Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Karol Hajduk
Nr albumu: 277842

Twierdzenia o stabilności i zbieżności przybliżeń Galerkinowskich w trójwymiarowych równaniach Naviera-Stokesa

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA
w zakresie MATEMATYKI STOSOWANEJ

Praca wykonana pod kierunkiem
dra hab. Witolda Sadowskiego
Zakład Równań Fizyki Matematycznej

Czerwiec 2014

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data   Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data   Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W pracy przedstawiono niektóre klasyczne wyniki dotyczące równań Naviera-Stokesa w trzech wymiarach przestrzennych: lokalne istnienie i jednoznaczność silnych rozwiązań oraz globalne istnienie silnych rozwiązań dla małych danych początkowych. Ponadto przedstawiono nowsze rezultaty dotyczące stabilności silnych rozwiązań i zbieżności przybliżeń Galerkinowskich. Jako przykład zastosowania tych rezultatów zaprezentowano twierdzenie dotyczące numerycznej weryfikacji regularności w równaniach Naviera-Stokesa. Następnie część z tych wyników została przeniesiona na równania Brinkmana-Forchheimera z konwekcją. W szczególności udowodniono dla nich klasyczne wyniki dotyczące silnych rozwiązań: lokalne istnienie i jednoznaczność oraz globalne istnienie dla małych danych. Udowodniono również twierdzenie o stabilności regularności dla tych równań, co jest głównym nowym rezultatem zawartym w niniejszej pracy.

Słowa kluczowe

równania Naviera-Stokesa, przybliżenia Galerkinowskie, stabilność regularności, równania Brinkmana-Forchheimera z konwekcją

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

35Q30 Navier-Stokes equations
35Q35 PDEs in connection with fluid mechanics
76D03 Existence, uniqueness, and regularity theory
76D05 Navier-Stokes equations
76S05 Flows in porous media; filtration; seepage

Tytuł pracy w języku angielskim

Robustness of regularity and convergence of Galerkin approximations in 3D Navier-Stokes equations

Spis treści

Wprowadzenie

W pracy zajmujemy się klasycznym modelem hydrodynamiki opisującym ruch lepkich, nieściśliwych płynów w trzech wymiarach przestrzennych. Są to równania Naviera-Stokesa (będziemy używać skrótu NS) następującej postaci :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + (u \cdot \nabla)\, u + \nabla p = f, \\ \hfill \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)$ jest szukanym polem prędkości płynu, $p(x,t)$ - szukanym ciśnieniem, zaś pole $f(x,t) = (f_1, f_2, f_3)$ to dane siły zewnętrzne działające na płyn. Stała μ to dodatni współczynnik lepkości płynu. W całej pracy zakładamy, że płyn ma stałą gęstość równą jeden oraz jest nieściśliwy (warunek bezdywergentności).

Model ten jest znany już od ponad 150 lat. Mimo tego, że ma on wiele praktycznych zastosowań w inżynierii i życiu codziennym, kwestia istnienia globalnych w czasie i regularnych rozwiązań równań Naviera-Stokesa w trzech wymiarach przestrzennych pozostaje nadal problemem otwartym. Jak powszechnie wiadomo, problem ten znalazł się na liście siedmiu Problemów Milenijnych Instytutu Matematycznego Claya.

W niniejszej pracy rozważamy również inny model hydrodynamiki, którego używa się do opisu ruchu płynów w nasyconych ośrodkach porowatych z uwzględnienienim konwekcji płynu. W literaturze istnieją dwie konwencje patrzenia na ten model. Powstaje on albo poprzez dodanie do równań Naviera-Stokesa dodatkowego składnika $(\alpha u + \beta\, |u|\, u)$, albo poprzez dodanie członu konwekcyjnego $(u \cdot \nabla)\, u$ do modelu Brinkmana-Forchheimera. Więcej informacji na temat równań Brinkmana-Forchheimera znaleźć można np. w pracach [CKU], [KZ]. W pracy nazywać będziemy ten model równaniami Brinkmana-Forchheimera z konwekcją (w skrócie CBF). Równania te mają następującą postać:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + (u \cdot \nabla)\, u + \nabla p + \alpha u + \beta\, |u|\, u = f, \\ \hfill \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie funkcje u, p i f oraz stała μ są takie jak w przypadku równań (1). Stała μ jest nazywana w przypadku równań (2) współczynnikiem Brinkmana (lub efektywną lepkością). Natomiast dodatnie stałe α i β oznaczają kolejno współczynnik Darcy'ego (lepkość podzielona przez przepuszczalność) oraz współczynnik Forchheimera (porowatość materiału).

Celem tej pracy jest badanie stabilności silnych rozwiązań dla obu powyższych modeli w kontekście zbieżności przybliżeń Galerkinowskich. Najpierw prezentujemy znane twierdzenia dotyczące stabilności i zbieżności przybliżeń Galerkinowskich w modelu (1), a następnie pokazujemy jak można te idee zastosować do wykazania twierdzenia o stabilności regularności w modelu (2). Wyniki uzyskane przez autora oznaczone są skrótem **KH** zarówno przy sformułowaniach twierdzeń, jak i przy ich dowodach.

Praca podzielona jest na cztery główne części. W pierwszym rozdziale wprowadzamy przestrzenie funkcyjne oraz operatory używane w dalszej części pracy. Wprowadzamy również interesujące nas równania i niezbędne składniki potrzebne do klasycznego dowodu istnienia słabych rozwiązań równań Naviera-Stokesa za pomocą metody Galerkina.

W rozdziale drugim zajmujemy się wynikami dotyczącymi istnienia i jednoznaczności silnych rozwiązań równań Naviera-Stokesa. Pokazujemy lokalne w czasie istnienie silnych rozwiązań oraz ich jednoznaczność, jak również globalne istnienie silnych rozwiązań dla małych danych początkowych. Ponadto, przenosimy te klasyczne rezultaty na równania Brinkmana-Forchheimera z konwekcją. Te wyniki, według najlepszej wiedzy autora, nie były do tej pory znane i prezentowane w literaturze.

W trzecim rozdziale przedstawiamy twierdzenie dotyczące stabilności silnych rozwiązań dla równań Naviera-Stokesa. Następnie dowodzimy analogiczne twierdzenie dla równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją, przy użyciu wcześniej sformułowanego lematu dotyczącego nierówności różniczkowych. Zarówno lemat 4.0.2, jak i twierdzenie 4.2.1, zgodnie z wiedzą autora, również są rezultatami nowymi i nie prezentowanymi wszeŚniej w literaturze przedmiotu. Stanowią one główny nowy wynik niniejszej pracy.

Na koniec, w rozdziale czwartym prezentujemy twierdzenie o zbieżności przybliżeń Galerkinowskich dla równań Naviera-Stokesa. Łącząc ten wynik z warunkiem stabilności z rozdziału trzeciego, formułujemy twierdzenie dotyczącego możliwości numerycznej weryfikacji regularności rozwiązań w trójwymiarowych równaniach Naviera-Stokesa. Idee dotyczące stabilności regularności oraz zbieżności przybliżeń Galerkinowskich w równaniach Naviera-Stokesa pochodzą z prac [CCRT], [DR] oraz [RRS].

Praca zawiera również dodatek A, w którym znajduje się krótka lista używanych w pracy standardowych twierdzeń wraz z garścią przykładów ich zastosowania.

Rozdział 1

Informacje wstępne

> "If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is."
>
> *John von Neumann*

W niniejszej pracy będziemy używać następujących, standardowych oznaczeń:

- $u(t) := u(\cdot, t)$,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - iloczyn skalarny w $L^2(\Omega)$, tzn. $\langle u, v \rangle := \int_\Omega uv \, \mathrm{dx}$,
- $\|u\|$ - norma w $L^2(\Omega)$, tzn. $\|u\| := \left(\int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{dx} \right)^{\frac{1}{2}}$,
- $\Omega_T := \Omega \times [0, T)$, $\partial\Omega_T := \partial\Omega \times [0, T)$ dla $T > 0$.

Nawias kątowy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie też oznaczać czasem parę dualną, np. między przestrzeniami $\mathbb{H}^1_0$ oraz $\mathbb{H}^{-1}$. Jeśli nie będzie to jasno wynikało z kontekstu, będziemy na to zwracać uwagę w tekście.

Często rozpatruje się równania Naviera-Stokesa na zbiorze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - otwartym, ograniczonym, z gładkim brzegiem, z zerowym warunkiem brzegowym Dirichleta $u|_{\partial\Omega} = 0$. Drugim ważnym przykładem obszaru, (poza całą przestrzenią $\mathbb{R}^3$), na którym rozważa się równania Naviera-Stokesa, jest trójwymiarowy torus

$$\Omega = \mathbb{T}^3 = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$$

z periodycznymi warunkami brzegowymi:

$$u(x + L_i e_i, t) = u(x, t), \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,\ i = 1, 2, 3,$$

gdzie e_i to standardowa baza przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$, zaś $L_i > 0$ to okres w i-tym kierunku.

W tej pracy rozważać będziemy równania Naviera-Stokesa oraz równania Brinkmana--Forchheimera z konwekcją na trójwymiarowym torusie z periodycznymi warunkami brzegowymi. Dla uproszczenia rozważań, skupimy się na przypadku symetrycznym, tzn.

$$\Omega = \mathbb{T}^3 = [0, L]^3$$

oraz

$$u(x + L e_i, t) = u(x, t), \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,\ i = 1, 2, 3,$$

gdzie za okres L przyjmiemy 2π.

1.1. Przestrzenie funkcyjne

W tej sekcji zajmiemy się wprowadzeniem używanych w pracy przestrzeni funkcyjnych oraz operatorów i ich podstawowych własności.

Dla zbiorów Ω jak powyżej interesować nas będą następujące przestrzenie.

Podstawowa przestrzeń, którą będziemy rozważać to przestrzeń Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem[1] L^2:

$$L^2(\Omega) = \left\{ u \colon \Omega \to \mathbb{R} : \int\limits_{\Omega} |u|^2 \, \mathrm{dx} < +\infty \right\}$$

oraz jednorodna wersja tej przestrzeni:

$$\dot{L}^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : u_\Omega = 0 \right\},$$

która nie zawiera funkcji stałych różnych od zera. Stała u_Ω oznacza tutaj wartość średnią funkcji u na zbiorze Ω:

$$u_\Omega := \fint\limits_{\Omega} u \, \mathrm{dx} = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} u \, \mathrm{dx}.$$

Zakładamy tu oczywiście, że miara zbioru Ω (oznaczamy ją przez $|\Omega|$) jest różna od zera.

Przypomnijmy ponadto standardowe przestrzenie Sobolewa $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ dla $s \in \mathbb{N}$, składające się z funkcji, których pochodne dystrybucyjne aż do rzędu s (włącznie) należą do L^2. Dla każdego $s \in \mathbb{N}$ przestrzeń $H^s(\Omega)$, z iloczynem skalarnym:

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leqslant s} \left(\int\limits_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, \mathrm{dx} \right),$$

tworzy przestrzeń Hilberta. Norma indukowana przez ten iloczyn skalarny dana jest wzorem:

$$\|u\|^2_{H^s(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leqslant s} \langle u, u \rangle_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha u|^2 \, \mathrm{dx}.$$

Od tej pory, o ile nie sprecyzujemy inaczej, Ω oznaczać będzie zbiór następującej postaci:

$$\Omega := \mathbb{T}^3 = [0, 2\pi]^3.$$

Będziemy stosować wyrażenia Ω i $\mathbb{T}^3$ zamiennie.

Przestrzeń $L^2(\mathbb{T}^3)$ składa się z funkcji 2π okresowych w każdym kierunku, które należą do L^2. Jeśli funkcja $u \in L^2(\mathbb{T}^3)$, to można ją przedstawić w postaci szeregu Fouriera:

$$\forall\ x \in \mathbb{T}^3 \quad u(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{|k| \leqslant n} \hat{u}_k e^{ik \cdot x}, \quad \hat{u}_k \in \mathbb{C},$$

gdzie $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$, zaś współczynniki $\hat{u}_k$ mają następujące własności:

1. $\hat{u}_k = \overline{\hat{u}_{-k}} \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^3$,
2. $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^3} |\hat{u}_k|^2 < +\infty$.

[1] Z fizycznego punktu widzenia warunek $\int\limits_{\Omega} |u|^2 \, \mathrm{dx} < +\infty$ odpowiada skończonej energii kinetycznej.

Wektor $-k$ oznacza tu wektor $(-k_1, -k_2, -k_3)$, natomiast $\overline{\hat{u}_{-k}}$ to sprzężenie liczby zespolonej $\hat{u}_{-k}$.

Łatwo zauważyć, że norma w $L^2\left(\mathbb{T}^3\right)$ zadana wzorem:

$$\|u\|^2 := \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} |\hat{u}_k|^2, \tag{1.1}$$

jest równoważna standardowej normie w $L^2\left(\mathbb{T}^3\right)$ równej

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \int\limits_{\mathbb{T}^3} |u|^2 \,\mathrm{dx}.$$

Mówiąc nieco bardziej precyzyjnie, prosty rachunek (korzystający z własności współczynników $\hat{u}_k$ i odrobiny całkowania przez części) przekonuje nas, że

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} = (2\pi)^3 \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} |\hat{u}_k|^2 = (2\pi)^3 \|u\|^2.$$

Będziemy rozważać przestrzeń $L^2\left(\mathbb{T}^3\right)$ z normą zadaną formułą (1.1). Żeby nieco bardziej zaprzyjaźnić się z tym wzorem, przyjmijmy dla każdego $k \in \mathbb{Z}^3$

$$\hat{u}_k := a_k + ib_k,$$

gdzie $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Funkcja u zapisuje się wtedy w sposób następujący:

$$u(x) = a_0 + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}^3_+} [a_k \cos(k\cdot x) - b_k \sin(k\cdot x)],$$

gdzie $\mathbb{Z}^3_+ = \left\{k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\} : k_i \geqslant 0\right\}$. Natomiast norma (1.1) wyraża się wzorem:

$$\|u\|^2 = a_0^2 + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}^3_+} \left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

Zdefiniujemy teraz funkcje z jednorodnej przestrzeni $\dot{L}^2\left(\mathbb{T}^3\right)$. Przyjmijmy najpierw następujące oznaczenie:

$$\dot{\mathbb{Z}}^3 := \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$$

Funkcje u należące do $\dot{L}^2\left(\mathbb{T}^3\right)$ można przedstawić (podobnie, jak dla $L^2\left(\mathbb{T}^3\right)$) w postaci szeregu:

$$\forall\ x \in \mathbb{T}^3 \quad u(x) = \sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^3} \hat{u}_k e^{ik\cdot x}, \quad \hat{u}_k \in \mathbb{C},$$

z analogicznymi relacjami dla współczynników $\hat{u}_k$ (dla $k \in \dot{\mathbb{Z}}^3$) oraz normą zadaną w podobny sposób:

$$\|u\|^2 := \sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^3} |\hat{u}_k|^2 = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}^3_+} \left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

Wymóg zerowania się wartości średniej funkcji z jednorodnej przestrzeni $\dot{L}^2\left(\mathbb{T}^2\right)$ jest równoważny z wzięciem współczynnika $\hat{u}_0 = 0$ w rozwinięciu tej funkcji w szereg Fouriera:

$$u_{\mathbb{T}^3} = 0 \Longleftrightarrow \hat{u}_0 = 0.$$

Uwaga 1.1 *Rozważać będziemy głównie funkcje wektorowe z przestrzeni* $\left(L^2(\Omega)\right)^3$*, tzn. takie funkcje* $u = (u_1, u_2, u_3)$*, że* $u_i \in L^2(\Omega)$ *dla* $i = 1, 2, 3$*. W tym przypadku współczynniki występujące w rozwinięciu funkcji w szereg są wektorami, tzn.* $\hat{u}_k \in \mathbb{C}^3$*. Dla skrócenia notacji, będziemy zazwyczaj pisać po prostu* $u \in L^2(\Omega)$*, nie wyróżniając wymiaru przeciwdziedziny. Nie powinno to prowadzić do nieporozumień.*

Teraz zdefiniujemy interesujące nas przestrzenie Sobolewa $H^s \subset L^2(\mathbb{T}^3)$ dla $s > 0$:

$$H^s := \left\{ u \in L^2\left(\mathbb{T}^3\right) : \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \left(1 + |k|^{2s}\right) |\hat{u}_k|^2 < +\infty \right\}$$

z normą zadaną wzorem:

$$\|u\|_{H^s}^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \left(1 + |k|^{2s}\right) |\hat{u}_k|^2.$$

Zauważmy, że dla $s = 0$ powyższa definicja daje $H^0 = L^2(\mathbb{T}^3)$.

Warto zauważyć, że $H^t \subset H^s$ dla $0 < s < t$.

Przykład 1.1 *Przykładowo mamy więc* $H^2 \subset H^1$ *i spełniona jest nierówność:*

$$\|u\|_{H^1}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \left(1 + |k|^2\right) |\hat{u}_k|^2 \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \left(1 + |k|^4\right) |\hat{u}_k|^2 = \|u\|_{H^2}^2$$

dla każdej funkcji $u \in H^2$*.*

Jednorodne przestrzenie $\dot{H}^s \subset \dot{L}^2(\mathbb{T}^3)$ definiujemy w sposób analogiczny:

$$\dot{H}^s := \left\{ u \in \dot{L}^2\left(\mathbb{T}^3\right) : \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} |k|^{2s} |\hat{u}_k|^2 < +\infty \right\}.$$

Wzór

$$\|u\|_{\dot{H}^s}^2 := \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} |k|^{2s} |\hat{u}_k|^2$$

określa normę w przestrzeni $\dot{H}^s$.

Dla naszych późniejszych rozważań ważny będzie następujący przykład.

Przykład 1.2 *Weźmy funkcję* $u \in \dot{H}^1$*. Policzmy najpierw pochodną* $\partial_{x_j} u$ *dla* $j = 1, 2, 3$*:*

$$\partial_{x_j} u(x) = \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} \hat{u}_k (ik_j) e^{ik \cdot x}.$$

Stąd wynika, że norma gradientu u *w przestrzeni* $\dot{L}^2(\mathbb{T}^3)$ *jest równa normie* u *w* $\dot{H}^1$*:*

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{j=1}^{3} \left\|\partial_{x_j} u\right\|^2 = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} |\hat{u}_k|^2 |ik_j|^2 \right) = \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} |\hat{u}_k|^2 |k|^2 = \|u\|_{\dot{H}^1}^2.$$

Łatwo można obliczyć, że standardowa norma w przestrzeni $\dot{L}^2(\mathbb{T}^3)$ *pierwszej pochodnej funkcji* u *jest równoważna z normą w* $\dot{H}^1$ *i wynosi:*

$$\|Du\|_{\dot{L}^2(\mathbb{T}^3)}^2 = \int_{\mathbb{T}^3} |Du|^2 \, dx = (2\pi)^3 \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} |k|^2 |\hat{u}_k|^2 = (2\pi)^3 \|u\|_{\dot{H}^1}^2.$$

Uwaga 1.2 *W świetle powyższych rozważań będziemy w kolejnych rozdziałach zastępować normę gradientu funkcji $u \in \dot{H}^1$, normą funkcji u w przestrzeni $\dot{H}^1$:*

$$\|\nabla u\| = \|u\|_{\dot{H}^1}.$$

Zdefiniujmy teraz podprzestrzeń przestrzeni $\dot{L}^2(\mathbb{T}^3)$ składającą się z funkcji bezdywergentnych. Oznaczmy ją przez $H \subset \dot{L}^2(\mathbb{T}^3)$:

$$H := \left\{ u \in \dot{L}^2\left(\mathbb{T}^3\right) : \operatorname{div} u = 0 \right\},$$

gdzie dywergencja jest tu rozumiana w sensie dystrybucyjnym. Nie jest trudno sprawdzić, że warunek bezdywergentności dla funkcji $u \in \dot{L}^2(\mathbb{T}^3)$ w postaci szeregu Fouriera daje nam następującą, równoważną definicję przestrzeni H:

$$H = \left\{ u \in \dot{L}^2\left(\mathbb{T}^3\right) : \hat{u}_k \perp k \ \forall\ k \in \dot{\mathbb{Z}}^3 \right\}.$$

Mamy bowiem:

$$0 = \operatorname{div} u(x) = \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} i\left(\hat{u}_k \cdot k\right) e^{ik\cdot x} \Longleftrightarrow \hat{u}_k \cdot k = 0 \quad \forall\ k \in \dot{\mathbb{Z}}^3.$$

Możemy też myśleć o tej przestrzeni jako o domknięciu przestrzeni $C^\infty_{0,\mathrm{div}}\left(\mathbb{T}^3\right)$ w normie przestrzeni $\dot{L}^2$. Przez $C^\infty_{0,\mathrm{div}}$ oznaczamy tu przestrzeń funkcji gładkich o zwartym nośniku, które dodatkowo są bezdywergentne.

Zdefiniujmy jeszcze podprzestrzenie jednorodnych przestrzeni Sobolewa $\dot{H}^s$ składające się z funkcji bezdywergentnych $V^s \subset \dot{H}^s$ dla $s \in \mathbb{N}$:

$$V^s := H \cap \dot{H}^s.$$

W szczególności będziemy oznaczać $V := V^1 = H \cap \dot{H}^1$.

Przestrzeń dualną do $\dot{H}^s$ dla $s \in \mathbb{N}$ będziemy oznaczać $\dot{H}^{-s}$, zaś przestrzeń dualną do V przez V'.

Dla naszych rozważań duże znaczenie będzie miało następujące klasyczne twierdzenie o rozkładzie przestrzeni $\dot{L}^2(\mathbb{T}^3)$.

Twierdzenie 1.1.1 (Rozkład Helmholtza-Weyla) *Każdą funkcję $u = (u_1, u_2, u_3)$ z przestrzeni $\left(\dot{L}^2(\mathbb{T}^3)\right)^3$ można rozłożyć w następujący sposób:*

$$u = v + \nabla\omega,$$

gdzie funkcja $v \in H$ (jest bezdywergentna), zaś funkcja skalarna $\omega \in \dot{H}^1$.

Twierdzenie to można wypowiedzieć również w sposób następujący:

$$\left(\dot{L}^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^3 = H \oplus G,$$

gdzie G to przestrzeń ortogonalna do H ($G \perp H$), składająca się z gradientów funkcji skalarnych z przestrzeni Sobolewa $\dot{H}^1$.

Poniższy przykład pokazuje jak wygląda rozkład interesujących nas funkcji.

Przykład 1.3 *Weźmy funkcję $u \in \left(\dot{L}^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^3$ w postaci szeregu:*

$$u(x) = \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} \hat{u}_k e^{ik \cdot x}, \quad \hat{u}_k \in \mathbb{C}^3.$$

Rozkładając wektor $\hat{u}_k$ na część prostopadłą i równoległą do wektora k, możemy przedstawić funkcję u w następujący sposób:

$$u(x) = \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} \alpha_k k e^{ik \cdot x} + \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^3} \beta_k e^{ik \cdot x} = \nabla \omega + v,$$

gdzie

$$\alpha_k := \frac{\hat{u}_k \cdot k}{|k|^2}, \quad \beta_k := \hat{u}_k - \alpha_k k.$$

Wniosek 1.1.2 *Używając notacji z twierdzenia 1.1.1 mamy $v \perp \omega$, to znaczy, że*

$$0 = \langle v, \nabla \omega \rangle = \int_\Omega v \nabla \omega \, dx.$$

Stąd oraz z twierdzenia Gaussa-Greena o dywergencji dostajemy:

$$\int\limits_\Omega v \nabla \omega \, dx = \int\limits_\Omega \operatorname{div}(\omega v) \, dx - \int\limits_\Omega \omega \underbrace{\operatorname{div} v}_{=0} \, dx = \int\limits_\Omega \operatorname{div}(\omega v) \, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \omega (v \cdot n) \, d\Gamma = 0.$$

Czyli dla funkcji $u \in \left(\dot{L}^2(\Omega)\right)^3$ takiej, że $u = v + \nabla \omega$, mamy:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \omega (v \cdot n) \, d\Gamma = 0.$$

Uwaga 1.3 *Analogiczne twierdzenie do twierdzenia 1.1.1 jest prawdziwe również dla przestrzeni $\left(L^2(\Omega)\right)^3$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ to zbiór otwarty, ograniczony. Pisząc skrótowo, mamy:*

$$u = v + \nabla \omega,$$

gdzie $v \in H(\Omega) = \overline{C^\infty_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2}}$, zaś $\omega \in H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

W pracy będziemy również intensywnie używać przestrzeni funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$. Więcej informacji na temat tej teorii można znaleźć na przykład w książce [EV].

Przykładem takiej przestrzeni jest przestrzeń $C([0,T]; X)$ składająca się ze wszystkich funkcji ciągłych $u : [0,T] \to X$ z normą:

$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_X < +\infty.$$

W kontekście równań Naviera-Stokesa najbardziej interesować nas będą jednak przestrzenie Bochnera $L^p(0,T;X)$. Składają się one ze wszystkich funkcji *silnie mierzalnych*[2] $u : [0,T] \to X$ spełniających dla $1 \leqslant p < +\infty$ warunek:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int\limits_0^T \|u(t)\|_X^p \, \mathrm{dt} \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

zaś dla $p = \infty$, warunek:

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_X < +\infty.$$

[2]Funkcja jest silnie mierzalna, jeśli istnieje ciąg funkcji prostych, który do niej zbiega dla prawie wszystkich $t \in [0,T]$.

1.2. Operatory

W tym podrozdziale wprowadzimy podstawowe operatory związane z naszymi równaniami. Będziemy używać ich w dalszej części pracy.

Operator rzutu na podprzestrzeń bezdywergentną[3]:

$$\mathbb{P}\colon \dot{L}^2\left(\mathbb{T}^3\right) \to H.$$

Przykład 1.4 *Korzystając z twierdzenia 1.1.1, możemy napisać dla każdej funkcji $u \in \dot{L}^2$:*

$$u = v + \nabla\omega,$$

gdzie $v \in H$, $\omega \in \dot{H}^1$. Mamy wtedy:

$$\mathbb{P}u = v.$$

Operator Stokesa:

$$A := -\mathbb{P}\Delta.$$

Jest to nieograniczony operator liniowy

$$A : D(A) \to H,$$

którego dziedzina $D(A) = \left\{u \in \dot{L}^2\left(\mathbb{T}^3\right) : \Delta u \in \dot{L}^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right\} = \dot{H}^2$. Dla każdego $u \in V^2$:

$$Au = -\Delta u.$$

Ponadto A jest dodatnio określony (ze względu na iloczyn skalarny w L^2) oraz samosprzężony w H. Posiada więc ciąg funkcji własnych $\{a^j\}_{j\in\mathbb{N}}$, które tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H. Funkcje $a^j \in D(A)$ mają zatem następujące własności:

$$\left\langle a^i, a^j\right\rangle = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j,\, i, j \in \mathbb{N}$$

oraz

$$\left\langle a^j, a^j\right\rangle = \left\|a^j\right\|^2 = 1 \quad \text{dla} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Ponadto mamy

$$Aa^j = \lambda_j a^j \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots,$$

gdzie λ_j to wartości własne operatora Stokesa odpowiadające funkcjom własnym a^j. Tworzą one ciąg niemalejący[4]:

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \quad \lim_{j\to+\infty} \lambda_j = +\infty.$$

Funkcje a^j mają następującą, przydatną własność.

Stwierdzenie 1.2.1 *Dla każdego $j \in \mathbb{N}$*

$$\left\|a^j\right\|_{\dot{H}^1}^2 = \left\|\nabla a^j\right\|^2 = \lambda_j.$$

[3] W języku angielskim operator ten nosi nazwę *"Leray projector"*. Czasem również *"Helmholtz projector"*.

[4] Wynika to z twierdzenia spektralnego. Operator A^{-1} jest zwarty i samosprzężony na przestrzeni Hilberta H. Więcej informacji na temat operatora Stokesa można znaleźć np. w monografii [RT].

Dowód. [Stwierdzenia 1.2.1] Dowód to prosty rachunek polegający na całkowaniu przez części i wykorzystaniu własności funkcji a^j:

$$\left\|\nabla a^j\right\|^2 = \left\langle \nabla a^j,\, \nabla a^j \right\rangle = -\left\langle a^j,\, \Delta a^j \right\rangle = -\left\langle \mathbb{P} a^j,\, \Delta a^j \right\rangle = -\left\langle a^j,\, \mathbb{P}\Delta a^j \right\rangle = \left\langle a^j,\, -\mathbb{P}\Delta a^j \right\rangle =$$
$$= \left\langle a^j,\, A a^j \right\rangle = \lambda_j \left\langle a^j,\, a^j \right\rangle = \lambda_j.$$

□

Przykład 1.5 *Weźmy funkcję* $u(x) = \hat{u}_k e^{ik\cdot x}$ *taką, że* $\hat{u}_k \cdot k = 0$ *dla* $k \in \mathbb{Z}^3$*. Nietrudny rachunek pokazuje, że mamy wtedy:*

$$\Delta u = -\left|k\right|^2 \hat{u}_k e^{ik\cdot x} = -\left|k\right|^2 u.$$

Stąd:

$$Au = -\mathbb{P}\Delta u = -\mathbb{P}\left(-\left|k\right|^2 u\right) = \left|k\right|^2 u.$$

Gdyby u była funkcją rzeczywistą, to byłaby funkcją własną operatora Stokesa z odpowiadającą jej wartością własną

$$\lambda = \left|k\right|^2.$$

Powyższy przykład 1.5 prowadzi do ważnego stwierdzenia, które będzie często wykorzystywane w oszacowaniach w kolejnych rozdziałach tej pracy.

Stwierdzenie 1.2.2 *Dla każdej funkcji* $u \in V^2$ *mamy następującą równość norm:*

$$\|u\|_{\dot{H}^2} = \|Au\|.$$

Dowód. [Stwierdzenia 1.2.2] Zapiszmy najpierw u w postaci szeregu:

$$u(x) = \sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^3} \hat{u}_k e^{ik\cdot x}.$$

Przykładając operator Stokesa i korzystając z przykładu 1.5, dostajemy:

$$Au = \sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^3} A\left(\hat{u}_k e^{ik\cdot x}\right) = \sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^3} \left|k\right|^2 \hat{u}_k e^{ik\cdot x}.$$

Wprost z definicji normy w $\dot{L}^2$ otrzymujemy tezę stwierdzenia:

$$\|Au\|^2 = \sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^3} \left|\left|k\right|^2 \hat{u}_k\right|^2 = \sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^3} \left|k\right|^4 \left|\hat{u}_k\right|^2 = \|u\|^2_{\dot{H}^2}.$$

□

Interesuje nas baza przestrzeni H złożona z rzeczywistych funkcji własnych operatora A. Funkcje z przykładu 1.5 są funkcjami zespolonymi. Korzystając z własności współczynników $\hat{u}_k$ i wzoru Eulera, można na ich podstawie skonstruować funkcje własne $a^j(x)$ postaci:

$$v_k \cos\left(k\cdot x\right) \quad \text{oraz} \quad v_k \sin\left(k\cdot x\right).$$

Dla każdego $k \in \dot{\mathbb{Z}}^3$ dobieramy w sposób jednoznaczny (z dokładnością do długości) parę wektorów $v_k, v_{-k} \in \mathbb{R}^3$ tak, żeby spełniała następujące własności:

$$v_k \perp k, \quad v_{-k} \perp -k, \quad v_k \perp v_{-k}.$$

Normując tak otrzymane funkcje do jedynki $\Big($wystarczy wziąć $\tilde{v}_k := \frac{v_k}{(2\pi)^3 |v_k|}\Big)$, otrzymujemy rzeczywistą bazę ortonormalną przestrzeni H złożoną z funkcji własnych operatora A.

Każdą funkcję $u \in H$ możemy teraz zapisać w bazie rzeczywistych funkcji a^j, które są funkcjami własnymi operatora Stokesa:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} u_j a^j(x), \quad u_j \in \mathbb{R},$$

gdzie współczynniki $u_j := \langle u, a^j \rangle$.

Zauważmy jeszcze, że skonstruowane powyżej funkcje a^j są funkcjami gładkimi:

$$a^j \in C^\infty(\Omega) \quad \text{dla} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Dla każdego $s > 0$ możemy zdefiniować[5] potęgi operatora A. Dla każdego $u \in D(A)$ definiujemy A^s poprzez działanie:

$$A^s u := \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^s u_j a^j.$$

Przykład 1.6 *Z powyższych rozważań wynika, że*

$$\|Au\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} (\lambda_j)^2 |u_j|^2.$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy przez V_n przestrzeń rozpiętą przez pierwszych n funkcji własnych operatora Stokesa:

$$V_n := \operatorname{lin}\{a^1, \ldots, a^n\}.$$

Przez P_n oznaczmy rzut ortogonalny z przestrzeni H na przestrzeń V_n:

$$P_n : H \to V_n.$$

Mamy więc dla każdego $u \in H$:

$$u_n(x) := P_n u(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j a^j(x).$$

Przez Q_n oznaczmy rzut z H na dopełnienie prostopadłe przestrzeni V_n:

$$Q_n := Id - P_n.$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $u \in H$ mamy:

$$Q_n u(x) = u(x) - u_n(x) = \sum_{j=n+1}^{+\infty} u_j a^j(x).$$

Zauważmy, że operatory P_n i Q_n komutują z operatorem Stokesa A.

Ponadto prawdziwe jest następujące stwierdzenie.

[5] Patrz np. [RT].

Stwierdzenie 1.2.3 *Z gładkości funkcji własnych operatora A, wynika, że dla każdego $m \geqslant 0$ $\big(V^0 := H\big)$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$*

$$u_n \in V^m.$$

W kontekście szeregów Fouriera, oczywisty jest następujący lemat.

Lemat 1.2.4 *Niech $X = H, V$ lub V'. Dla każdego $u \in X$*

$$\|u_n\|_X \leqslant \|u\|_X$$

oraz

$$u_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(x) \quad w \quad X,$$

to znaczy:

$$\|u - P_n u\|_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

W dowodzie twierdzenia o istnieniu słabych rozwiązań równań Naviera-Stokesa użyteczne jest następujące twierdzenie dotyczące funkcji własnych operatora A.

Lemat 1.2.5 (Fredrichs) *Dla każdej funkcji $u \in \dot{H}^1$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $N > 0$ oraz zbiór funkcji własnych operatora Stokesa $\left\{a^k\right\}_{k=1}^{N}$, taki że:*

$$\|u(t)\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{N} \left\langle u(t),\, a^k \right\rangle^2 + \varepsilon \|\nabla u(t)\|^2 . \tag{1.2}$$

Dowód. [Lematu 1.2.5] Zacznijmy od wypisania funkcji u w postaci szeregu:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(t) a^k(x)$$

i przedstawienia w tej postaci wszystkich składników występujących w nierówności (1.2):

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(t)^2, \quad \|\nabla u\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k c_k(t)^2, \quad \sum_{k=1}^{N} \left\langle u,\, a^k \right\rangle^2 = \sum_{k=1}^{N} c_k(t)^2.$$

Nierówność, którą chcemy udowodnić, wygląda więc następująco:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \sum_{k=1}^{N} c_k(t)^2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k c_k(t)^2 - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(t)^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{N} c_k(t)^2 + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k(t)^2 + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \lambda_k c_k(t)^2 \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(t)^2 = \\
&= - \sum_{k=N+1}^{+\infty} c_k(t)^2 + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k(t)^2 + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \lambda_k c_k(t)^2 \right).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Korzystając z własności wartości własnych operatora Stokesa λ_k, możemy oszacować (1.3) w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
&- \sum_{k=N+1}^{+\infty} c_k(t)^2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k(t)^2 + \varepsilon \sum_{k=N+1}^{+\infty} \lambda_k c_k(t)^2 \geqslant \\
&\geqslant - \sum_{k=N+1}^{+\infty} c_k(t)^2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k(t)^2 + \varepsilon \sum_{k=N+1}^{+\infty} \lambda_N c_k(t)^2.
\end{aligned}$$

Wybierając teraz $N > 0$, takie że $\lambda_N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, dostajemy:

$$-\sum_{k=N+1}^{+\infty} c_k(t)^2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k(t)^2 + \varepsilon \sum_{k=N+1}^{+\infty} \lambda_N c_k(t)^2 \geqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k(t)^2 \geqslant 0,$$

co kończy dowód lematu. □

Zdefiniujmy teraz następującą formę trójliniową $b : V \times V \times V \to \mathbb{R}$:

$$b(u, v, w) := \int_\Omega [(u \cdot \nabla) v] \cdot w \, \mathrm{dx} = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, \mathrm{dx}.$$

Forma b ma następujące własności, które będą dla nas niezwykle przydatne w dalszej części pracy:

- antysymetria ze względu na dwie ostatnie współrzędne (wynika z całkowania przez części):
$$b(u, v, w) = -b(u, w, v) \quad \forall\, u, v, w \in V,$$
- w szczególności zachodzą dwie bardzo ważne tożsamości:
$$b(u, v, v) = 0 \quad \forall\, u, v \in V$$
oraz
$$b(u, u, u) = 0 \quad \forall\, u \in V.$$

Zdefiniujmy teraz operator dwuliniowy związany z konwekcją $B : V \times V \to V'$. Dla każdych $u, v, w \in V$ połóżmy $B(u, v) := \mathbb{P}[(u \cdot \nabla)v] \in V'$ z działaniem:

$$\langle B(u, v),\, w \rangle := \langle \mathbb{P}[(u \cdot \nabla)v],\, w \rangle .$$

Ponadto dla każdego $u \in V$ oznaczmy $B(u) := B(u, u)$.

Zauważmy, że dla każdych $u, v, w \in V$ mamy:

$$b(u, v, w) = \langle B(u, v),\, w \rangle .$$

Zdefiniujmy jeszcze operator związany z dodatkową nieliniowością pochodzącą z równania Brinkmana-Forchheimera C. Dla każdych funkcji $u, v \in \dot{L}^3(\mathbb{T}^3)$ oznaczmy:

$$C(u, v) := |u|\, v.$$

Ponadto przyjmijmy oznaczenie $C(u) := C(u, u)$.

Operator C ma następującą, ważną własność.

Lemat 1.2.6 *Operator C jest* monotoniczny. *Znaczy to, że dla każdych funkcji $u, v \in \dot{L}^3(\mathbb{T}^3)$ ma miejsce następująca nierówność:*

$$\langle C(u) - C(v),\, u - v \rangle = \langle |u|\, u - |v|\, v,\, u - v \rangle \geqslant 0.$$

Dowód. [Lematu 1.2.6] Dla każdego wektora $u \in \mathbb{R}^3$ rozważmy najpierw funkcję skalarną $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ postaci:

$$F(u) := \frac{1}{3} |u|^3 .$$

Zauważmy, że gradient funkcji F wynosi:

$$\nabla F(u) = |u| \, u.$$

Mamy więc następującą relację:

$$\nabla F(u) = C(u).$$

Korzystając z elementarnej nierówności:

$$u \cdot v \leqslant |u| \, |v|$$

oraz z nierówności Younga (dla $p = 3$ i $q = \frac{3}{2}$), możemy bezpośrednio sprawdzić monotoniczność ∇F. Dla każdych $u, v \in \mathbb{R}^3$ mamy:

$$\begin{aligned}
(\nabla F(u) - \nabla F(v)) \, (u - v) = (|u| \, u - |v| \, v) \, (u - v) = \left(|u|^3 + |v|^3\right) - (|u| + |v|) \, uv \geqslant \\
\geqslant \left(|u|^3 + |v|^3\right) - (|u| + |v|) \, |u| \, |v| = \\
= \left(|u|^3 + |v|^3\right) - |u|^2 \, |v| - |v|^2 \, |u| \geqslant \\
\geqslant \left(|u|^3 + |v|^3\right) - \frac{2}{3} |u|^3 - \frac{1}{3} |v|^3 - \frac{2}{3} |v|^3 - \frac{1}{3} |u|^3 = 0.
\end{aligned}$$

Dowód kończy stwierdzenie, że całka zachowuje monotoniczność. $\square$

Rozdział 2

Zagadnienia początkowo-brzegowe

W tym rozdziale wprowadzimy rozważane w dalszej części pracy modele matematyczne opisujące dynamikę nieściśliwych, lepkich płynów. Będą to zagadnienia początkowo-brzegowe wymienione we wprowadzeniu, rozważane na trójwymiarowym torusie: równania Naviera--Stokesa oraz równania Brinkmana-Forchheimera z konwekcją.

Wyprowadzimy również tzw. *pierwszą nierówność energetyczną* i wprowadzimy definicje słabych rozwiązań rozważanych równań.

2.1. Trójwymiarowe równania Naviera-Stokesa

Trójwymiarowe równania Naviera[1]-Stokesa[2] mają następującą postać:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \mu\Delta u(x,t) + (u(x,t)\cdot\nabla)\, u(x,t) + \nabla p(x,t) = f(x,t) & \text{na} \quad \Omega_T, \\ \operatorname{div} u(x,t) = 0 & \text{na} \quad \Omega_T, \end{cases} \tag{2.1}$$

gdzie $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)$ jest szukanym polem prędkości płynu, funkcja skalarna $p(x,t)$ - szukanym ciśnieniem, zaś pole $f(x,t) = (f_1, f_2, f_3)$ to dane nam siły zewnętrzne działające na płyn. Stała μ to dodatni współczynnik lepkości płynu. Rozważać będziemy układ równań (2.1) z warunkiem początkowym:

$$u\,(x,0) = u(0) = u_0(x) \quad \text{na} \quad \Omega, \tag{2.2}$$

gdzie funkcja $u_0 \in H$.

Przypomnijmy, że rozważamy równania na trójwymiarowym torusie $\Omega = \mathbb{T}^3 = [0, 2\pi]^3$ z okresowym warunkiem brzegowym:

$$u\,(x + 2\pi e_i, t) = u\,(x,t) \quad \forall\; x \in \mathbb{R}^3, \quad \forall\; t > 0, \quad i = 1,2,3, \tag{2.3}$$

gdzie e_i to standardowe wersory w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Dokonamy najpierw kilku uproszczeń w układzie (2.1). Możemy bez straty ogólności zakładać, że funkcje u i f mają średnie przestrzenne równe zero, tzn.

$$u_\Omega\,(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega u(t)\,\mathrm{dx} = 0 \quad \text{oraz} \quad f_\Omega\,(t) = 0 \quad \forall\; t > 0.$$

[1] Claude Louis Marie Henri Navier (10.02.1785 - 21.08.1836) - francuski inżynier i fizyk specjalizujący się w mechanice.

[2] Sir George Gabriel Stokes (13.08.1819 - 01.02.1903) - irlandzki matematyk, fizyk, polityk i teolog.

Ponadto przyjmiemy współczynnik lepkości $\mu = 1$. Łatwo bowiem sprawdzić, że jeśli funkcja $u(x,t)$ jest rozwiązaniem układu (2.1) z lepkością $\mu > 0$, to funkcja

$$u_\mu (x,t) = \mu u (x, \mu t)$$

spełnia równanie (2.1) z $\mu = 1$. Oczywiście należy przy tym odpowiednio przeskalować odcinek czasowy $[0,T)$.

Ostatecznie więc rozważać będziemy następujące równania Naviera-Stokesa:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + (u(x,t)\cdot\nabla)\, u(x,t) + \nabla p(x,t) = f(x,t) & \text{na} \quad \Omega_T, \\ \operatorname{div} u(x,t) = 0 & \text{na} \quad \Omega_T, \end{cases} \tag{2.4}$$

z warunkiem początkowym (2.2) i okresowym warunkiem brzegowym (2.3) oraz z funkcjami u i f mającymi średnie przestrzenne równe zero.

Uwaga 2.1 *Dzięki przyjęciu średniej przestrzennej funcji u równej zero mamy nierówność Poincarego, która pozwala na zastąpienie pełnej normy w przestrzeni V normą gradientu w H (patrz przykład A.4).*

2.1.1. Nierówność energetyczna

Załóżmy teraz przez chwilę, że u jest rozwiązaniem klasycznym równania (2.4) i wszystkie poniższe operacje są uzasadnione. Mnożąc skalarnie obie strony równania (2.4) przez u i całkując po Ω otrzymujemy:

$$\langle u_t,\, u\rangle + \langle -\Delta u,\, u\rangle + \langle (u\cdot\nabla)\, u,\, u\rangle + \langle \nabla p,\, u\rangle = 0.$$

Całkując przez części i wykorzystując opisane wcześniej własności (widzimy, że bardzo ważny jest tu fakt $\langle (u\cdot\nabla)\, u,\, u\rangle = 0$), dostajemy stąd następującą zależność:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u\right\|^2 + \left\|\nabla u\right\|^2 = 0.$$

Całkując teraz po odcinku czasowym $[0,t]$ dla $t \in [0,T)$ otrzymujemy równość:

$$\frac{1}{2}\left\|u(t)\right\|^2 + \int_0^t \left\|\nabla u(s)\right\|^2 \,\mathrm{ds} = \frac{1}{2}\left\|u(0)\right\|^2.$$

Powyższy rachunek przekonuje nas, że od rozwiązania u równania (2.4) powinniśmy oczekiwać, że dla $u_0 \in H$, ograniczone będą następujące normy:

$$\left\|u\right\|_{L^\infty(0,T;\,H)} \quad \text{oraz} \quad \left\|u\right\|_{L^2(0,T;\,V)}.$$

Formalna argumentacja polega na wzięciu przybliżeń Galerkinowskich u_n (patrz definicja 2.1.4) dla rozwiązania u. Są to funkcje gładkie, więc dla nich powyższy rachunek daje:

$$\frac{1}{2}\left\|u_n(t)\right\|^2 + \int_0^t \left\|\nabla u_n(s)\right\|^2 \,\mathrm{ds} = \frac{1}{2}\left\|u_n(0)\right\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left\|u(0)\right\|^2.$$

Przechodząc do granicy z $n \to +\infty$, otrzymujemy ostatecznie następującą *nierówność energetyczną* dla równań NS:

$$\frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T]}\left\|u(t)\right\|^2 + \int_0^T \left\|\nabla u(t)\right\|^2 \,\mathrm{dt} \leqslant \frac{1}{2}\left\|u(0)\right\|^2.$$

2.1.2. Słabe sformułowanie

Zajmiemy się teraz słabym sformułowaniem zagadnienia (2.4) bez sił zewnętrznych, tzn. dla $f \equiv 0$. Zdefiniujmy najpierw klasę funkcji testujących.

Definicja 2.1.1 (Klasa funkcji testujących) *Przez $D(\Omega_T)$ oznaczmy klasę funkcji gładkich, o zwartym nośniku w $\Omega \times [0, T)$, których dywergencja wynosi zero[3]:*

$$D(\Omega_T) := \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T) \, : \, \nabla \cdot \varphi = 0\} .$$

Zaznaczmy, że z powyższej definicji wynika, iż każda funkcja $\psi \in D(\Omega_T)$ ma nośnik oddzielony od prawego końca odcinka czasowego. W szczególności $\psi(T)$ jest funkcją zerową na Ω, tzn.:

$$\psi(T) = 0.$$

Weźmy teraz funkcję $\psi \in C_0^\infty(\Omega_T)$ i pomnóżmy przez nią obie strony równania (2.4) (z siłą $f \equiv 0$). Całkując przez części po Ω_T, dostajemy:

$$\begin{aligned} -\int_0^T \langle u, \psi_t \rangle \, \mathrm{dt} + \int_0^T \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle \, \mathrm{dt} + \int_0^T \langle (u \cdot \nabla) u, \psi \rangle \, \mathrm{dt} + \int_0^T \langle \nabla p, \psi \rangle \, \mathrm{dt} = \\ = - \left\langle u(T), \underbrace{\varphi(T)}_{=0} \right\rangle + \langle u_0, \psi(0) \rangle . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Rozkładając funkcję ψ zgodnie z twierdzeniem 1.1.1 na część bezdywergentną i gradient funkcji skalarnej:

$$\psi(t) = \varphi(t) + \nabla \gamma(t),$$

wstawiając do (2.5) i całkując przez części, otrzymujemy dwa równania, z których jedno zawiera tylko pole prędkości u:

$$-\int_0^T \langle u, \varphi_t \rangle \, \mathrm{dt} + \int_0^T \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, \mathrm{dt} + \int_0^T \langle (u \cdot \nabla) u, \varphi \rangle \, \mathrm{dt} = \langle u_0, \varphi(0) \rangle , \tag{2.6}$$

zaś drugie określa związek ciśnienia p z u:

$$\int_0^T \langle (u \cdot \nabla) u, \nabla \gamma \rangle \, \mathrm{dt} + \int_0^T \langle \nabla p, \nabla \gamma \rangle \, \mathrm{dt} = 0. \tag{2.7}$$

Przykładowo, w powyższym rachunku, składnik $\langle \nabla p, \varphi \rangle$ znika, ponieważ

$$\langle \nabla p, \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla p \varphi \, \mathrm{dx} = \int_\Omega \mathrm{div}\,(p\varphi) \, \mathrm{dx} - \int_\Omega p \underbrace{\mathrm{div}\, \varphi}_{=0} \, \mathrm{dx} = \int_\Omega \mathrm{div}\,(p\varphi) \, \mathrm{dx} = \int_{\partial\Omega} p(\varphi n) \, \mathrm{d}\Gamma = 0.$$

Równanie (2.7) pozwala nam znaleźć ciśnienie p, gdy mamy już pole prędkości u. Więcej o istnieniu i rekonstrukcji ciśnienia dla znanej prędkości u można przeczytać np. w pracy [G]. Skoncentrujmy się więc teraz na słabym sformułowaniu równania na prędkość.

Na podstawie równania (2.6) oraz nierówności energetycznej z paragrafu 2.1.1, mamy następującą definicję słabego rozwiązania równań Naviera-Stokesa bez sił zewnętrznych.

[3] Funkcje bezdywergentne należące do C_0^∞ nazywa się czasem (w fizyce nawet częściej) funkcjami *solenoidalnymi.*

Definicja 2.1.2 (Słabe rozwiązanie równań NS) *Powiemy, że funkcja u jest* słabym rozwiązaniem *równań Naviera-Stokesa* (2.4) *z warunkiem początkowym $u_0 \in H$ i z siłą zewnętrzną $f \equiv 0$, jeśli*

$$u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$$

oraz

$$-\int_0^T \langle u(t),\, \varphi_t(t)\rangle \, dt + \int_0^T \langle \nabla u(t),\, \nabla\varphi(t)\rangle \, dt + \int_0^T \langle (u(t)\cdot\nabla)\, u(t),\, \varphi(t)\rangle \, dt = \langle u_0,\, \varphi(0)\rangle$$

dla każdej funkcji solenoidalnej $\varphi \in D(\Omega_T)$.

Istnieje wygodniejsza, równoważna definicja słabego rozwiązania, w której funkcje testowe zależą tylko od zmiennej przestrzennej[4].

Rozważmy funkcje postaci $\psi_h(x,t) = \varphi(x)\,\theta_h(t)$, gdzie $\varphi \in D(\Omega) := C^\infty_{0\,\mathrm{div}}(\Omega)$, zaś $\theta_h(s)$ jest funkcją z przestrzeni $C_0^\infty([0,T))$, która jest równa jeden dla $s \leqslant t$ oraz równa zero dla $s \geqslant t+h$, dla ustalonego $t \in [0,T)$. Widzimy, że $\psi_h(x,s) = \varphi(x)$ dla $s \leqslant t$.

Biorąc w definicji 2.1.2 funkcje $\psi(x,t) := \psi_h(x,t)$ i zbiegając z $h \to 0$, dostajemy więc następującą definicję.

Definicja 2.1.3 *Powiemy, że funkcja u jest* słabym rozwiązaniem *równań Naviera-Stokesa* (2.4) *z warunkiem początkowym $u_0 \in H$ i z siłą zewnętrzną $f \equiv 0$, jeśli*

$$u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$$

oraz

$$\langle u(t),\, \varphi\rangle - \langle u_0,\, \varphi\rangle + \int_0^t \langle \nabla u(s),\, \nabla\varphi\rangle \, ds + \int_0^t \langle (u(s)\cdot\nabla)\, u(s),\, \varphi\rangle \, ds = 0$$

dla każdej funkcji solenoidalnej $\varphi \in D(\Omega)$ i dla każdego $t \in [0,T)$.

Z definicji 2.1.3 wynika następujący lemat nadający sens warunkowi początkowemu dla słabego rozwiązania.

Lemat 2.1.1 *Każde słabe rozwiązanie u równań Naviera-Stokesa jest L^2 słabo ciągłe względem czasu, tzn.:*

$$\lim_{t\to t_0} \langle u(t),\, v\rangle = \langle u(t_0),\, v\rangle$$

dla każdego $v \in L^2$ i dla każdego $t_0 \in [0,T)$.

Dowód. [Lematu 2.1.1] Weźmy najpierw $v \in D(\Omega)$. Dla każdego ustalonego $t_0 \in [0,T)$, odejmując słabe sformułowania z definicji 2.1.3 dla czasów t i t_0, możemy napisać, że

$$\langle u(t),\, v\rangle - \langle u(t_0),\, v\rangle = -\int_{t_0}^t \langle \nabla u(s),\, \nabla v\rangle \,\mathrm{ds} - \int_{t_0}^t \langle (u(s)\cdot\nabla)\, u(s),\, v\rangle \,\mathrm{ds}.$$

Funkcje v i ∇v są ograniczone zaś $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$. Prawa strona powyższej równości jest więc całkowalna. Dlatego zbiega do zera, gdy $t \to t_0$.

[4] Dokładniejsze wyprowadzenie znaleźć można na przykład we wspomnianej już pracy [G].

Z gęstości, funkcję $v \in L^2$ przybliżamy ciągiem funkcji z $D(\Omega)$ i korzystamy z faktu, że $u \in L^\infty(0,T;H)$, żeby przejść do granicy. $\square$

Z lematu 2.1.1 wynika, że każde słabe rozwiązanie równań NS spełnia warunek początkowy w następującym sensie:

$$u(t) \rightharpoonup u_0, \quad \text{gdy} \quad t \to 0.$$

Ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1.2 (Istnienie słabych rozwiązań równań NS) *Dla każdej funkcji $u_0 \in H$ istnieje co najmniej jedno słabe rozwiązanie trójwymiarowych równań Naviera-Stokesa. To rozwiązanie jest słabo ciągłe w L^2 względem czasu i dodatkowo spełnia nierówność energetyczną:*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 \, ds \leqslant \frac{1}{2}\|u_0\|^2 \tag{2.8}$$

dla każdego $t \in [0,T]$. W konsekwencji $u(t) \to u_0$ silnie w L^2 dla $t \to 0$.

Jak już wiemy każde słabe rozwiązanie równań Naviera-Stokesa jest słabo ciągłe względem czasu. Jednakże do tej pory nie wiadomo, czy każde słabe rozwiązanie spełnia nierówność energetyczną. Silna zbieżność do warunku początkowego jest konsekwencją słabej ciągłości i nierówności energetycznej (2.8). Nie wiadomo więc także, czy każde słabe rozwiązanie zbiega silnie w L^2 do warunku początkowego. Kwestia jednoznaczności słabych rozwiązań jest również problemem otwartym.

Rozwiązania z powyższego twierdzenia 2.1.2 nazywa się powszechnie *słabymi rozwiązaniami Leraya-Hopfa*, gdyż zostały one skonstruowane po raz pierwszy przez Leraya[5] (1934) w całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i Hopfa[6] (1951) dla zbiorów otwartych, ograniczonych $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Twierdzenie 2.1.2 jest bardzo klasycznym wynikiem, znanym od dawna. Jego dowód polega na zastosowaniu metody Galerkina i nie będziemy go tu przedstawiać. Można go znaleźć w wielu miejscach, między innymi w pracach: [G], [JH], [JR], [MP]. Nadmieńmy tylko, że większość potrzebnych składników tego dowodu została już wprowadzona.

Poniżej przedstawiamy schemat tego dowodu.

1. Sformułowanie przybliżeń Galerkinowskich u_n.
2. Rozwiązalność układu równań zwyczajnych na przybliżenia Galerkinowskie i oszacowania *a priori* dla u_n.
3. Oszacowania *a priori* na pochodne czasowe $\frac{d}{dt}u_n$.
4. Przejście graniczne.
5. Nierówność energetyczna.
6. Zbieżność do warunku początkowego.

Ograniczymy się tu do podania, ważnej dla dalszych rozważań, definicji przybliżeń Galerkinowskich dla rozwiązania równań Naviera-Stokesa.

[5] Jean Leray (07.11.1906 - 10.11.1998) - francuski matematyk. Zajmował się topologią algebraiczną, analizą funkcjonalną i równaniami różniczkowymi. Był członkiem Francuskiej Akademii Nauk i Honorowym Członkiem Polskiej Akademii Nauk.

[6] Eberhard Frederich Ferdinand Hopf (17.04.1902 - 24.07.1983) - urodzony w Austro-Węgrzech matematyk i astronom. Jeden z twórców teorii ergodycznej i pionier teorii bifurkacji.

Definicja 2.1.4 (Przybliżenia Galerkinowskie dla NS) *Niech* $\{a^j\}_{j=1}^{+\infty}$ *będzie ortogonalną bazą przestrzeni* V^1 *złożoną z funkcji własnych operatora Stokesa. Funkcję*

$$u_n(x,t) := \sum_{j=1}^{n} c_j^n(t)\, a^j(x)$$

nazywamy n-tym przybliżeniem Galerkinowskim*, jeśli spełnia układ równań*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} u_n(t),\, a^j \right\rangle + \left\langle \nabla u_n(t),\, \nabla a^j \right\rangle + \left\langle (u_n(t)\cdot\nabla)\, u_n(t),\, a^j \right\rangle = 0 \quad \forall\; j = 1,\ldots,n$$

z warunkiem początkowym

$$u_n(x,0) = P_n u_0,$$

gdzie

$$P_n u_0 = \sum_{j=1}^{n} \left\langle u_0,\, a^j \right\rangle a^j.$$

2.2. Trójwymiarowe równania Brinkmana-Forchheimera z konwekcją

Rozumując podobnie jak w przypadku równań Naviera-Stokesa, wyprowadzimy teraz słabe sformułowanie dla równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją. Model ten w języku angielskim nosi nazwę: *"Convective Brinkman-Forchheimer equations"* (patrz np. prace [YZ], [KZ]). W literaturze (patrz np. praca [RZ]) występuje również inny (bliższy naszemu) punkt widzenia, określający te równania jako modyfikację równań Naviera-Stokesa. Nazywa się je wtedy w języku angielskim: *"Tamed Navier-Stokes equations"*.

Równań Brinkmana-Forchheimera używa się w opisie ruchu płynów w nasyconych ośrodkach porowatych. Pojawiają się one także w teorii cieczy nienewtonowskich. Analogiczne równania używane są również w dynamice pływów.

Trójwymiarowe nieściśliwe równania Brinkmana[7]-Forchheimera[8] z konwekcją mają następującą postać:

$$\begin{cases} u_t - \mu\Delta u + (u\cdot\nabla)\, u + \nabla p + \alpha u + \beta\, |u|\, u = f & \text{na} \quad \Omega_T, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{na} \quad \Omega_T, \end{cases} \tag{2.9}$$

gdzie $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)$ jest szukanym polem prędkości płynu, funkcja skalarna $p(x,t)$ - szukanym ciśnieniem, zaś pole $f(x,t) = (f_1, f_2, f_3)$ to dane nam siły zewnętrzne działające na płyn. Stała μ to dodatni współczynnik Brinkmana (efektywna lepkość płynu). Dodatnie stałe α i β to odpowiednio współczynnik Darcy'ego[9] (przepuszczalność materiału porowatego) oraz współczynnik Forchheimera (proporcjonalny do porowatości materiału). Rozważać będziemy układ równań (2.9) z warunkiem początkowym:

$$u(x,0) = u(0) = u_0(x) \quad \text{na} \quad \Omega, \tag{2.10}$$

gdzie funkcja $u_0 \in H$.

[7]H. C. Brinkman - niemiecki fizyk i inżynier. Można znaleźć jego prace z lat 1931-1951.

[8]Philipp Forchheimer (07.08.1852 - 02.10.1933) - austriacki inżynier, pionier w dziedzinie inżynierii lądowej oraz hydrauliki.

[9]Henry Philibert Gaspard Darcy (10.06.1803 - 03.01.1858) - francuski inżynier, który miał znaczący wkład w dziedzinę hydrauliki.

Tak jak w przypadku równań Naviera-Stokesa, zagadnienie (2.9) rozważamy na trójwymiarowym torusie $\Omega = \mathbb{T}^3 = [0, 2\pi]^3$ z periodycznym warunkiem brzegowym:

$$u\,(x + 2\pi e_i, t) = u\,(x, t) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad \forall\, t > 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.11}$$

Podobnie jak dla równań NS, przyjmiemy w równaniu (2.9) współczynnik lepkości μ równy jeden oraz średnie przestrzenne funkcji u i f równe zero.

Współczynniki α i β mają w naszych rezultatach jedynie wpływ na wielkość stałych c w oszacowaniach. Dla uproszczenia rozważań przyjmiemy więc w naszym modelu $\alpha = \beta = 1$. Łatwo można prześledzić zależność wspomnianych stałych c od tych współczynników.

Ostatecznie, rozważać będziemy równania Brinkmana-Forchheimera z konwekcją postaci:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla)\, u + \nabla p + u + |u|\, u = f & \text{na} \quad \Omega_T, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{na} \quad \Omega_T, \end{cases} \tag{2.12}$$

z warunkiem początkowym (2.10) i okresowym warunkiem brzegowym (2.11) oraz z funkcjami u i f mającymi średnie przestrzenne równe zero.

2.2.1. Nierówność energetyczna

Pokażemy teraz nierówność analogiczną do nierówności energetycznej dla równań Naviera-Stokesa.

Zakładając, że u jest funkcją gładką, mnożąc obie strony równania (2.12) przez u i całkując po Ω dostajemy:

$$\langle u_t,\, u\rangle + \langle -\Delta u,\, u\rangle + \langle (u \cdot \nabla)\, u,\, u\rangle + \langle \nabla p,\, u\rangle + \langle u,\, u\rangle + \langle |u|\, u,\, u\rangle = 0.$$

Po całkowaniu przez części otrzymujemy następującą tożsamość:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 + \|u\|^3_{\dot{L}^3} = 0.$$

Całkując teraz po odcinku czasowym $[0, t]$ dla $t \in [0, T)$, mamy równość:

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 \,\mathrm{ds} + \int_0^t \|u(s)\|^2 \,\mathrm{ds} + \int_0^t \|u(s)\|^3_{\dot{L}^3} \,\mathrm{ds} = \frac{1}{2}\|u(0)\|^2.$$

Powinniśmy więc oczekiwać, że dla $u_0 \in H$, rozwiązanie u równań (2.12) będzie miało następującą regularność:

$$u \in L^\infty(0, T;\, H) \cap L^2(0, T;\, V) \cap L^3\left(0, T; \dot{L}^3\right).$$

Przechodząc przez przybliżenia Galerkinowskie, możemy napisać *pierwszą nierówność energetyczną* dla równań CBF, postaci:

$$\frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|^2 + \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2 \,\mathrm{dt} + \int_0^T \|u(t)\|^2 \,\mathrm{dt} + \int_0^T \|u(t)\|^3_{\dot{L}^3} \,\mathrm{dt} \leqslant \frac{1}{2}\|u(0)\|^2. \tag{2.13}$$

2.2.2. Słabe sformułowanie

Zajmiemy się teraz słabym sformułowaniem zagadnienia (2.12) bez sił zewnętrznych, tzn. dla $f \equiv 0$.

Podobnie jak dla równań NS, weźmy najpierw funkcję testową $\psi \in C_0^\infty(\Omega_T)$, postaci:

$$\psi = \varphi + \nabla\gamma.$$

Mnożąc obie strony równania (2.12) (z $f \equiv 0$) przez funkcję ψ, a następnie całkując stronami po czasoprzestrzeni Ω_T, otrzymujemy równania na funkcję prędkości u:

$$-\int_0^T \langle u, \varphi_t\rangle \,\mathrm{dt} + \int_0^T \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle \,\mathrm{dt} + \int_0^T \langle (u\cdot\nabla)\,u, \varphi\rangle \,\mathrm{dt} + \\ + \int_0^T \langle u, \varphi\rangle \,\mathrm{dt} + \int_0^T \langle |u|\,u, \varphi\rangle \,\mathrm{dt} = \langle u_0, \varphi(0)\rangle \tag{2.14}$$

oraz na ciśnienie p w zależności od u:

$$\int_0^T \langle (u\cdot\nabla)\,u, \nabla\gamma\rangle \,\mathrm{dt} + \int_0^T \langle \nabla p, \nabla\gamma\rangle \,\mathrm{dt} + \int_0^T \langle |u|\,u, \nabla\gamma\rangle \,\mathrm{dt} = 0. \tag{2.15}$$

Tak jak w przypadku równań Naviera-Stokesa, skupimy się na słabym sformułowaniu równania na prędkość. Z równania (2.14) oraz nierówności energetycznej (2.13) wynika następująca definicja słabego rozwiązania równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją bez sił zewnętrznych.

Definicja 2.2.1 (Słabe rozwiązanie równań CBF) *Powiemy, że funkcja u jest* słabym rozwiązaniem *równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją* (2.12) *z warunkiem początkowym $u_0 \in H$ i z siłą zewnętrzną $f \equiv 0$, jeśli*

$$u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^3\left(0,T;\dot{L}^3\right) \cap L^2(0,T;V)$$

oraz spełniona jest równość

$$-\int_0^T \langle u(t), \varphi_t(t)\rangle \,dt + \int_0^T \langle \nabla u(t), \nabla\varphi(t)\rangle \,dt + \int_0^T \langle (u(t)\cdot\nabla)\,u(t), \varphi(t)\rangle \,dt + \\ + \int_0^T \langle u(t), \varphi(t)\rangle \,dt + \int_0^T \langle |u(t)|\,u(t), \varphi\rangle \,dt = \langle u_0, \varphi(0)\rangle$$

dla każdej funkcji solenoidalnej $\varphi \in D(\Omega_T)$.

Korzystając z równoważnej definicji słabych rozwiązań równań CBF (dla funkcji testowych zależnych tylko od zmiennej przestrzennej), możemy udowodnić lemat o słabej ciągłości rozwiązań w L^2. Dowód pomijamy, gdyż przebiega analogicznie jak w przypadku równań Naviera-Stokesa.

Lemat 2.2.1 *Każde słabe rozwiązanie u równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją jest L^2 słabo ciągłe względem czasu, tzn.:*

$$\lim_{t \to t_0} \langle u(t),\, v \rangle = \langle u\,(t_0),\, v \rangle$$

dla każdego $v \in L^2$ i dla każdego $t_0 \in [0, T)$.

Dodajmy jeszcze następującą uwagę notacyjną do następnych rozdziałów.

Uwaga 2.2 *Dodatnie stałe c, c_i dla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ jak również c^*, które występują w oszacowaniach w rozdziałach 3, 4 i 5 oznaczają ogólne stałe, których wartości mogą się zmieniać (i często z tej możliwości korzystają) z linijki do linijki.*

Rozdział 3

Rozwiązania silne

W tym rozdziale zajmiemy się klasycznymi wynikami dotyczącymi silnych rozwiązań dla równań Naviera-Stokesa w trzech wymiarach przestrzennych. Pokażemy lokalne w czasie istnienie silnych rozwiązań, ich jednoznaczność oraz globalne istnienie dla małych danych początkowych. Następnie przeniesiemy te wyniki na równania Brinkmana-Forchheimera z konwekcją. W otrzymaniu tych rezultatów niezwykle pomocne będą pewne oszacowania *a priori*.

Wyniki zawarte w tym rozdziale dotyczące równań Naviera-Stokesa są znane od dawna. Dlatego przedstawiamy tu formalne rachunki, które obrazują główne idee dowodów. Można je uzasadnić i podać w pełni rygorystyczne dowody stosując przybliżenia Galerkinowskie u_n.

Załóżmy więc, że $u_0 \in V$ i pomnóżmy obie strony równań Naviera-Stokesa (2.4) bez sił zewnętrznych przez Au (znów zakładając, że u jest gładkim rozwiązaniem i wszystkie poniższe operacje są uzasadnione). Całkując obie strony po zbiorze Ω, otrzymujemy równość:

$$\langle u_t,\, Au\rangle + \langle Au,\, Au\rangle + \langle B(u),\, Au\rangle + \langle \nabla p,\, Au\rangle = 0.$$

Dla większej jasności, wykonajmy formalny rachunek dla pierwszego składnika. Całkowanie przez części daje nam:

$$\langle u_t,\, Au\rangle = \langle \nabla\left(u_t\right),\, \nabla u\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\nabla u,\, \nabla u\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle \nabla u,\, \nabla u\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2.$$

Możemy więc napisać dalej równość:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2 + \left\|Au\right\|^2 + \langle B(u),\, Au\rangle = 0. \tag{3.1}$$

Całkując teraz po czasie na odcinku $[0,T]$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\nabla u(T)\right\|^2 - \left\|\nabla u(0)\right\|^2\right) + \int_0^T \left\|Au(t)\right\|^2 \,\mathrm{dt} + \int_0^T \langle B(u),\, Au\rangle \,\mathrm{dt} = 0.$$

Ostatecznie mamy następującą *drugą nierówność energetyczną* dla równań NS:

$$\frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\nabla u(t)\right\|^2 + \int_0^T \left\|Au(t)\right\|^2 \,\mathrm{dt} + \int_0^T \langle B(u),\, Au\rangle \,\mathrm{dt} \leqslant \frac{1}{2}\left\|\nabla u(0)\right\|^2.$$

Dla $u_0 \in V^1$ mamy więc ograniczone następujące normy:

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;\,V^1)} \quad \text{oraz} \quad \|u\|_{L^2(0,T;\,V^2)}.$$

Możemy teraz zdefiniować, co rozumiemy pod pojęciem silnego rozwiązania równań Naviera-Stokesa.

Definicja 3.0.2 (Silne rozwiązanie równań NS) *Powiemy, że pole wektorowe u jest* silnym rozwiązaniem *równań Naviera-Stokesa* (2.4) *z siłą $f \equiv 0$, jeśli dla warunku początkowego $u_0 \in V$, u jest rozwiązaniem słabym i dodatkowo posiada wyższą regularność, tzn.:*

$$u \in L^\infty \left(0, T; V^1\right) \cap L^2 \left(0, T; V^2\right).$$

Analogiczny formalny rachunek dla równań Brinkmana-Forchheimera (2.12) bez sił zewnętrznych daje nam:

$$\langle u_t, Au\rangle + \langle Au, Au\rangle + \langle B(u), Au\rangle + \langle \nabla p, Au\rangle + \langle u, Au\rangle + \langle C(u), Au\rangle = 0.$$

Po całkowaniu przez części dostajemy więc równość:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \|Au\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \langle B(u), Au\rangle + \langle C(u), Au\rangle = 0.$$

Całkowanie po czasie na odcinku $[0, T]$ daje:

$$\frac{1}{2}\left(\|\nabla u(T)\|^2 - \|\nabla u(0)\|^2\right) + \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2 \,\mathrm{dt} + \int_0^T \|Au(t)\|^2 \,\mathrm{dt} + \int_0^T \langle B(u), Au\rangle \,\mathrm{dt} + \int_0^T \langle C(u), Au\rangle \,\mathrm{dt} = 0.$$

Dostajemy zatem następującą *drugą nierówność energetyczną* dla równań CBF:

$$\frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla u(t)\|^2 + \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2 \,\mathrm{dt} + \int_0^T \|Au(t)\|^2 \,\mathrm{dt} + \int_0^T \langle B(u), Au\rangle \,\mathrm{dt} + \int_0^T \langle C(u), Au\rangle \,\mathrm{dt} \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla u(0)\|^2.$$

Dla $u_0 \in V^1$ mamy więc ograniczone następujące normy:

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V^1)} \quad \text{oraz} \quad \|u\|_{L^2(0,T;V^2)}.$$

Wynika stąd poniższa definicja silnych rozwiązań równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją.

Definicja 3.0.3 (Silne rozwiązanie równań CBF) *Powiemy, że pole wektorowe u jest* silnym rozwiązaniem *równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją* (2.12) *z siłą $f \equiv 0$, jeśli dla warunku początkowego $u_0 \in V$, u jest rozwiązaniem słabym i dodatkowo posiada wyższą regularność, tzn.:*

$$u \in L^\infty \left(0, T; V^1\right) \cap L^2 \left(0, T; V^2\right).$$

3.1. Lokalne istnienie silnych rozwiązań

W tym rozdziale wykażemy lokalne w czasie istnienie silnych rozwiązań dla równań Naviera-Stokesa oraz dla równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją.

Oszacujmy najpierw wyrażenie $\langle B(u),\, Au\rangle$. Korzystając z nierówności Höldera, Sobolewa i Younga, możemy oszacować to wyrażenie w następujący sposób:

$$|\langle B(u),\, Au\rangle| \leqslant \int\limits_\Omega |u|\,|\nabla u|\,|Au|\,\mathrm{dx} \leqslant \|u\|_{L^6}\,\|\nabla u\|_{L^3}\,\|Au\|_{L^2} \leqslant c\,\|\nabla u\|\,\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\,\|\nabla u\|_{L^6}^{\frac{1}{2}}\,\|Au\| \leqslant$$

$$\leqslant c\,\|\nabla u\|^{\frac{3}{2}}\,\|Au\|^{\frac{3}{2}} \leqslant c\,\|\nabla u\|^6 + \frac{1}{2}\,\|Au\|^2\,. \tag{3.2}$$

Przyda nam się również następujący lemat, którego dowód polega na całkowaniu przez części i różniczkowaniu modułu. Można go znaleźć w pracy [RS].

Lemat 3.1.1 *Dla każdego $k \geqslant 2$, jeśli $u \in H^2$, to:*

$$\int\limits_\Omega -\Delta u\,|u|^{k-2}\,u\,dx \geqslant \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,|u|^{k-2}\;dx.$$

W szczególności, na mocy lematu 3.1.1 możemy napisać dla interesującego nas operatora C (oraz dla bezdywergentnej funkcji $u \in V^2$), że:

$$\langle Au,\, C(u)\rangle = \int\limits_\Omega -\Delta u\,|u|\,u\,\mathrm{dx} \geqslant \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,|u|\,\mathrm{dx} \geqslant 0. \tag{3.3}$$

3.1.1. Równania Naviera-Stokesa

Zacznijmy od równań Naviera-Stokesa, dla których lokalne istnienie silnych rozwiązań jest wynikiem znanym od bardzo dawna (Kiselev i Ładyżeńska[1], 1957).

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1.2 (Lokalne istnienie silnych rozwiązań równań Naviera-Stokesa) *Dla każdego $u_0 \in V^1$ istnieje takie $T > 0$, że rozwiązanie startujące z u_0 jest silnym rozwiązaniem równań Naviera-Stokesa* (2.4) *z siłą $f \equiv 0$ na przedziale czasowym $[0, T]$.*

Dowód. [Twierdzenia 3.1.2] Wstawiając oszacowanie (3.2) do równości (3.1) otrzymujemy następującą nierówność różniczkową:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\,\|Au\|^2 \leqslant c\,\|\nabla u\|^6\,. \tag{3.4}$$

Oznaczając przez $X(t) = \|u(t)\|_{H^1}^2$, zapisujemy interesującą nas nierówność (3.4) w postaci:

$$\frac{d}{dt}X(t) + \|Au\|^2 \leqslant cX(t)^3.$$

Opuszczając normę $\|Au\|^2$, otrzymujemy zatem następujące zagadnienie różniczkowe:

$$\begin{cases} X'(t) \leqslant cX(t)^3, \\ X(0) = \|u_0\|_{H^1}^2\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

[1] Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya (07.03.1922 - 12.01.2004) - sowiecka i rosyjska matematyczka. Była znana z pracy nad równaniami różniczkowymi cząstkowymi i mechaniką płynów.

Rozważmy więc związane z nierównością (3.5) zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{cases} Y'(t) = cY(t)^3, \\ Y(0) = X(0), \end{cases} \tag{3.6}$$

które potrafimy rozwiązać. Rozwiązanie tego równania:

$$Y(t) = \frac{Y(0)}{\sqrt{1 - 2cY(0)^2 t}}$$

wybucha w skończonym czasie:

$$t = \frac{1}{2cY(0)^2}.$$

Zauważmy, że na mocy zasady porównawczej, rozwiązanie nierówności różniczkowej (3.5) jest dla wszystkich możliwych czasów $t > 0$ poniżej rozwiązania równania różniczkowego (3.6):

$$X(t) \leqslant Y(t) \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{2c\left\|u_0\right\|_{H^1}^4}.$$

W szczególności, na przykład dla $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4c\|u_0\|_{H^1}^4}$, mamy:

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 = X(t) \leqslant \frac{\|u_0\|_{H^1}^2}{\sqrt{1 - 2c\left\|u_0\right\|_{H^1}^4 t}} \leqslant \frac{\|u_0\|_{H^1}^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}}.$$

Wracając do nierówności (3.4) widzimy teraz, że

$$\frac{d}{dt}\left\|\nabla u(t)\right\|^2 + \left\|Au(t)\right\|^2 \leqslant c\left\|\nabla u(t)\right\|^6 \leqslant c\frac{\|u_0\|_{H^1}^6}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3}.$$

Całkując tę nierówność po czasie dla $t \in \left[0, \frac{1}{4c\|u_0\|_{H^1}^4}\right]$, uzyskujemy nierówność:

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left\|u(s)\right\|_{H^1}^2 \, \mathrm{ds} + \int_0^t \left\|u(s)\right\|_{H^2}^2 \, \mathrm{ds} \leqslant c\frac{\|u_0\|_{H^1}^6}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3} t.$$

Mamy więc:

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 - \|u(0)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \|u(s)\|_{H^2}^2 \, \mathrm{ds} \leqslant c\frac{\|u_0\|_{H^1}^6}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3} \frac{1}{4c\left\|u_0\right\|_{H^1}^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\|u_0\right\|_{H^1}^2,$$

co ostatecznie możemy zapisać w postaci nierówności:

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \|u(s)\|_{H^2}^2 \, \mathrm{ds} \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\left\|u_0\right\|_{H^1}^2.$$

Pokazaliśmy zatem, że

$$\int_0^T \|u(s)\|_{H^2}^2 \, \mathrm{ds} \leqslant \text{const.} \quad \text{dla} \quad T := \frac{1}{4c\left\|u_0\right\|_{H^1}^4},$$

co kończy dowód. □

3.1.2. Równania Brinkmana-Forchheimera z konwekcją

Dla równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją ma miejsce analogiczne twierdzenie.

Twierdzenie 3.1.3 (Lokalne istnienie silnych rozwiązań równań CBF, KH) *Dla każdego $u_0 \in V^1$ istnieje takie $T > 0$, że rozwiązanie startujące z u_0 jest silnym rozwiązaniem równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją* (2.12) *z siłą $f \equiv 0$ na przedziale czasowym $[0, T]$.*

Dowód. [Twierdzenia 3.1.3, **KH**] Równanie (2.12) w postaci funkcjonalnej ma postać:

$$u_t + Au + B(u) + u + C(u) = 0.$$

Mnożąc tę równość stronami przez Au i całkując po Ω, dostajemy:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \|Au\|^2 + \underbrace{\|\nabla u\|^2}_{\geqslant 0} + \langle C(u),\, Au\rangle \leqslant |\langle B(u),\, Au\rangle| \,. \tag{3.7}$$

Pamiętamy, że na mocy lematu 3.1.1 mamy również następującą nierówność (3.3):

$$\langle C(u),\, Au\rangle \geqslant 0.$$

Korzystając jeszcze raz z oszacowania (3.2) dla prawej strony nierówności (3.7), otrzymujemy zatem taką samą nierówność jak w przypadku równań Naviera-Stokesa:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\|Au\|^2 \leqslant c\,\|\nabla u\|^6 \,.$$

Dowód kończy powtórzenie rozumowania z paragrafu 3.1.1. □

3.2. Jednoznaczność silnych rozwiązań

Zajmiemy się teraz jednoznacznością silnych rozwiązań równań Naviera-Stokesa oraz konwekcyjnego równania Brinkmana-Forchheimera, dla płynów nieściśliwych. Przez jednoznaczność rozumiemy tu jednoznaczność rozwiązań w klasie rozwiązań silnych[2].

W tym celu założymy, że mamy dwa silne rozwiązania danego problemu: u oraz v. Oznaczymy ich różnicę przez $w := u - v$ i będziemy chcieli wykazać, że w istocie funkcja $w = 0$. Zacznijmy od mniej skomplikowanego przypadku, czyli równań Naviera-Stokesa.

3.2.1. Równania Naviera-Stokesa

Udowodnimy teraz twierdzenie mówiące o jednoznaczności silnych rozwiązań równań Naviera-Stokesa w klasie rozwiązań silnych.

Twierdzenie 3.2.1 (Jednoznaczność silnych rozwiązań równań NS) *Niech funkcje u i v będą dwoma silnymi rozwiązaniami równań Naviera-Stokesa* (2.4) *z siłą $f \equiv 0$, startującymi z tego samego warunku początkowego u_0. Wtedy $u = v$ dla wszystkich czasów $t \geqslant 0$.*

[2] W odróżnieniu od tzw. własności *"weak-strong uniqueness"*, która mówi, że rozwiązania silne równań Naviera-Stokesa są jednoznaczne w klasie słabych rozwiązań.

W dowodzie twierdzenia skorzystamy z faktu, że (w przeciwieństwie do rozwiązań słabych) rozwiązania silne równań Naviera-Stokesa bez sił zewnętrznych natychmiast stają się gładkie. Dowód tego faktu można znaleźć np. w monografii [CF].

Uwaga 3.1 *Rozwiązania silne równań Naviera-Stokesa mogą być użyte jako funkcje testujące, tzn. jeśli funkcja u jest silnym rozwiązaniem, to* $u \in C_0^\infty(\Omega_T)$.

Dowód. [Twierdzenia 3.2.1] Niech $w := u - v$ będzie różnicą silnych rozwiązań u i v. Wtedy oczywiście $w(0) = u(0) - v(0) = 0$. Zapiszmy więc sformułowania wariacyjne dla u i v:

$$\begin{cases} -\int\limits_0^t \langle u, \varphi_s\rangle \,\mathrm{ds} + \int\limits_0^t \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle \,\mathrm{ds} + \int\limits_0^t \langle B(u), \varphi\rangle \,\mathrm{ds} = \langle u(0), \varphi(0)\rangle - \langle u(t), \varphi(t)\rangle, \\ -\int\limits_0^t \langle v, \varphi_s\rangle \,\mathrm{ds} + \int\limits_0^t \langle \nabla v, \nabla\varphi\rangle \,\mathrm{ds} + \int\limits_0^t \langle B(v), \varphi\rangle \,\mathrm{ds} = \langle v(0), \varphi(0)\rangle - \langle v(t), \varphi(t)\rangle. \end{cases}$$

Biorąc ich różnicę, dostajemy tożsamość:

$$-\int\limits_0^t \langle w, \varphi_s\rangle \,\mathrm{ds} + \int\limits_0^t \langle \nabla w, \nabla\varphi\rangle \,\mathrm{ds} + \int\limits_0^t \langle B(u) - B(v), \varphi\rangle \,\mathrm{ds} = \left\langle \underbrace{w(0)}_{=0}, \varphi(0)\right\rangle - \langle w(t), \varphi(t)\rangle.$$

Korzystając z uwagi 3.1, wstawiamy do tego równania $\varphi := w$. Otrzymujemy:

$$\underbrace{-\int\limits_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|w\|^2 \,\mathrm{ds}}_{=-\frac{1}{2}\|w(t)\|^2} + \int\limits_0^t \|\nabla w\|^2 \,\mathrm{ds} + \int\limits_0^t \langle B(u) - B(v), w\rangle \,\mathrm{ds} = -\|w(t)\|^2.$$

Stąd dostajemy ostatecznie następującą nierówność:

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|^2 + \int\limits_0^t \|\nabla w\|^2 \,\mathrm{ds} \leqslant \left|\int\limits_0^t \langle B(u) - B(v), w\rangle \,\mathrm{ds}\right|. \tag{3.8}$$

Zauważmy, że po prawej stronie nierówności (3.8) występują trzy różne funkcje u, v i w. Łatwo możemy zmniejszyć tę liczbę, korzystając z definicji funkcji w i dwuliniowości operatora B. Wstawmy na przykład $v = u - w$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} \langle B(u) - B(v), w\rangle &= \langle B(u) - B(u-w, u-w), w\rangle = \langle B(u), w\rangle - \langle B(u-w, u-w), w\rangle = \\ &= \underbrace{\langle B(u), w\rangle - \langle B(u,u), w\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle B(w,w), w\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle B(u,w), w\rangle}_{=0} + \langle B(w,u), w\rangle. \end{aligned}$$

Tak więc spełniona jest równość:

$$\langle B(u) - B(v), w\rangle = \langle B(w,u), w\rangle.$$

Z tego faktu oraz z nierówności Höldera, szacujemy prawą stronę (3.8) w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \left|\int\limits_0^t \langle B(u) - B(v), w\rangle \,\mathrm{ds}\right| &\leqslant \int\limits_0^t |\langle B(w,u), w\rangle| \,\mathrm{ds} = \int\limits_0^t \left|\int\limits_\Omega (w\cdot\nabla)\, uw \,\mathrm{dx}\right| \mathrm{ds} \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_0^t \|w\|_{L^4} \|\nabla u\|_{L^2} \|w\|_{L^4} \,\mathrm{ds} = \int\limits_0^t \|w\|_{L^4}^2 \|\nabla u\| \,\mathrm{ds}. \end{aligned}$$

Interpolując normę w L^4 między L^2 i L^6 i korzystając z twierdzenia Sobolewa, mamy:

$$\|w\|_{L^4} \leqslant \|w\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|w\|_{L^6}^{\frac{3}{4}} \leqslant c \|w\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|\nabla w\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} .$$

Kontynuując dalej szacowanie, z nierówności Younga dla wykładników $\frac{4}{3}$ i 4, dostajemy nierówność:

$$\left| \int_0^t \langle B(u) - B(v), w \rangle \, \mathrm{ds} \right| \leqslant \int_0^t c \|\nabla w\|^{\frac{3}{2}} \|w\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\| \, \mathrm{ds} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla w\|^2 \, \mathrm{ds} + c \int_0^t \|w\|^2 \|\nabla u\|^4 \, \mathrm{ds}.$$

Nierówność (3.8) przyjmuje więc ostatecznie postać:

$$\frac{1}{2} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla w(s)\|^2 \, \mathrm{ds} \leqslant c \int_0^t \|\nabla u(s)\|^4 \|w(s)\|^2 \, \mathrm{ds}.$$

W związku z tym, że funkcja $\alpha(s) := \|\nabla u(s)\|^4$ jest całkowalna, z nierówności Gronwalla (w postaci całkowej) wnioskujemy, że $w = 0$ dla wszystkich czasów $t \geqslant 0$. □

3.2.2. Równania Brinkmana-Forchheimera z konwekcją

Teraz udowodnimy analogiczne twierdzenie dla równań Brinkmana-Forchhaimera z konwekcją.

Twierdzenie 3.2.2 (Jednoznaczność silnych rozwiązań równań CBF, KH) *Niech u i v będą dwoma silnymi rozwiązaniam równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją* (2.12) *z siłą $f \equiv 0$, startującymi z tego samego warunku początkowego u_0. Wtedy $u = v$ dla wszystkich czasów $t \geqslant 0$.*

Dowód będzie bardzo podobny, jak w przypadku równań Naviera-Stokesa. Musimy poradzić sobie tylko z dodatkowym składnikiem nieliniowym $C(u)$.

Dowód. [Twierdzenia 3.2.2, **KH**] Weźmy jak poprzednio $w := u - v$. Wtedy oczywiście $w(0) = 0$. Sformułowania wariacyjne równań Brinkmana-Forchheimera dla funkcji u i v wyglądają następująco:

$$\begin{cases} -\int_0^t \langle u, \varphi_s \rangle \, \mathrm{ds} + \int_0^t \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, \mathrm{ds} + \int_0^t \langle B(u), \varphi \rangle \, \mathrm{ds} + \int_0^t \langle u, \varphi \rangle \, \mathrm{ds} + \int_0^t \langle C(u), \varphi \rangle \, \mathrm{ds} = \\ \qquad = \langle u(0), \varphi(0) \rangle - \langle u(t), \varphi(t) \rangle , \\ -\int_0^t \langle v, \varphi_s \rangle \, \mathrm{ds} + \int_0^t \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle \, \mathrm{ds} + \int_0^t \langle B(v), \varphi \rangle \, \mathrm{ds} + \int_0^t \langle v, \varphi \rangle \, \mathrm{ds} + \int_0^t \langle C(v), \varphi \rangle \, \mathrm{ds} = \\ \qquad = \langle v(0), \varphi(0) \rangle - \langle v(t), \varphi(t) \rangle . \end{cases}$$

Biorąc teraz różnicę tych równań, otrzymujemy:

$$-\int_0^t \langle w,\, \varphi_s\rangle\,\mathrm{ds} + \int_0^t \langle \nabla w,\, \nabla\varphi\rangle\,\mathrm{ds} + \int_0^t \langle B(u)-B(v),\, \varphi\rangle\,\mathrm{ds} + \int_0^t \langle w,\, \varphi\rangle\,\mathrm{ds} + \\ + \int_0^t \langle C(u)-C(v),\, \varphi\rangle\,\mathrm{ds} = -\langle w(t),\, \varphi(t)\rangle\,.$$

Korzystając z analogicznego do uwagi 3.1 faktu dla równań CBF, wstawiamy do tego równania $\varphi := w$ i dostajemy:

$$-\frac{1}{2}\,\|w(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla w\|^2\,\mathrm{ds} + \int_0^t \langle B(u)-B(v),\, w\rangle\,\mathrm{ds} + \int_0^t \|w\|^2\,\mathrm{ds} + \\ + \int_0^t \langle C(u)-C(v),\, w\rangle\,\mathrm{ds} = -\|w(t)\|^2\,.$$

Porządkując powyższą równość i przenosząc nieliniowość związaną z konwekcją, możemy napisać następującą nierówność:

$$\frac{1}{2}\,\|w(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla w\|^2\,\mathrm{ds} + \int_0^t \|w\|^2\,\mathrm{ds} + \int_0^t \langle C(u)-C(v),\, w\rangle\,\mathrm{ds} \leqslant \\ \leqslant \left|\int_0^t \langle B(u)-B(v),\, w\rangle\,\mathrm{ds}\right|. \tag{3.9}$$

Pamiętamy, że ze składnikiem konwekcyjnym poradziliśmy sobie już wcześniej:

$$\left|\int_0^t \langle B(u)-B(v),\, w\rangle\,\mathrm{ds}\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla w\|^2\,\mathrm{ds} + c\int_0^t \|w\|^2\,\|\nabla u\|^4\,\mathrm{ds}.$$

Zajmijmy się teraz nieliniowością związaną z operatorem C. Korzystając z monotoniczności (lemat 1.2.6), otrzymujemy:

$$\langle C(u)-C(v),\, w\rangle = \langle |u|\,u - |v|\,v,\, u-v\rangle \geqslant 0.$$

Na mocy powyższych oszacowań, nierówność (3.9) przyjmuje ostatecznie postać:

$$\frac{1}{2}\,\|w(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla w(s)\|^2\,\mathrm{ds} + \int_0^t \|w(s)\|^2\,\mathrm{ds} \leqslant c\int_0^t \|\nabla u(s)\|^4\,\|w(s)\|^2\,\mathrm{ds}.$$

Stąd mamy następującą nierówność całkową:

$$\|w(t)\|^2 \leqslant c\int_0^t \|\nabla u(s)\|^4\,\|w(s)\|^2\,\mathrm{ds}.$$

Z nierówności Gronwalla ponownie wnioskujemy, że $w = 0$ z dokładnością do zbioru miary zero. Tak więc $u = v$ prawie wszędzie, co kończy dowód jednoznaczności silnych rozwiązań. □

3.3. Globalne istnienie silnych rozwiązań dla małych danych

W tym podrozdziale zajmiemy się kolejnym klasycznym wynikiem, a mianowicie globalnym istnieniem silnych rozwiązań w równaniach Naviera-Stokesa dla małych danych początkowych. W tym celu cofnijmy się teraz do wzoru (3.1):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \|Au\|^2 + \langle B(u),\, Au\rangle = 0.$$

Ponadto przypomnijmy sobie oszacowanie (3.2):

$$|\langle B(u),\, Au\rangle| \leqslant c\,\|\nabla u\|^{\frac{3}{2}}\,\|Au\|^{\frac{3}{2}}\,.$$

Łącząc te dwa fakty ze sobą, otrzymujemy nierówność postaci:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{H^1}^2 + \|u\|_{H^2}^2 \leqslant c\,\|u\|_{H^1}^{\frac{3}{2}}\,\|u\|_{H^2}^{\frac{3}{2}} = c\,\|u\|_{H^1}\,\|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\,\|u\|_{H^2}^{\frac{3}{2}}\,. \tag{3.10}$$

Zwróćmy teraz uwagę, że $H^2 \subset H^1$, a więc $\|u\|_{H^1} \leqslant c\,\|u\|_{H^2}$. Używając tego faktu w nierówności (3.10), dostajemy:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{H^1}^2 + \|u\|_{H^2}^2 \leqslant c\,\|u\|_{H^1}\,\|u\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\,\|u\|_{H^2}^{\frac{3}{2}} = c\,\|u\|_{H^1}\,\|u\|_{H^2}^{2}\,.$$

Możemy teraz przenieść normę u w H^2 z lewej na prawą stronę nierówności, żeby dostać (po uporządkowaniu) następującą nierówność różniczkową:

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{H^1}^2 \leqslant 2\,\|u\|_{H^2}^2\,(c\,\|u\|_{H^1} - 1)\,. \tag{3.11}$$

Zakładając więc, że zaczynamy z odpowiednio małych danych początkowych takich, że:

$$\|u_0\|_{H^1} \leqslant \frac{1}{c},$$

otrzymujemy z nierówności (3.11), że

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{H^1}^2 \leqslant 0.$$

Oznacza to, że norma u w H^1 jest nierosnąca w czasie. Jest więc ograniczona dla wszystkich czasów $t \geqslant 0$, a więc nasze rozwiązanie nie wybucha (jest globalne w czasie).

Przypomnijmy, że na mocy lematu 3.1.1 mamy następującą nierówność:

$$\langle C(u),\, Au\rangle \geqslant 0.$$

Zatem ten sam dowód istnienia globalnych rozwiązań dla małych danych działa także w przypadku równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją.

Odpowiednik równania (3.10) wygląda następująco:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{H^1}^2 + \|u\|_{H^2}^2 + \|u\|_{H^1}^2 + \underbrace{\langle C(u),\, Au\rangle}_{\geqslant 0} \leqslant c\,\|u\|_{H^1}^{\frac{3}{2}}\,\|u\|_{H^2}^{\frac{3}{2}}\,. \tag{3.12}$$

Z równania (3.12) znów otrzymujemy nierówność

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{H^1}^2 + \|u\|_{H^2}^2 \leqslant c\,\|u\|_{H^1}\,\|u\|_{H^2}^2\,.$$

Dalej dowód przebiega analogicznie jak dla równań Naviera-Stokesa.

Rozdział 4

Stabilność silnych rozwiązań

Zajmiemy się w tym rozdziale stabilnością regularności (ang. "*robustness of regularity*") rozwiązań równań Naviera-Stokesa oraz Brinkmana-Forchheimera z konwekcją.

Niech teraz u_0, $v_0 \in V^1 = H \cap \dot{H}^1$. Ustalmy $T > T' > 0$. Niech u będzie silnym rozwiązaniem na odcinku $[0, T]$ równań CBF z siłą f i warunkiem początkowym u_0 oraz v - silnym rozwiązaniem na $[0, T']$ równań CBF z siłą g i warunkiem początkowym v_0. Chcemy pokazać, że przy pewnych warunkach, funkcję v można przedłużyć do silnego rozwiązania na odcinku $[0, T]$. Mamy więc następujące równania[1]:

$$\begin{cases} u_t + Au + B(u) + \alpha u + \beta C\left(u\right) = f, & u(x,0) = u_0, \\ v_t + Av + B(v) + \alpha v + \beta C\left(v\right) = g, & v(x,0) = v_0. \end{cases}$$

Oznaczmy $w := u - v$ i odejmijmy te dwa równania stronami. Otrzymamy równanie:

$$w_t + Aw + B(u) - B(v) + \alpha w + \beta\left(C(u) - C(v)\right) = f - g \tag{4.1}$$

z warunkiem początkowym:

$$w(x,0) = u_0 - v_0. \tag{4.2}$$

W dowodzie stabilności silnych rozwiązań dla powyższych równań przydatny będzie następujący lemat, pozwalający oszacować czas istnienia rozwiązań pewnych nierówności różniczkowych w zależności od współczynników.

Lemat 4.0.1 *Niech $T > 0$, $\alpha > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$ oraz niech $\delta(t)$ będzie nieujemną, ciągłą funkcją na odcinku $[0, T]$. Niech nieujemna funkcja y spełnia następującą nierówność różniczkową:*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y(t) \leqslant \alpha y(t)^n + \delta(t), \\ y(0) = y_0 \geqslant 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Zdefiniujmy wielkość:

$$\eta = y_0 + \int_0^T \delta(s)\, ds.$$

Jeśli spełniony jest warunek:

$$\eta < \frac{1}{\left[(n-1)\,\alpha T\right]^{\frac{1}{n-1}}},$$

[1] Wygodniej jest tu napisać równana CBF z parametrami α i β. Dla parametrów $\alpha = \beta = 0$ dostajemy bowiem równania NS jako szczególny przypadek.

(i) to $y(t)$ pozostaje ograniczone na odcinku $[0,T]$

oraz

(ii) $y(t) \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$ jednostajnie na odcinku $[0,T]$.

Dowód lematu 4.0.1 pominiemy z dwóch powodów. Po pierwsze, można go znaleźć w pracy [DR]. Ponadto jest on bardzo podobny do dowodu poniższego lematu 4.0.2, który przedstawimy. Główna idea dowodu w obu przypadkach polega na odpowiednim zastosowaniu nierówności Gronwalla.

Lemat 4.0.2 (KH) *Niech $T>0$, $a,b>0$ oraz $n\in\mathbb{N}$ $(n>1)$. Niech y będzie nieujemną funkcją spełniającą następującą nierówność różniczkową:*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) \leqslant ay(t)^n + by(t)^{n-1}, \\ y(0)=y_0. \end{cases} \tag{4.4}$$

z warunkiem początkowym $y_0>0$.

Jeśli:

$$y_0^{n-2}\left(y_0+\frac{b}{a}\right) < \frac{1}{(n-1)\,aT}, \tag{4.5}$$

to

(i) $y(t)$ pozostaje ograniczone na odcinku $[0,T]$

oraz

(ii) $y(t) \underset{y_0\to 0}{\longrightarrow} 0$ jednostajnie na odcinku $[0,T]$.

Uwaga 4.1 *Warto w tym miejscu zwócić uwagę, że lemat 4.0.2 jest głównym składnikiem umożliwiającym dowód stabilności regularności dla równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją. Lemat ten został sformułowany i udowodniony przez autora niniejszej pracy.*

Dowód. [Lematu 4.0.2, **KH**] W związku z tym, że $y(t),a,b$ oraz y_0 są nieujemne, supremum wzięte po wszystkich rozwiązaniach nierówności (4.4) jest osiągane dla funcji $Y(t)$ bedącej rozwiązaniem zagadnienia z równością:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}Y(t) = aY(t)^n + bY(t)^{n-1}, \\ Y(0)=y_0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Rozpatrzmy teraz zagadnienie pomocnicze:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}Z(t) = \left(a+\dfrac{b}{y_0}\right)Z(t)^n, \\ Z(0)=y_0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Łatwe całkowanie przekonuje nas, że rozwiązanie zagadnienia 4.7 wygląda następująco:

$$Z(t) = \frac{y_0}{\left[1-(n-1)\,y_0^{n-1}\left(a+\frac{b}{y_0}\right)t\right]^{\frac{1}{n-1}}} \quad \text{dla} \quad t\in[0,T]. \tag{4.8}$$

Widzimy, że $Z(t)$ pozostaje ograniczone na odcinku $[0,T]$, jeśli spełniona jest nierówność:

$$1 > (n-1)\, y_0^{n-1} \left(a + \frac{b}{y_0}\right) T,$$

z której bezpośrednio wynika postać warunku (4.5).

Oznaczmy więc $w := Y - Z$. Chcemy pokazać, że $w(t) \leqslant 0$ dla $t \in [0,T]$. Odejmijmy stronami równania (4.6)-(4.7). Otrzymujemy następujące równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} w(t) &= a\left(Y(t)^n - Z(t)^n\right) + b\left(Y(t)^{n-1} - \frac{1}{y_0} Z(t)^n\right) = \\ &= a w(t) \sum_{k=0}^{n-1} Y(t)^{n-1-k} Z(t)^k + \frac{b}{y_0}\left(Y(t)^{n-1} y_0 - Z(t)^n\right).\end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę fakt, że $y_0 \leqslant Y(t)$ dla $t \in [0,T]$, dostajemy stąd nierówność różniczkową postaci:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} w(t) &\leqslant a w(t) \sum_{k=0}^{n-1} Y(t)^{n-1-k} Z(t)^k + \frac{b}{y_0}\left(Y(t)^n - Z(t)^n\right) = \\ &= \left(a + \frac{b}{y_0}\right) w(t) \sum_{k=0}^{n-1} Y(t)^{n-1-k} Z(t)^k.\end{aligned}$$

Wiemy już, że jeśli warunek (4.5) jest spełniony, to funkcja $Z(t)$ jest ograniczona na odcinku $[0,T]$. Funkcja $Y(t)$ istnieje przez jakiś czas $T' > 0$ i przynajmniej dla małych czasów jest blisko funkcji $Z(t)$. Ponadto $Z(t)$ wybucha wcześniej niż funkcja $Y(t)$, ponieważ w równaniu ma większy współczynnik przy najwyższej potędze, która decyduje o zachowaniu funkcji dla wartości większych od jeden. Znaczy to, że czas istnienia $T' > T$ i funkcja $Y(t)$ pozostaje ograniczona na odcinku $[0,T]$.

Wiemy więc, że jeśli warunek (4.5) jest spełniony, to $Y(t)$ i $Z(t)$ są ograniczone na odcinku $[0,T]$. Istnieje więc takie $M > 0$, że:

$$\frac{d}{dt} w(t) \leqslant \left(a + \frac{b}{y_0}\right) M w(t). \tag{4.9}$$

Stosując teraz nierówność Gronwalla do (4.9), mamy następujące oszacowanie:

$$w(t) \leqslant \underbrace{w(0)}_{=0} \exp\left[\left(a + \frac{b}{y_0}\right) M t\right] = 0 \quad \text{dla} \quad t \in [0,T].$$

Znaczy to, że $Y(t) \leqslant Z(t)$ dla $t \in [0,T]$.

Ze wzoru (4.8) dla $t = T$ jest jasne, że $Z(T) \underset{y_0 \to 0}{\longrightarrow} 0$. Mamy też nierówności:

$$y(t) \leqslant Y(t) \leqslant Z(t) \leqslant Z(T) \quad \text{dla} \quad t \in [0,T].$$

Stąd wynika, że $y(t)$ zbiega do zera jednostajnie na odcinku $[0,T]$, gdy $y_0 \to 0$. □

4.1. Równania Naviera-Stokesa

Teraz zajmiemy się stabilnością w równaniach Naviera-Stokesa. Weźmy więc w równaniu (4.1) $\alpha = \beta = 0$. Dostajemy następujący problem:

$$\begin{cases} w_t + Aw + B(u) - B(v) = f - g, \\ w(x,0) = u_0 - v_0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Biorąc pod uwagę, że u jest silnym rozwiązaniem na $[0,T]$ i chcemy to samo powiedzieć o v, zmieńmy trochę postać (4.10), tak aby pozbyć się v. Z definicji $v = u - w$, mamy zatem tożsamość:

$$\begin{aligned} B(u) - B(v) &= B(u) - B(u-w) = B(u,u) - B(u-w, u-w) = \\ &= B(u,u) - B(u,u) - B(w,w) + B(u,w) + B(w,u) = B(u,w) + B(w,u) - B(w,w). \end{aligned}$$

Mnożąc teraz obie strony równania (4.10) przez Aw (ponownie zakładamy w tym miejscu, że funkcja w ma regularność uzasadniającą poniższe operacje) i całkując po Ω dostajemy równanie:

$$\langle w_t,\, Aw\rangle + \langle Aw,\, Aw\rangle + \langle B(u) - B(v),\, Aw\rangle = \langle f - g,\, Aw\rangle .$$

Całkując przez części pierwszy składnik, przenosząc nieliniowość na prawą stronę i obkładając obie strony modułami, otrzymujemy stąd następującą nierówność:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla w\right\|^2 + \left\|Aw\right\|^2 \leqslant \left|\langle f-g,\, Aw\rangle\right| + \left|\langle B(u,w) + B(w,u) - B(w,w),\, Aw\rangle\right| . \tag{4.11}$$

4.1.1. Oszacowania a priori

Zajmiemy się teraz szacowaniem poszczególnych składników po prawej stronie nierówności (4.11). Będziemy tu wielokrotnie korzystać z nierówności Höldera i Younga oraz nierówności Sobolewa, a także z nierówności interpolacyjnych. Na podstawie pracy [DR] możemy napisać następujące oszacowania:

(i)

$$\left|\langle f-g,\, Aw\rangle\right| \leqslant \langle |f-g|,\, |Aw|\rangle \leqslant \left\|f-g\right\| \left\|Aw\right\| \leqslant c\left\|f-g\right\|^2 + \frac{1}{8}\left\|Aw\right\|^2 , \tag{4.12}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \left|\langle B(u,w),\, Aw\rangle\right| &\leqslant \langle |u|\,|\nabla w|,\, |Aw|\rangle \leqslant \left\|u\right\|_{L^6} \left\|\nabla w\right\|_{L^3} \left\|Aw\right\| \leqslant \\ &\leqslant c\left\|u\right\|_{H^1} \left\|\nabla w\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla w\right\|_{L^6}^{\frac{1}{2}} \left\|Aw\right\| \leqslant c\left\|u\right\|_{H^1} \left\|w\right\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \left\|Aw\right\|^{\frac{3}{2}} \leqslant \\ &\leqslant c\left\|u\right\|_{H^1}^4 \left\|w\right\|_{H^1}^2 + \frac{1}{8}\left\|Aw\right\|^2 , \end{aligned} \tag{4.13}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \left|\langle B(w,u),\, Aw\rangle\right| &\leqslant \langle |w|\,|\nabla u|,\, |Aw|\rangle \leqslant \left\|w\right\|_{L^6} \left\|\nabla u\right\|_{L^3} \left\|Aw\right\| \leqslant \\ &\leqslant c\left\|w\right\|_{H^1} \left\|\nabla u\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla u\right\|_{L^6}^{\frac{1}{2}} \left\|Aw\right\| \leqslant c\left\|w\right\|_{H^1} \left\|u\right\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \left\|u\right\|_{H^2}^{\frac{1}{2}} \left\|Aw\right\| \leqslant \\ &\leqslant c\left\|w\right\|_{H^1}^2 \left\|u\right\|_{H^1} \left\|u\right\|_{H^2} + \frac{1}{8}\left\|Aw\right\|^2 , \end{aligned} \tag{4.14}$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
|\langle -B(w,w),\, Aw\rangle| &\leqslant \langle |w|\,|\nabla w|,\, |Aw|\rangle \leqslant \|w\|_{L^6}\,\|\nabla w\|_{L^3}\,\|Aw\| \leqslant \\
&\leqslant c\,\|w\|_{H^1}\,\|\nabla w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\,\|\nabla w\|_{L^6}^{\frac{1}{2}}\,\|Aw\| \leqslant c\,\|w\|_{H^1}^{\frac{3}{2}}\,\|Aw\|^{\frac{3}{2}} \leqslant \\
&\leqslant c\,\|w\|_{H^1}^{6} + \frac{1}{8}\,\|Aw\|^2 .
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

4.1.2. Stabilność regularności

W tej sekcji udowodnimy następujące twierdzenie dotyczące stabilności silnych rozwiązań równań Naviera-Stokesa ze względu na dane - warunek początkowy u_0 i siły zewnętrzne f.

Twierdzenie 4.1.1 (Stabilność regularności dla NS) *Niech siły $f, g \in L^2\left(0,T;H\right)$ oraz warunki początkowe $u_0, v_0 \in V^1$. Niech ponadto funkcja $u \in L^\infty\left(0,T;V^1\right) \cap L^2\left(0,T;V^2\right)$ będzie silnym rozwiązaniem na odcinku $[0,T]$ równań Naviera-Stokesa (2.4) z siłą f i warunkiem początkowym u_0. Jeśli spełniony jest warunek:*

$$
\|u_0 - v_0\|_{H^1}^2 + c_1 \int_0^T \|f(t) - g(t)\|^2\, dt < \frac{c^*}{\sqrt{T}} \exp\left(-c_2 \int_0^T \left(\|u(t)\|_{H^1}^4 + \|u(t)\|_{H^1}\,\|u(t)\|_{H^2} \right) dt \right), \tag{4.16}
$$

dla pewnych dodatnich stałych c_1, c_2, c^*, to funkcja v będąca rozwiązaniem równań NS (2.4) z siłą g i warunkiem początkowym v_0, także jest silnym rozwiązaniem na odcinku $[0,T]$ i ma taką samą regularność jak u.

Uwaga 4.2 *Powyższe twierdzenie o stabilności, jak również analogiczne twierdzenie dla równań CBF, są prawdziwe także dla dostatecznie gładkich zbiorów otwartych, ograniczonych $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Wynika, to stąd, że nierówność:*

$$
|\langle B\left(u,v\right),\, Aw\rangle| \leqslant c\,\|\nabla u\|\,\|\nabla v\|^{\frac{1}{2}}\,\|Av\|^{\frac{1}{2}}\,\|Aw\|
$$

jest prawdziwa zarówno w przypadku periodycznych warunków brzegowych, jak i warunków Dirichleta.

W poniższym dowodzie będziemy postępować według idei z pracy [DR].

Dowód. [Twierdzenia 4.1.1] Z twierdzenia o lokalnym istnieniu silnych rozwiązań równań Naviera-Stokesa, wynika, że istnieje takie $\tilde{T} > 0$, że $v \in L^\infty\left(0,T';V^1\right) \cap L^2\left(0,T';V^2\right)$ dla $T' < \tilde{T}$. Stała $\tilde{T}$ to maksymalny czas istnienia silnego rozwiązania v, to znaczy, że

$$
\limsup_{t \to \tilde{T}^-} \|\nabla v\| = +\infty.
$$

Chcemy pokazać, że $\tilde{T} > T$. Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy więc, że $\tilde{T} \leqslant T$ i doprowadźmy do sprzeczności.

Rozważmy teraz różnicę rozwiązań $w := u - v$ z warunkiem początkowym

$$
w(x,0) = u_0 - v_0.
$$

Różnica w spełnia równanie:

$$
w_t + Aw + B(u,w) + B(w,u) - B(w,w) = f - g, \tag{4.17}
$$

dla czasów $t \in [0,T')$ dla dowolnego $T' < \tilde{T}$. Wiemy, że $v_t \in L^2(0,T';H)$ dla każdego $T' < \tilde{T}$. Skoro $\tilde{T} \leqslant T$, jasne jest więc, że również $u_t \in L^2(0,T';H)$. Dlatego, biorąc iloczyn skalarny w $L^2(\Omega)$ obu stron równania (4.17) z Aw oraz sumując stronami nierówności (4.12)-(4.15), możemy napisać następującą nierówność:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla w\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|Aw\right\|^2 \leqslant c_1\left\|f-g\right\|^2 + c_2\left\|w\right\|_{H^1}^2\left(\left\|u\right\|_{H^1}^4 + \left\|u\right\|_{H^1}\left\|u\right\|_{H^2}\right) + c_3\left\|w\right\|_{H^1}^6,$$

która po uproszczeniu przyjmuje ostatecznie postać:

$$\frac{d}{dt}\left\|w\right\|_{H^1}^2 + \left\|w\right\|_{H^2}^2 \leqslant c_1\left\|f-g\right\|^2 + c_2\left\|w\right\|_{H^1}^2\left(\left\|u\right\|_{H^1}^4 + \left\|u\right\|_{H^1}\left\|u\right\|_{H^2}\right) + c_3\left\|w\right\|_{H^1}^6. \tag{4.18}$$

Przyjmując następujące oznaczenia:

- $X(t) := \left\|w(t)\right\|_{H^1}^2$,
- $\delta(t) := c_1\left\|f(t)-g(t)\right\|^2$,
- $\gamma(t) := c_2\left(\left\|u(t)\right\|_{H^1}^4 + \left\|u(t)\right\|_{H^1}\left\|u(t)\right\|_{H^2}\right)$,

z nierówności (4.18) otrzymujemy:

$$X'(t) \leqslant c_3X(t)^3 + \gamma(t)X(t) + \delta(t). \tag{4.19}$$

Weźmy teraz

$$Y(t) := \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)X(t)$$

i zauważmy, że

$$\frac{d}{dt}Y(t) = \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)\left[X'(t) - X(t)\gamma(t)\right]$$

oraz

$$Y(0) = X(0) = \left\|u_0 - v_0\right\|_{H^1}^2.$$

Pomnóżmy więc nierówność (4.19) przez $\exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)$. Otrzymamy w ten sposób nierówność:

$$\begin{aligned} Y'(t) &\leqslant \underbrace{c_3\exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)X(t)^3}_{=\left[\exp\left(\int_0^t\gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)\right]^2Y(t)^3} + \delta(t)\underbrace{\exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)}_{\leqslant 1} \leqslant \\ &\leqslant c_3\left[\exp\left(\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)\right]^2 Y(t)^3 + \delta(t) \leqslant \underbrace{c_3\left[\exp\left(\int_0^T \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)\right]^2}_{=:K} Y(t)^3 + \delta(t). \end{aligned}$$

Mamy więc następującą nierówność różniczkową:

$$Y'(t) \leqslant KY(t)^3 + \delta(t) \tag{4.20}$$

z warunkiem początkowym:

$$Y(0) = \|u_0 - v_0\|^2_{H^1}.$$

Stała K wynosi:

$$K = c_3 \left[\exp\left(\int_0^T \gamma(s)\,\mathrm{ds} \right) \right]^2.$$

Dla porównania rozważmy następujące równanie różniczkowe zwyczajne[2]:

$$Z'(t) = KZ(t)^3 \tag{4.21}$$

z warunkiem początkowym:

$$Z(0) = Y(0) + \int_0^T \delta(t)\,\mathrm{dt}. \tag{4.22}$$

Widzimy stąd, że (dowód lematu 4.0.1 zawarty w pracy [DR]):

$$Y(t) \leqslant Z(t) \quad \text{dla} \quad t \in [0, T].$$

Zagadnienie (4.21) z warunkiem początkowym (4.22) umiemy rozwiązać. Rozwiązanie wyraża się wzorem:

$$Z(t) = \frac{Z(0)}{\sqrt{1 - 2KZ(0)^2 t}} \quad \text{jeśli} \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{2KZ(0)^2}.$$

Przepiszmy warunek ograniczający czas istnienia rozwiązania:

$$T < \frac{1}{2KZ(0)^2}$$

w nieco korzystniejszej dla nas formie:

$$Z(0) < \frac{1}{\sqrt{2KT}}.$$

Wstawiając do tej nierówności stałe $Z(0)$ oraz K, otrzymujemy:

$$Y(0) + \int_0^T \delta(t)\,\mathrm{dt} < \frac{1}{\sqrt{2Tc_3 \left[\exp\left(\int_0^T \gamma(s)\,\mathrm{ds} \right) \right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2Tc_3}} \left[\exp\left(-\int_0^T \gamma(s)\,\mathrm{ds} \right) \right].$$

Podstawiając teraz:

$$Y(0) = \|u_0 - v_0\|^2_{H^1}, \quad \delta(t) = c_1 \|f(t) - g(t)\|^2,$$

oraz

$$\gamma(t) = c_2 \left(\|u(t)\|^4_{H^1} + \|u(t)\|_{H^1} \|u(t)\|_{H^2} \right),$$

[2]Możemy tu od razu skorzystać z lematu 4.0.1 dla nierówności (4.20). Poniższy argument przedstawiamy dla większej jasności.

otrzymujemy dokładnie (po zmianie oznaczeń stałych) warunek (4.16). Z lematu 4.0.1 wynika więc, że funkcja $Y(t)$ jest jednostajnie ograniczona na odcinku $[0, T]$. Zatem również funkcja $X(t)$, równa:

$$X(t) = Y(t) \exp\left(\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right),$$

jest jednostajnie ograniczona na $[0, T]$. Przypomnijmy, że

$$X(t) = \|w(t)\|_{H^1}^2 = \|u(t) - v(t)\|_{H^1}^2 .$$

Stąd już wnioskujemy, że także norma $\|v(t)\|_{H^1}$ jest jednostajnie ograniczona na odcinku $[0, T]$. Jak pamiętamy, założyliśmy na początku dowodu, że $\tilde{T} \leqslant T$. Wynika stąd, że

$$\left\|\nabla v\left(\tilde{T}\right)\right\| < +\infty,$$

co przeczy maksymalności $\tilde{T}$. Udowodniliśmy w ten sposób, że $v(t)$ jest silnym rozwiązaniem na odcinku $[0, T]$ i należy do przestrzeni $L^\infty(0, T; V^1)$. Fakt, że $v \in L^2(0, T; V^2)$ wynika teraz bezpośrednio z nierówności (4.18) (wystarczy ją scałkować stronami po czasie). $\square$

4.2. Równania Brinkmana-Forchheimera z konwekcją

Zajmiemy się teraz stabilnością regularności w równaniach Brinkmana-Forchheimera z konwekcją. Jest to nowa, badawcza część niniejszej pracy, wykazana przez autora i będąca uogólnieniem tematu pracy na równania CBF.

Pomysł, aby poradzić sobie z nieliniowością C, polega na dodaniu odpowiednio spreparowanego zera:

$$\begin{aligned} C(u) - C(v) &= |u|\,u - |v|\,v = |u|\,u \overbrace{-\,|u|\,v + |u|\,v}^{+0} - |v|\,v = \\ &= |u|\,(u - v) + (|u| - |v|)\,v = |u|\,w + (|u| - |v|)\,(u - w) . \end{aligned}$$

Daje nam to następujące szacowanie:

$$|\langle C(u) - C(v),\, Aw\rangle| \leqslant \langle |u|\,|w|,\, |Aw|\rangle + \left\langle \Big||u| - |v|\Big|\,|u - w|,\, |Aw|\right\rangle . \tag{4.23}$$

4.2.1. Oszacowania a priori

Z pierwszym składnikiem w nierówności (4.23) radzimy sobie łatwo:

$$\begin{aligned} \langle |u|\,|w|,\, |Aw|\rangle &\leqslant \|u\|_{L^3}\,\|w\|_{L^6}\,\|Aw\| \leqslant c\,\|u\|_{L^3}\,\|\nabla w\|\,\|Aw\| \leqslant \\ &\leqslant c\,\|u\|_{L^3}^2\,\|w\|_{H^1}^2 + \frac{1}{8}\,\|Aw\|^2 . \end{aligned} \tag{4.24}$$

Zauważmy, że mamy następującą nierówność[3]:

$$\Big||u| - |v|\Big| \leqslant |u - v| .$$

[3]Odwrotna nierówność trójkąta dla normy euklidesowej.

Korzystając z tego faktu, radzimy sobie z drugim składnikiem po prawej stronie nierówności (4.23) w sposób następujący:

$$\begin{aligned}\left\langle \Big||u|-|v|\Big|\,|u-w|,\,|Aw|\right\rangle &\leqslant \langle |u-v|\,|u-w|,\,|Aw|\rangle \leqslant \langle |w|\,|u|,\,|Aw|\rangle + \left\langle |w|^2,\,|Aw|\right\rangle \leqslant \\ &\leqslant \|w\|_{L^6}\|u\|_{L^3}\|Aw\| + \|w\|_{L^4}^2\|Aw\| \leqslant \\ &\leqslant c\|w\|_{H^1}^2\|u\|_{L^3}^2 + \frac{1}{16}\|Aw\|^2 + c\|w\|_{H^1}^4 + \frac{1}{16}\|Aw\|^2 \leqslant \\ &\leqslant c\|w\|_{H^1}^4 + c\|u\|_{L^3}^2\|w\|_{H^1}^2 + \frac{1}{8}\|Aw\|^2 . \end{aligned} \tag{4.25}$$

Pamiętamy, że $u \in L^3\left(0,T;\dot{L}^3(\Omega)\right)$, jako słabe rozwiązanie równań CBF (patrz definicja 2.2.1[4]).

Korzystając z nierówności (4.24)-(4.25), otrzymujemy następujące oszacowanie nieliniowości C w równaniu CBF:

$$\begin{aligned}|\langle C(u)-C(v),\,Aw\rangle| &\leqslant \langle |u|\,|w|,\,|Aw|\rangle + \left\langle \Big||u|-|v|\Big|\,|u-w|,\,|Aw|\right\rangle \leqslant \\ &\leqslant c\|u\|_{L^3}^2\|w\|_{H^1}^2 + \frac{1}{8}\|Aw\|^2 + c\|w\|_{H^1}^4 + c\|u\|_{L^3}^2\|w\|_{H^1}^2 + \frac{1}{8}\|Aw\|^2 \leqslant \\ &\leqslant c\|w\|_{H^1}^4 + c\|u\|_{L^3}^2\|w\|_{H^1}^2 + \frac{1}{4}\|Aw\|^2 . \end{aligned} \tag{4.26}$$

4.2.2. Stabilność regularności

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.2.1 (Stabilność regularności dla CBF, KH) *Niech* $f, g \in L^2(0,T;H)$ *oraz* $u_0, v_0 \in V^1$. *Niech ponadto* $u \in L^\infty(0,T;V^1) \cap L^2(0,T;V^2)$ *będzie silnym rozwiązaniem na odcinku* $[0,T]$ *równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją* (2.12)*, z siłą* f *i warunkiem początkowym* u_0. *Jeśli spełniony jest warunek:*

$$\begin{aligned}&\|u_0-v_0\|_{H^1}^2 + c_1\int_0^T \|f(t)-g(t)\|^2\,dt < \\ &< c^*\left[\sqrt{1+\frac{2}{T}}-1\right]\exp\left(-c_2\int_0^T\left(\|u(t)\|_{L^3}^2 + \|u(t)\|_{H^1}^4 + \|u(t)\|_{H^1}\|u(t)\|_{H^2}\right)dt\right)\end{aligned} \tag{4.27}$$

dla pewnych dodatnich stałych c_1, c_2, c^**, to funkcja* v *będąca rozwiązaniem równań CBF* (2.12)*, z siłą* g *i warunkiem początkowym* v_0*, także jest silnym rozwiązaniem na odcinku* $[0,T]$ *i ma taką samą regularność jak* u.

Powyższe twierdzenie zostało udowodnione przez autora niniejszej pracy. Dowód przebiega podobnie jak w przypadku równań Naviera-Stokesa. Obrazuje on jak można przenieść idee stabilności z równań Naviera-Stokesa na równania Brinkmana-Forchheimera z konwekcją.

[4]Zuważmy, że definicja słabych rozwiązań została napisana, podobnie jak w przypadku równań NS, dla równań CBF bez sił zewnętrznych ($f \equiv 0$). Powyższe oszacowania są jednak spełnione także dla niezerowej siły $f \in L^2(0,T;H)$.

Dowód. [Twierdzenia 4.2.1, **KH**] Z twierdzenia o lokalnym istnieniu silnych rozwiązań równania CBF, wynika, że istnieje takie $\tilde{T} > 0$, że $v \in L^{\infty}\left(0, T'; V^1\right) \cap L^2\left(0, T'; V^2\right)$ dla $T' < \tilde{T}$. Znów oznaczamy przez $\tilde{T}$ maksymalny czas istnienia silnego rozwiązania v, to znaczy, że

$$\limsup_{t \to \tilde{T}^-} \|\nabla v\| = +\infty.$$

Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy więc, że $\tilde{T} \leqslant T$ i doprowadźmy do sprzeczności.

Rozważmy teraz różnicę rozwiązań $w := u - v$, z warunkiem początkowym

$$w(x, 0) = u_0 - v_0.$$

Różnica w spełnia równanie:

$$w_t + Aw + B(u, w) + B(w, u) - B(w, w) + C(u) - C(v) = f - g, \tag{4.28}$$

dla czasów $t \in [0, T')$ dla dowolnego $T' < \tilde{T}$. Wiemy, że $v_t \in L^2\left(0, T'; H\left(\Omega\right)\right)$ dla każdego $T' < \tilde{T}$. Ponadto $\tilde{T} \leqslant T$, więc oczywiście również $u_t \in L^2\left(0, T'; H\right)$. Biorąc zatem iloczyn skalarny w $L^2\left(\Omega\right)$ obu stron równania (4.28) z Aw oraz sumując stronami nierówności (4.12)-(4.15) i (4.26) (z nieco innymi stałymi), możemy napisać następującą nierówność:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|w\|_{H^1}^2 + \|w\|_{H^2}^2 \leqslant c_1\|f - g\|^2 + c_2\|w\|_{H^1}^2\left(\|u\|_{L^3}^2 + \|u\|_{H^1}^4 + \|u\|_{H^1}\|u\|_{H^2}\right) + \\ + c_3\|w\|_{H^1}^6 + c_4\|w\|_{H^1}^4. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Przyjmijmy teraz następujące oznaczenia:

- $X(t) := \|w(t)\|_{H^1}^2$,
- $\delta(t) := c_1\|f(t) - g(t)\|^2$,
- $\gamma(t) := c_2\left(\|u(t)\|_{L^3}^2 + \|u(t)\|_{H^1}^4 + \|u(t)\|_{H^1}\|u(t)\|_{H^2}\right)$.

Z nierówności (4.29) otrzymujemy:

$$X'(t) \leqslant c_3 X(t)^3 + c_4 X(t)^2 + \gamma(t)X(t) + \delta(t). \tag{4.30}$$

Bierzemy znów:

$$Y(t) := \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)X(t)$$

i mnożymy nierówność (4.30) przez $\exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)$. Otrzymamy w ten sposób nierówność:

$$\begin{aligned} Y'(t) &\leqslant c_3 \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)X(t)^3 + c_4 \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)X(t)^2 + \delta(t)\exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right) \leqslant \\ &\leqslant c_3\left[\exp\left(\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)\right]^2 Y(t)^3 + c_4\left[\exp\left(\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)\right]Y(t)^2 + \delta(t) \leqslant \\ &\leqslant \underbrace{c_3\left[\exp\left(\int_0^T \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)\right]^2}_{=:K} Y(t)^3 + \underbrace{c_4\left[\exp\left(\int_0^T \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)\right]}_{=:L} Y(t)^2 + \delta(t). \end{aligned}$$

Mamy więc następującą nierówność różniczkową:

$$Y'(t) \leqslant KY(t)^3 + LY(t)^2 + \delta(t), \tag{4.31}$$

z warunkiem początkowym:

$$Y(0) = \|u_0 - v_0\|^2_{H^1}.$$

Spróbujmy oszacować w najprostszy sposób czas istnienia rozwiązania $Y(t)$. Podobnie jak w przypadku równań NS, rozważmy następujące zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{cases} Z'(t) = KZ(t)^3 + LZ(t)^2, \\ Z(0) = Y(0) + \int\limits_0^T \delta(t)\,\mathrm{dt}, \end{cases}$$

gdzie $T > 0$ to maksymalny czas istnienia rozwiązania $Z(t)$.

Równanie:

$$\frac{Z'}{KZ^3 + LZ^2} = 1$$

można przekształcić do prostszej postaci:

$$\frac{Z'}{KZ^3 + LZ^2} = \frac{1}{LZ^2} - \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z + \frac{L}{K}} = 1.$$

To równanie można już stosunkowo łatwo scałkować

$$\int\limits_{Z(0)}^{Z(t)} \left(\frac{1}{LZ^2} - \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z + \frac{L}{K}} \right) \mathrm{dZ} = \int\limits_0^t \mathrm{ds},$$

otrzymując następujące równanie na $Z(t)$:

$$-\frac{1}{LZ(t)} + \frac{1}{LZ(0)} - \ln\left(Z(t)\right) + \ln\left(Z(0)\right) + \ln\left(Z(t) + \frac{L}{K}\right) - \ln\left(Z(0) + \frac{L}{K}\right) = t.$$

Upraszczając trochę zapis, dostajemy:

$$\ln\left(1 + \frac{L}{K}\frac{1}{Z(t)}\right) - \frac{1}{LZ(t)} = t + \ln\left(1 + \frac{L}{K}\frac{1}{Z_0}\right) - \frac{1}{LZ_0}.$$

Nie jest to postać, która nas satysfakcjonuje w kontekście szacowania czasu istnienia rozwiązania.

Dlatego podejdziemy do tego problemu od innej strony. W celu uwzględnienia zależności od stałej K, możemy nierówność (4.31) oszacować trochę inaczej (zmieniając ewentualnie stałe c_3, c_4):

$$\begin{cases} Y'(t) \leqslant KY(t)^3 + \sqrt{K}Y(t)^2 + \delta(t), \\ Y(0) = \|u_0 - v_0\|^2_{H^1}, \end{cases} \tag{4.32}$$

gdzie

$$K = c_3 \left[\exp\left(\int\limits_0^T \gamma(s)\,\mathrm{ds} \right) \right]^2.$$

Przekształcimy teraz nierówność różniczkową (4.32) w taki sposób, żeby szacowania uzależnić od warunku początkowego $Z(0)$. Zrobimy to w dwóch krokach.

1. Na początek rozważmy następującą nierówność różniczkową:

$$\begin{cases} \tilde{Z}'(t) \leqslant K\tilde{Z}(t)^3 + \sqrt{K}\tilde{Z}(t)^2, \\ \tilde{Z}(0) = Y(0) + \int\limits_0^T \delta(t)\,\mathrm{dt}. \end{cases}$$

   Z lematu 4.0.1 wiemy już, że

$$Y(t) \leqslant \tilde{Z}(t) \quad \text{dla} \quad t \in [0,T].$$

2. Następnie na mocy lematu 4.0.2 możemy napisać, że

$$\tilde{Z}(t) \leqslant Z(t) \quad \text{dla} \quad t \in [0,T],$$

   gdzie $Z(t)$ spełnia następujące równanie różniczkowe:

$$\begin{cases} Z'(t) = \left(K + \frac{\sqrt{K}}{Z(0)}\right) Z(t)^3, \\ Z(0) = \tilde{Z}(0). \end{cases} \tag{4.33}$$

   Oznaczmy $Z_0 := Z\,(0)$. Rozwiązanie zagadnienia (4.33) jest postaci:

$$Z(t) = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - 2Z_0^2\left(K + \frac{\sqrt{K}}{Z_0}\right)t}} \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{2Z_0^2\left(K + \frac{\sqrt{K}}{Z_0}\right)},$$

   Warunek na czas istnienia rozwiązania (warunek (4.5) z lematu 4.0.2) wygląda następująco:

$$Z_0^2 < \frac{1}{2T\left(K + \frac{\sqrt{K}}{Z_0}\right)}.$$

Odpowiednio przekształcając ten warunek, otrzymujemy następującą nierówność kwadratową:

$$W(Z_0) := KZ_0^2 + \sqrt{K}Z_0 - \frac{1}{2T} < 0. \tag{4.34}$$

Wielomian kwadratowy $W(Z_0)$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste postaci:

$$Z_0^+ = \frac{1}{2\sqrt{K}}\left[\sqrt{1 + \frac{2}{T}} - 1\right] > 0,$$

$$Z_0^- = -\frac{1}{2\sqrt{K}}\left[\sqrt{1 + \frac{2}{T}} + 1\right] < 0.$$

Nierówność (4.34) możemy więc zapisać w następujący sposób:

$$W(Z_0) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(Z_0 - Z_0^+\right)\left(Z_0 - Z_0^-\right) < 0.$$

Stąd już widać, że rozwiązanie tej nierówności spełnia zależność:

$$Z_0^- < Z_0 < Z_0^+,$$

która upraszcza się ostatecznie do:

$$0 \leqslant Z_0 < Z_0^+.$$

Podstawiając:

$$Z_0 = Y(0) + \int_0^T \delta(t)\,\mathrm{dt} = \|u_0 - v_0\|_{H^1}^2 + c_1 \int_0^T \|f(t) - g(t)\|^2\,\mathrm{dt}$$

oraz

$$Z_0^+ = \frac{1}{2\sqrt{K}}\left[\sqrt{1+\frac{2}{T}} - 1\right] = \frac{\left[\sqrt{1+\frac{2}{T}} - 1\right]}{2\sqrt{c_3}}\left[\exp\left(-\int_0^T \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)\right],$$

gdzie

$$\gamma(t) := c_2\left(\|u(t)\|_{L^3}^2 + \|u(t)\|_{H^1}^4 + \|u(t)\|_{H^1}\|u(t)\|_{H^2}\right),$$

dostajemy dokładnie (znów z dokładnością do zmiany stałej) warunek stabilności (4.27). Zatem z lematu 4.0.2 funkcja $\tilde{Z}\,(t)$ jest jednostajnie ograniczona na odcinku czasu $[0, T]$. Tak więc jednostajnie ograniczone są również funkcja $Y\,(t)$ oraz funkcja $X\,(t)$, równa:

$$X\,(t) = Y\,(t) \exp\left(\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right).$$

Podobnie jak w dowodzie stabilności dla równań Naviera-Stokesa, dostajemy ostatecznie, że

$$\left\|\nabla v\left(\tilde{T}\right)\right\| < +\infty,$$

co przeczy maksymalności $\tilde{T}$. Funkcja $v(t)$ jest więc silnym rozwiązaniem, co najmniej na odcinku $[0, T]$. Ponadto należy ona do przestrzeni $L^\infty\left(0, T; V^1\right)$.

Bezpośrednio z nierówności (4.29) wynika teraz, że funkcja $v\,(t)$ należy również do przestrzeni $L^2\left(0, T; V^2\right)$. □

Rozdział 5

Przybliżenia Galerkinowskie

W tym rozdziale pokażemy, że jeśli silne rozwiązanie równań Naviera-Stokesa istnieje, to przybliżenia Galerkinowskie do niego zbiegają. Podobne wyniki można znaleźc w pracy [DR] oraz, dla rozwiązań o wyższej regularności, w pracy [CCRT].

Wyniki dotyczące zbieżności przybliżeń Galerkinowskich mają istotne znaczenie dla metod numeryczych, którymi przybliża się rozwiązania równań Naviera-Stokesa[1], a więc również dla wielu praktycznych zastosowań tych równań w inżynierii i życiu codziennym. Twierdzenia te pozostają więc użyteczne, nawet w przypadku, gdyby istnienie regularnych rozwiązań równań NS było znane (tzn. gdyby Problem Milenijny miał pozytywne rozwiązanie).

Równanie na przybliżenia Galerkinowskie u_n (dla każdego $n \in \mathbb{N}$) dla równań Naviera-Stokesa (2.4) otrzymujemy przykładając do obu stron tych równań operator P_n. Dostajemy w ten sposób następujące zagadnienie:

$$\frac{d}{dt}u_n + Au_n + P_nB(u_n) = P_nf,$$

z warunkiem początkowym:

$$u_n(0) = P_nu_0 = \sum_{j=1}^{+\infty} \left\langle u_0,\, a^j \right\rangle a^j.$$

Przypomnijmy, że P_n to rzut ortogonalny na przestrzeń V_n ropiętą przez pierwszych n funkcji własnych operatora Stokesa. Przypomnijmy też, że przez Q_n oznaczamy rzut ortogonalny na $V_n^{\perp}$:

$$Q_n = Id - P_n.$$

5.1. Zbieżność przybliżeń Galerkinowskich

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie dotyczące zbieżności przybliżeń Galerkinowskich do silnego rozwiązania równań Naviera-Stokesa.

Twierdzenie 5.1.1 (Zbieżność przybliżeń Galerkinowskich) *Załóżmy, że* $u_0 \in V^1$ *oraz* $f \in L^2(0,T;H)$. *Niech ponadto funkcja* $u \in L^\infty(0,T;V^1) \cap L^2(0,T;V^2)$ *będzie silnym rozwiązaniem równań Naviera-Stokesa z warunkiem początkowym* u_0 *i siłą* f*:*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u + Au + B(u) = f, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{5.1}$$

[1]Dziedzina zajmująca się numerycznym rozwiązywaniem równań hydrodynamiki nazywa się w języku angielskim *"Computational Fluid Dynamics"*, w skrócie CFD.

Wtedy v_n, rozwiązanie zagadnienia na przybliżenia Galerkinowskie:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v_n + Av_n + P_nB(v_n) = P_nf, \\ v_n(0) = P_nu_0, \end{cases} \tag{5.2}$$

zbiega silnie do u, zarówno w przestrzeni $L^\infty(0,T;V^1)$, jak i w $L^2(0,T;V^2)$.

Dowód twierdzenia 5.1.1 jest bardzo podobny do dowodu twierdzenia o stabilności, aczkolwiek występują w nim pewne istotne różnice. Pochodzi on ze wspominanej już pracy [DR].

Dowód. [Twierdzenia 5.1.1] Oznaczmy przez $w_n := u - v_n$ różnicę rozwiązań równań (5.1) i (5.2). Odejmując równania stronami przekonujemy się, że w_n spełnia następujące równanie:

$$\frac{d}{dt}w_n + Aw_n + B(u) - P_nB(v_n) = f - P_nf = Q_nf,$$

z warunkiem początkowym:

$$w_n(0) = u_0 - P_nu_0.$$

Rozbijając funkcję $B(u)$ na część z V_n i $V_n^\perp$ w następujący sposób:

$$B(u) = P_nB(u) + Q_nB(u),$$

dostajemy równanie postaci:

$$\frac{d}{dt}w_n + Aw_n + P_nB(u) - P_nB(v_n) = Q_nf - Q_nB(u).$$

Zastępując teraz w składniku nieliniowym v_n przez $v_n = u - w_n$ (z definicji w_n):

$$P_nB(u,u) - P_nB(v_n,v_n) = P_nB(u,w_n) + P_nB(w_n,u) - P_nB(w_n,w_n),$$

otrzymujemy ostatecznie równanie:

$$\frac{d}{dt}w_n + Aw_n + P_nB(u,w_n) + P_nB(w_n,u) - P_nB(w_n,w_n) = Q_nf - Q_nB(u). \tag{5.3}$$

Oznaczmy, dla odróżnienia rzutu P_nu od rozwiązania równań (5.2) na przybliżenia Galerkinowskie v_n, funkcję

$$q_n := Q_nu = u - P_nu.$$

Mnożąc obie strony równania (5.3) przez Aw_n, dostajemy następującą nierówność:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w_n\|^2 + \|Aw_n\|^2 \leqslant |\langle Q_nf,\, Aw_n\rangle| + |\langle Q_nB(u,u),\, Aw_n\rangle| + \\ + |\langle P_nB(u,w_n) + P_nB(w_n,u) - P_nB(w_n,w_n),\, Aw_n\rangle|. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Zauważmy, że dla każdych $u_1, u_2 \in V$:

$$\langle P_nB(u_1,u_2),\, Aw_n\rangle = \langle B(u_1,u_2),\, P_nAw_n\rangle.$$

Dlatego, postępując analogicznie, jak w nierównościach (4.13)-(4.15), otrzymujemy następujące oszacowania składników nieliniowych:

(i)

$$\left|\langle P_nB\left(u,w_n\right),\, Aw_n\rangle\right| \leqslant \langle |u|\,|\nabla w_n|,\, |P_nAw_n|\rangle \leqslant c\left\|u\right\|_{H^1}^4\left\|w_n\right\|_{H^1}^2 + \frac{1}{8}\left\|Aw_n\right\|^2, \quad (5.5)$$

(ii)

$$\begin{aligned}\left|\langle P_nB\left(w_n,u\right),\, Aw_n\rangle\right| &\leqslant \langle |w_n|\,|\nabla u|,\, |P_nAw_n|\rangle \leqslant \\ &\leqslant c\left\|w_n\right\|_{H^1}^2\left\|u\right\|_{H^1}\left\|u\right\|_{H^2} + \frac{1}{8}\left\|Aw_n\right\|^2,\end{aligned} \quad (5.6)$$

(iii)

$$\left|\langle -P_nB\left(w_n,w_n\right),\, Aw_n\rangle\right| \leqslant \langle |w_n|\,|\nabla w_n|,\, |P_nAw_n|\rangle \leqslant c\left\|w_n\right\|_{H^1}^6 + \frac{1}{4}\left\|Aw_n\right\|^2. \quad (5.7)$$

Korzystając z faktu, że operatory Q_n i A komutują oraz z tego, że

$$Q_nw_n = Q_nu - \underbrace{Q_nv_n}_{=0} = Q_nu = q_n,$$

pozostałe składniki po prawej stronie nierówności (5.4) szacujemy w następujący sposób:

(i)

$$\begin{aligned}\left|\langle Q_nf,\, Aw_n\rangle\right| = \left|\langle f,\, Q_nAw_n\rangle\right| = \left|\langle f,\, AQ_nw_n\rangle\right| = \left|\langle f,\, Aq_n\rangle\right| \leqslant \langle |f|,\, |Aq_n|\rangle \leqslant \\ \leqslant \left\|f\right\|\left\|Aq_n\right\|,\end{aligned} \quad (5.8)$$

(ii)

$$\begin{aligned}\left|\langle Q_nB\left(u,u\right),\, Aw_n\rangle\right| = \left|\langle B\left(u,u\right),\, Aq_n\rangle\right| \leqslant \langle |u|\,|\nabla u|,\, |Aq_n|\rangle \leqslant \left\|u\right\|_{L^6}\left\|\nabla u\right\|_{L^3}\left\|Aq_n\right\| \leqslant \\ \leqslant c\left\|u\right\|_{H^1}\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla u\right\|_{L^6}^{\frac{1}{2}}\left\|Aq_n\right\| \leqslant c\left\|u\right\|_{H^1}^{\frac{3}{2}}\left\|u\right\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\left\|Aq_n\right\|.\end{aligned} \quad (5.9)$$

Sumując oszacowania (5.5)-(5.9), otrzymujemy z (5.4) następującą nierówność:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|w_n\right\|_{H^1}^2 + \left\|w_n\right\|_{H^2}^2 \leqslant c_1\left\|w_n\right\|_{H^1}^6 + c_2\left(\left\|u\right\|_{H^1}^4 + \left\|u\right\|_{H^1}\left\|u\right\|_{H^2}\right)\left\|w_n\right\|_{H^1}^2 + \\ + \left(\left\|f\right\| + c_3\left\|u\right\|_{H^1}^{\frac{3}{2}}\left\|u\right\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\right)\left\|Aq_n\right\|.\end{aligned} \quad (5.10)$$

Przyjmując teraz oznaczenia:

- $X_n(t) := \left\|w_n(t)\right\|_{H^1}^2$,
- $\delta(t) := \left(\left\|f(t)\right\| + c_3\left\|u(t)\right\|_{H^1}^{\frac{3}{2}}\left\|u(t)\right\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\right)\left\|Aq_n(t)\right\|$,
- $\gamma(t) := c_2\left(\left\|u(t)\right\|_{H^1}^4 + \left\|u(t)\right\|_{H^1}\left\|u(t)\right\|_{H^2}\right)$,

z nierówności (5.10) dostajemy:

$$X_n'(t) \leqslant c_1 X_n(t)^3 + \gamma(t) X_n(t) + \delta(t). \tag{5.11}$$

Biorąc

$$Y_n(t) := \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right) X_n(t),$$

otrzymujemy z (5.11) nierówność różniczkową postaci:

$$Y_n'(t) \leqslant K Y_n(t)^3 + \delta(t),$$

z warunkiem początkowym:

$$Y_n(0) = X_n(0) = \|u_0 - P_n u_0\|_{H^1}^2,$$

gdzie stała K wynosi:

$$K := c_1 \left[\exp\left(\int_0^T \gamma(s)\,\mathrm{ds}\right)\right]^2.$$

Używając nierówności Höldera, możemy napisać:

$$\int_0^T \delta(t)\,\mathrm{dt} \leqslant \left[\left(\int_0^T \|f(t)\|^2\,\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}} + c_3 \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H^1}^3 \|u(t)\|_{H^2}\,\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \left(\int_0^T \|Aq_n(t)\|^2\,\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant M \left(\int_0^T \|Aq_n(t)\|^2\,\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.12}$$

dla pewnej dodatniej stałej M.

Funkcja $u \in L^2(0, T; V^2)$, więc $u(t) \in V^2$ dla prawie wszystkich czasów $t \in [0, T]$ i dlatego

$$q_n(t) = Q_n u(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

silnie w przestrzeni V^2. Ponadto $\|Aq_n(t)\|^2 \leqslant \|Au(t)\|^2$ dla prawie wszystkich $t \in [0, T]$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej wynika więc następująca zbieżność:

$$\int_0^T \|Aq_n(t)\|^2\,\mathrm{dt} \to 0 \quad \text{dla} \quad n \to +\infty.$$

Wnioskujemy stąd, że:

$$\int_0^T \delta(t)\,\mathrm{dt} \to 0 \quad \text{dla} \quad n \to +\infty.$$

Warunek początkowy również zbiega do zera:

$$Y_n(0) \to 0 \quad \text{dla} \quad n \to +\infty.$$

Zatem z punktu (ii) lematu 4.0.1 wynika, że

$$Y_n(t) \to 0$$

jednostajnie na $[0,T]$ dla $n \to +\infty$, a więc również

$$X_n(t) = \|w_n(t)\|_{H^1}^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

jednostajnie na $[0,T]$. Daje nam to silną zbieżność w_n w przestrzeni $L^\infty\left(0,T;V^1\right)$. Zbieżność w $L^2\left(0,T;V^2\right)$ wynika teraz bezpośrednio z nierówności (5.10). $\square$

Uwaga 5.1 *Powyższe twierdzenie, podobnie jak twierdzenie o stabilności regularności, jest prawdziwe nie tylko na torusie, ale również dla dostatecznie gładkich, ograniczonych zbiorów* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

5.2. Numeryczna weryfikacja regularności

Jako zastosowanie twierdzeń o stabilności i zbieżności przybliżeń Galerkinowskich zaprezentujemy teraz rezultat dotyczący możliwości numerycznej weryfikacji regularności rozwiązań trójwymiarowych równań Naviera-Stokesa.

Załóżmy, że u jest silnym rozwiązaniem równań Navier-Stokesa na odcinku czasu $[0,T]$. Chcemy teraz, obliczając przybliżenia galerkinowskie u_n odpowiadające u i badając ich zachowanie, móc stwierdzić, że u jest silnym rozwiązaniem na $[0,T]$. Idee dotyczące numerycznej weryfikacji regularności rozwiązań pochodzą z prac [CCRT], [DR], [RRS].

Poniższe twierdzenie mówi, że istnienie silnych rozwiązań równań Naviera-Stokesa można zweryfikować przy pomocy obliczeń numerycznych, posługując się odpowiednio dobranymi przybliżeniami Galerkinowskimi. Dowód tego twierdzenia, dla nieco bardziej regularnych sił zewnętrznych $f \in L^2\left(0,T;H\right) \cap L^1\left(0,T;V\right)$, można znaleźć w pracy [DR].

Twierdzenie 5.2.1 (Numeryczna weryfikacja regularności)

(i) Rozważmy równania Naviera-Stokesa na trójwymiarowym torusie:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u + Au + B\left(u\right) = f, \\ u\left(0\right) = u_0, \end{cases} \tag{5.13}$$

z warunkiem początkowym $u_0 \in V^1$ *i siłą zewnetrzną* $f \in L^2\left(0,T;H\right)$.

Niech funkcja $v \in L^\infty\left(0,T;V^1\right) \cap L^2\left(0,T;V^2\right)$ *będzie numeryczną aproksymacją* u, *spełniającą warunek:*

$$\frac{d}{dt}v + Av + B\left(v\right) \in L^2\left(0,T;H\right)$$

oraz nierówność:

$$\begin{aligned} \|v(0) - u_0\|_{H^1}^2 + c_1 \int_0^T \left\| \frac{d}{dt}v(t) + Av(t) + B\left(v(t)\right) - f(t) \right\|^2 dt < \\ < \frac{c^*}{\sqrt{T}} \exp\left(-c_2 \int_0^T \left(\|v(t)\|_{H^1}^4 + \|v(t)\|_{H^1} \|v(t)\|_{H^2} \right) dt \right), \end{aligned} \tag{5.14}$$

dla pewnych dodatnich stałych c_1, c_2, c^*. *Wtedy równania Naviera-Stokesa* (5.13) *mają silne rozwiązanie* $u \in L^\infty\left(0,T;V^1\right) \cap L^2\left(0,T;V^2\right)$.

(ii) *Niech u będzie silnym rozwiązaniem układu* (5.13)*. Wtedy istnieje takie $N > 0$, że przybliżenia Galerkinowskie u_n spełniają nierówność* (5.14) *dla każdego $n > N$.*

Z punktu (*i*) *wynika więc, że u spełnia* test a posteriori*, jako rozwiązanie przybliżane przez funkcje u_n. Znaczy to, że istnienie silnego rozwiązania można zweryfikować posługując się przybliżeniami Galerkinowskimi.*

5.3. Problemy otwarte

Należy zaznaczyć, że głównym składnikiem pozwalającym na dowód powyższego rezultatu (twierdzenie 5.2.1), dotyczącego numerycznej weryfikacji regularności w trójwymiarowych równaniach Naviera-Stokesa, jest twierdzenie o stabilności regularności 4.1.1 tych równań. Wydaje się więc, że skoro twierdzenie o stabilności jest prawdziwe również dla trójwymiarowych równań Brinkmana-Forchheimera z konwekcją, co pokazaliśmy w twierdzeniu 4.2.1, to można by podobne twierdzenie wykazać także w tym przypadku, prawdopodobnie używając przy tym bardzo podobnych metod. Wymagałoby to jednak udowodnienia po drodze twierdzenia o zbieżności przybliżeń Galerkinowskich dla równań CBF, analogicznego do twierdzenia 5.1.1 dla równań NS. Jest to drugi, niezbędny składnik w dowodzie twierdzenia o numerycznej weryfikacji regularności.

W związku z powyższym badanie zbieżności przybliżeń Galerkinowskich w trójwymiarowych równaniach Brinkmana-Forchheimera z konwekcją może być przedmiotem dalszych badań. Dodajmy, że możliwe są również uogólnienia dotyczące nieliniowości pochodzącej z równań Brinkmana-Forchheimera, która w równaniu CBF rozważanym w tej pracy ma postać $C(u) = |u|\,u$.

Dodatek A

Użyteczne twierdzenia

Podajemy tutaj (bez dowodów) niektóre klasyczne twierdzenia, z których korzystamy w pracy. Sformułowania pochodzą w większości z książki [EV] oraz z pracy [MP].

Twierdzenie A.0.1 (Nierówność Younga z parametrem) *Niech $1 < p, q < +\infty$ takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz niech $a, b, \varepsilon > 0$. Wówczas:*

$$ab \leqslant \varepsilon a^p + (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} \frac{1}{q} b^q.$$

Przykład A.1 *Dla $\varepsilon = \frac{1}{p}$ odzyskujemy standardową nierówność Younga:*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Twierdzenie A.0.2 (Nierówność interpolacyjna dla norm L^p) *Załóżmy, że $1 \leqslant p \leqslant r \leqslant q \leqslant +\infty$ oraz*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$$

dla $\theta \in [0, 1]$. Jeśli $u \in L^p(U) \cap L^q(U)$, to $u \in L^r(U)$ i zachodzi nierówność:

$$\|u\|_{L^r(U)} \leqslant \|u\|_{L^p(U)}^{\theta} \|u\|_{L^q(U)}^{1-\theta}.$$

Przykład A.2 *Jeśli $u \in L^2 \cap L^6$, to $u \in L^3$ oraz*

$$\|u\|_{L^3} \leqslant \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^6}^{\frac{1}{2}}.$$

Definicja A.0.1 *Funkcja rzeczywista na odcinku $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest* bezwzględnie ciągła (*mówi się także* absolutnie ciągła *i oznacza $x \in AC([a, b])$) wtedy i tylko wtedy, gdy ma pochodną $x'(\cdot)$ prawie wszędzie, która jest całkowalna w sensie Lebesgue'a oraz dla wszystkich $t \in [a, b]$ zachodzi:*

$$x(t) = x(a) + \int_a^t x'(s)\, ds.$$

Lemat A.0.3 (Gronwalla - postać różniczkowa) *Niech $x(\cdot)$ będzie nieujemną, bezwzględnie ciągłą funkcją na przedziale $[0, T]$. Załóżmy, że dla prawie wszystkich $t \in [0, T]$ spełniona jest następująca nierówność różniczkowa:*

$$x'(t) \leqslant a(t)x(t) + b(t),$$

gdzie a i b są nieujemnymi funkcjami całkowalnymi na $[0,T]$. Wówczas:

$$x(t) \leqslant \exp\left(\int\limits_0^t a(s)\,ds\right)\left[x(0)+\int\limits_0^t b(s)\,ds\right]$$

dla wszystkich $0 \leqslant t \leqslant T$.

Lemat A.0.4 (Gronwalla - postać całkowa) *Niech $y(\cdot)$ będzie nieujemną, całkowalą funkcją na przedziale $[0,T]$. Załóżmy, że dla prawie wszystkich $t \in [0,T]$ spełniona jest następująca nierówność całkowa:*

$$y(t) \leqslant C_1 \int\limits_0^t y(s)\,ds + C_2,$$

gdzie C_1, C_2 są nieujemnymi stałymi. Wówczas:

$$y(t) \leqslant C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

dla prawie wszystkich $0 \leqslant t \leqslant T$.

Twierdzenie A.0.5 (Sobolewa o włożeniu) *Niech U będzie ograniczonym, otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ z brzegiem ∂U klasy C^1. Załóżmy, że $1 \leqslant p < n$ i $u \in W^{1,p}(U)$. Wówczas $u \in L^{p^*}(U)$ oraz istnieje stała $C > 0$, zależna jedynie od p, n i U taka, że*

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leqslant C\,\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

gdzie p^* jest wykładnikiem sprzężonym w sensie Sobolewa*, równym:*

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Przykład A.3 *Niech $U \subset \mathbb{R}^3$. Jeśli $u \in H^1(U)$, to $u \in L^6(U)$ oraz istnieje stała $C > 0$ taka, że*

$$\|u\|_{L^6(U)} \leqslant C\,\|u\|_{H^1(U)}.$$

Twierdzenie A.0.6 (Nierówność Poincarego) *Niech U będzie ograniczonym, spójnym podzbiorem otwartym $\mathbb{R}^n$ z brzegiem ∂U klasy C^1. Niech $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Istnieje wówczas stała $C > 0$, zależna jedynie od n, p i U taka, że*

$$\|u - u_U\|_{L^p(U)} \leqslant C\,\|Du\|_{L^p(U)}$$

dla każdej funkcji $u \in W^{1,p}(U)$.

Przykład A.4 *Weźmy funkcję $u \in \dot{H}^1(U)$. Z definicji, mamy więc $u_U = 0$. Stosując nierówność Poincarego otrzymujemy:*

$$\|u\|^2_{H^1(U)} = \|u\|^2 + \|Du\|^2 \leqslant \left(1 + C^2\right)\|Du\|^2.$$

Przypomnijmy podstawowe kryterium zwartości rodzin funkcyjnych w topologii zbieżności jednostajnej.

Twierdzenie A.0.7 (Arzeli-Ascoliego) *Niech* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *będzie ciągiem funkcji rzeczywistych określonych na* $\mathbb{R}^n$ *wspólnie ograniczonych i jednakowo ciągłych. Istnieje wówczas podciąg* $\left\{u_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ *i funkcja ciągła* u *taka, że*

$$u_{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u$$

jednostajnie na zwartych podzbiorach $\mathbb{R}^n$.

Definicja A.0.2 *Niech* X *i* Y *będą przestrzeniami Banacha,* $X \subset Y$. *Mówimy, że* X zanurza się w sposób zwarty *w* Y *i piszemy:*

$$X \subset\subset Y,$$

jeżeli

1. X *zanurza się w* Y *w sposób ciągły, to znaczy, że istnieje stała* $C > 0$ *taka, że* $\forall\ x \in X$*:*

$$\|x\|_Y \leqslant C \|x\|_X$$

oraz

2. *każdy ciąg ograniczony w przestrzeni* X *ma podciąg zbieżny w przestrzeni* Y.

Twierdzenie A.0.8 (Rellicha-Kondraszowa) *Niech* U *będzie ograniczonym podzbiorem otwartym* $\mathbb{R}^n$ *z brzegiem* ∂U *klasy* C^1. *Jeżeli* $1 \leqslant p < n$, *to*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

dla każdego $1 \leqslant q < p^*$.

Twierdzenie A.0.9 (Banacha-Alaoglu) *Niech* X *będzie liniową przestrzenią unormowaną, a* X^* *jej przestrzenią dualną. Wówczas domknięta kula jednostkowa w* X^* *jest zwarta w topologii słabej-* (słabej z gwiazdką).*

Przykład A.5 *Jeśli* X *jest przestrzenią Banacha*[1], *to każdy ciąg ograniczony w* X^* *zawiera podciąg zbieżny słabo-*.*

Przykład A.6 *Jeśli* X *jest refleksywną przestrzenią Banacha (np. przestrzenią Hilberta), to każdy ciąg ograniczony w* X *zawiera podciąg słabo zbieżny.*

Innymi słowy, zbiory ograniczone w refleksywnej przestrzeni Banacha są prezwarte w słabej topologii.

Definicja A.0.3 *Niech* X_0, X_1 *będą przestrzeniami Banacha. Dla każdych* $1 < p_0, p_1 < +\infty$ *oznaczmy przez* $W_{X_0,X_1}^{p_0,p_1}$ *przestrzeń funkcji* u, *które należą do* $L^{p_0}(0,T;X_0)$ *i mają pochodną* u' *w* $L^{p_1}(0,T;X_1)$*:*

$$W_{X_0,X_1}^{p_0,p_1} := \left\{u \in L^{p_0}(0,T;X_0) : u' \in L^{p_1}(0,T;X_1)\right\}.$$

Lemat A.0.10 (Aubina-Lionsa) *Niech* X_0, X *i* X_1 *będą przestrzeniami Banacha takimi, że* X_0 *jest zanurzone w sposób zwarty w* X, *a* X *w sposbób ciągły w* X_1*:*

$$X_0 \subset\subset X \subset X_1.$$

Niech ponadto X_0 *i* X_1 *będą przestrzeniami refleksywnymi. Wtedy, dla każdych* $1 < p_0, p_1 < +\infty$ *i dla każdego* $0 < T < +\infty$, *mamy:*

$$W \subset\subset L^{p_0}(0,T;X).$$

[1] Zauważmy tutaj, że w przestrzeni metryzowalnej zwartość jest równoważna ciągowej zwartości.

Przykład A.7 *Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha takimi, że*

$$X \subset\subset H \subset Y.$$

Ponadto niech X będzie przestrzenią refleksywną. Załóżmy, że $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem jednostajnie ograniczonym w $L^2(0,T;X)$, zaś pochodne $\left\{\frac{d}{dt}u_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ są jednostajnie ograniczone w $L^p(0,T;Y)$ dla pewnego $1 < p < +\infty$. Wtedy istnieje podciąg, który jest silnie zbieżny w $L^2(0,T;H)$.

Bibliografia

[CKU] A. Okay Celebi, Varga K. Kalantarov, Davut Ugurlu, *On continuous dependence on coefficients of the Brinkman-Forchheimer equations*, Applied Mathematics Letters 19, no. 8, 801–807, 2006.

[CCRT] S.I. Chernyshenko, P. Constantin, J.C. Robinson, E.S. Titi, *A posteriori regularity of the three-dimensional Navier-Stokes equations from numerical computations*, Journal of Mathematical Physics 48, 065204, 2007.

[CF] Peter Constantin, Ciprian Foias, *Navier-Stokes Equations*, University of Chicago Press, Chicago, 1988.

[DR] Masoumeh Dashti, James C. Robinson, *An a Posteriori Condition on the Numerical Approximations of the Navier-Stokes Equations for the Existence of a Strong Solution*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.46 (No.6). pp. 3136-3150, 2008.

[EV] Lawrence C. Evans, *Rówanania różniczkowe cząstkowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012.

[G] Giovanni P. Galdi, *An Introduction to the Navier-Stokes Initial-Boundary Value Problem*, Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics, Advances in Mathematical Fluid Mechanics 2000, pp 1-70.

[JH] John G. Heywood, *Epochs of regularity for weak solutions of the Navier–Stokes equations in unbounded domains*, Tohoku Mathematical Journal, Volume 40, Number 2 (1988), 293-313.

[KZ] Varga K. Kalantarov, Sergey Zelik, *Smooth Attractors for the Brinkman-Forchheimer equations with fast growing nonlinearities*, arXiv:1101.4070, Submitted on 21 January 2011.

[RRS] Pedro Marin-Rubio, James C. Robinson, Witold Sadowski, *Solutions of the 3D Navier–Stokes equations for initial data in $\dot{H}^{1/2}$: Robustness of regularity and numerical verification of regularity for bounded sets of initial data in $\dot{H}^1$*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 400, 76–85, 2013.

[JR] James C. Robinson, *An introduction to the classical theory of the Navier-Stokes equations*, `http://www.dmi.unict.it/~russo/INDAM2010/lecture/Robinson/JR_notes.pdf`, January 2010.

[MP] Milan Pokorný, *Navier-Stokes Equations*, `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pokorny/NavierandStokes_eng.pdf`, 5 February 2014.

[RS] James C. Robinson, Witold Sadowski, *A Local Smoothness Criterion for Solutions of the 3D Navier–Stokes Equations*, Rendiconti del Seminario Matematico della Universitá di Padova, Manoscritto in corso di stampa pervenuto il 7 ottobre 2012, accettato il 25 febbraio 2013.

[RT] Roger Temam, *Navier–Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis: Second Edition*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1995.

[RZ] Michael Röckner, Xicheng Zhang, *Tamed 3D Navier-Stokes Equation: Existence, Uniqueness and Regularity*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 12, 525, 2009.

[YZ] Yuncheng You, Caidi Zhao, *Approximation of the incompressible convective Brinkman–Forchheimer equations*, Journal of Evolution Equations, December 2012, Volume 12, Issue 4, pp 767-788.