f(t) > 1+\delta$ dla $t \in I$. Stąd

$$0 \leftarrow \int_0^1 |f_n - f| \ge \int_I |f_n - f| \ge \lambda(I) \cdot \delta$$

bo $|f_n| \le 1$. Sprzeczność.

(B) Brzegowość A: niech $f \in A$. Załóżmy, że pewna kula $B(f, r)$ (kula w sensie normy L^1 jak w zadaniu) zawiera się w A. Rozważmy $h(t)$ dane na rysunku



Wówczas $f+h \in B(f,r)$ bo

$$\int_0^1 |f+h-f| = \int_0^1 |h| = \frac{3r}{20} < r$$

ale $f+h \notin A$ bo $|f| \leq 1$ a h przyjmuje wartość 3.

$\square$.

UWAGA: Tu kilka osób myliło kule w normie L^2 kulami w normie supremum. Sugeruję żeby pisać wyraźnie względem jakiej normy konstruujemy kulę.
Podobnie: gdy mowa ze jakiś ciąg zbiega trzeba napisać w czym lub jak (punktowo, w przestrzeni X, prawie wszędzie itd).

ZADANIE 5.

Skoro G jest domknięta w H to można zdefiniować rzut $P_G: H \to G$. Wiemy, że $\|P_G\| = 1$. Wówczas szukany operator to $T = S \circ P_G$. Z jednej strony mamy $\|T\| \leq \|S\| \, \|P_G\| \leq \|S\|$. Z drugiej strony

$$\|S\|_{\mathcal{L}(G,F)} = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in G}} \|Sx\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in G}} \|Tx\| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in H}} \|Tx\| = \|T\|$$

(Innymi słowy, skoro T jest przedłużeniem S to jego norma może być tylko większa). $\square$.

UWAGA: Założenie, że G jest domknięta nie było tu potrzebne. Gdyby G nie była domknięta to można by wpierw przedłużyć S z G do $\overline{G}$ (bo G jest gęste w $\overline{G}$) a potem zastosować rozwiązanie powyżej dla $\overline{G}$.