Wzorcowe rozwiązania do zadań 2, 3

Kuba
Skrzeczkowski

ZADANIE 2

Skoro F jest skończenie wymiarowa to ma bazę $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ i $\forall_{x \in F}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \quad , \quad a_i \in \mathbb{K}$$

Definiujemy $\varphi_i : F \to \mathbb{K}$ wzorem

$$\varphi_i(x) = a_i .$$

Takie φ_i są ciągłe na $(F, \|\cdot\|_E)$. Istotnie, wzór $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ zadaje normę na F i mamy

$$\sup_{\|x\|_1 \leq 1} |\varphi_j(x)| = \sup_{\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq 1} |a_j| \leq 1$$

czyli φ_j jest ciągły na $(F, \|\cdot\|_1)$. Jednakże na skończenie wymiarowych przestrzeniach normy są równoważne więc φ_j jest też ciągłe na $(F, \|\cdot\|_E)$.

Z tw. H-B φ_j można przedłużyć do $\tilde{\varphi}_j \in E^*$.

Sprawdzamy, że $\tilde{\varphi}_j$ spełniają warunki zadania.
Niech $x \neq 0$, $x \in F$. Wtedy $\tilde{\varphi}_j(x) = \varphi_j(x)$. Zatem

$$0 = \varphi_j(x) \Rightarrow a_j = 0 \quad \forall_{j=1,\dots,n} \Rightarrow x = 0.$$

Sprzeczność. $\blacksquare$

Komentarze:

(1) Ciągłość $\varphi_j : F \to \mathbb{K}$ można też było argumentować mówiąc że każdy funkcjonał na sk. wym. przestrzeni jest ciągły (dowód jest taki jak powyżej).

(2) Część osób ciągłość takiego rzutu na wektor bazowy uznawała za oczywistą. To jest jasne w przestrzeniach Hilberta (bo $|\langle x, e_i \rangle| \leq \|x\|$). Natomiast w przestrzeniach Banacha tak być nie musi. Klasyczny przykład to wielomiany na $[0,1]$

z normą $\|\cdot\|_1$ i.e. $(P[0,1], \|\cdot\|_1)$. Definiujemy

$$\varphi_0(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = a_0.$$

Wówczas $(x-1)^n \longrightarrow 0$ w $\|\cdot\|_1$ z tw. o zbieżności zmajoryzowanej ale $\varphi_0((x-1)^n)$ skacze między -1 i 1 więc φ_0 nie jest ciągłe w zerze.

(3) Były osoby próbujące robić rozkład na sumę prostą $E = F \oplus G$ dla pewnej domkniętej przestrzeni G. To jest ponownie własność p. Hilberta (wtedy $G = F^{\perp}$). Ogólnie, w przestrzeniach Banacha się tego zrobić nie da: klasyczny przykład to c_0 jako domknięta podprzestrzeń ℓ^{∞}. Można to przeczytać tutaj:

https://math.stackexchange.com/questions/132520/complement-of-c-0-in-ell-infty

Inna sprawa, że wnioskiem z tego zadania jest to że dla F skończenie wymiarowych taki rozkład istnieje. Bierzemy $G = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i)$.

ZADANIE 3

Mamy do pokazania dwa zawierania.

1) $F \subseteq (F^\circ)^\Delta$. Niech $x \in F$. Mamy spr. że

$$\varphi(x) = 0 \quad \forall_{\varphi \in F^\circ}$$

Ale F° to zbiór takich φ znikających na F więc $\varphi(x) = 0 \quad \forall_{\varphi \in F^\circ}$.

2) $F \supseteq (F^\circ)^\Delta$. Załóżmy, że istnieje $x \in (F^\circ)^\Delta$ ale $x \notin F$. To standardowy setting do zastosowania geometrycznej wersji tw. H-B do zbiorów:

(A) F – domknięta, wypukła (bo podprzestrzeń), niepusta

(B) $\{x\}$ – zwarty, wypukły, niepusty.

Zatem, istnieje $\varphi \in E^*$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\sup_{y \in F} \varphi(y) < \lambda < \varphi(x) \qquad (*)$$

Ponieważ F jest podprzestrzenią liniową to warunek $\sup\limits_{y \in F} \varphi(y) < \lambda$ implikuje $\varphi|_F = 0$ (funkcjonał liniowy nie może być ograniczony na podprzestrzeni liniowej bo inaczej można go zawsze skalować).

Zatem $(*)$ daje $0 < \lambda < \varphi(x)$ oraz $\varphi|_F = 0$.
Czyli $\varphi \in F^{\circ}$ więc $\varphi(x) = 0$ bo $x \in (F^{\circ})^{\Delta}$.
Sprzeczność z $\varphi|_F = 0$.

Komentarze:

(1) Gdy F nie jest domknięta to ten sam dowód pokazuje że $(F^{\circ})^{\Delta} = \overline{F}$.

(2) Na to zadanie należy patrzeć jak na uogólnienie dobrze znanego faktu z p. Hilberta.
Gdy $M \subset \mathcal{H}$ podprzestrzeń to $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$.
(Z tw. Riesza o reprezentacji mamy $M^{\circ} = M^{\perp}$)