

Uniwersytet Warszawski  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Marek Czarnecki

Nr albumu: 208417

Reprezentacja Burau grup warkoczy  
w języku abelianizacji grupy  
podstawowej

Praca licencjacka  
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem  
dra hab. Pawła Traczyka  
Instytut Matematyki

Wrzesień 2008

## Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

## Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora pracy

## **Streszczenie**

W niniejszej pracy pokazujemy, w jaki sposób dowieść można niewierności reprezentacji Burau dla  $n \geq 5$ , nie stosując aparatu pojęciowego teorii homologii. Przedstawiamy klasyczne, algebraiczne definicje grup warkoczy oraz reprezentacji Burau, aby pokazać ich topologiczne odpowiedniki. Dowodzimy równoważności wprowadzonych algebraicznej i topologicznej reprezentacji Burau, by następnie, korzystając z tej ostatniej, wskazać nietrywialny element jądra reprezentacji Burau dla  $n = 5$ .

## **Słowa kluczowe**

Grupa warkoczy, reprezentacja Burau, liniowość reprezentacji, grupa podstawowa, niewierność reprezentacji Burau

## **Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)**

11.1 Matematyka

## **Klasyfikacja tematyczna**

20F36 – Braid groups; Artin groups

57M07 – Topological methods in group theory

## **Tytuł pracy w języku angielskim**

The Burau Representation of Braid Groups in Terms of Abelianized Fundamental Group



# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b> . . . . .	7
<b>1. Grupy warkoczy oraz reprezentacja Burau – podejście algebraiczne</b> . . .	9
<b>2. Grupy warkoczy oraz reprezentacja Burau – podejście topologiczne</b> . . .	13
2.1. Grupy warkoczy jako zachowujące orientację dyfeomorfizmy . . . . .	13
2.2. Reprezentacja Burau topologicznie . . . . .	14
2.3. Równoważność algebraicznej i topologicznej reprezentacji Burau . . . . .	15
<b>3. Reprezentacja Burau jest niewierna dla <math>n = 5</math></b> . . . . .	19
<b>A. <math>H(\tilde{D}_n)</math> jako wolny <math>\mathbb{Z}[t, t^{-1}]</math>-moduł wymiaru <math>n - 1</math></b> . . . . .	23
A.1. Liniowa niezależność generatorów $H(\tilde{D}_n)$ . . . . .	23
A.2. Każdy element $\text{Ab}(\ker \epsilon)$ można zapisać za pomocą generatorów $g_1, \dots, g_{n-1}$ . . . . .	24
<b>Bibliografia</b> . . . . .	29



# Spis rysunków

2.1. Sprzęganie pętłą $z$ – obraz podnosi się do pętli w $\tilde{D}_n$ . . . . .	15
2.2. Działanie $B_n$ na $g_1 = x_1 z^{-1}$ . . . . .	16
2.3. Działanie $B_n$ na $g_i = x_i z^{-1}$ dla $i = 2, \dots, n - 2$ . . . . .	16
2.4. Działanie $B_n$ na $g_{n-1} = x_{n-1} z^{-1}$ . . . . .	17
3.1. Łuków $\alpha$ i $\beta$ nie można homotopijnie zdjąć z siebie oraz $\int_\beta \alpha = 0$ . . . . .	21
3.2. Najprostszy znany przykład łuków w $D_6$ , których istnienie dowodzi niewierności $B_6$ . . . . .	21





# Wprowadzenie

Klasyczną – algebraiczną – definicję grup warkoczy  $B_n$  (and. *Braid Groups*) po raz pierwszy podał Artin w roku 1925 w [1]. Od tego czasu warkoczce pojawiły się w wielu dziedzinach matematyki, co zaowocowało wprowadzeniem równoważnych definicji grup warkoczy, wyrażonych w zupełnie innych terminach.

Jednym z ważniejszych zagadnień, które pojawiło się wraz z grupami warkoczy, był problem ich liniowości, czyli istnienia wiernych reprezentacji grup  $B_n$ . W 1936 roku Burau w [5] podał przykład reprezentacji grup warkoczy  $B_n$  w macierze  $n \times n$  nad pierścieniem wielomianów Laurenta  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ . Reprezentacja ta została nazwana jego nazwiskiem i przez długi czas rozważana była, jako kandydat na wierną reprezentację grup warkoczy. Od dawna wiadomo było, że dla  $n \leq 3$  reprezentacja Burau jest wierna [3]. Dopiero w latach czterdziestych okazało się, że nie jest ona wystarczająca dla wszystkich  $n$ . Pierwsza praca na ten temat pochodziła od Moody’ego [7] i zawierała dowód niewierności reprezentacji Burau dla  $n \geq 10$ . Następnie Long i Paton w [8] ulepszyli ten wynik pokazując, że już dla  $n \geq 6$  istnieją nietrywialne elementy jądra reprezentacji Burau. Wreszcie, w 1999 roku Bigelow przedstawił najsilniejszy znany do tej pory wynik – reprezentacja Burau nie jest wierna dla  $n \geq 5$  [2]. Technika, której użył Bigelow w swojej pracy, korzysta z naturalnej topologicznej interpretacji reprezentacji Burau i pozwala na wskazanie explicite nietrywialnych elementów jej jądra. Otwartym problemem pozostaje wierność reprezentacji Burau dla  $n = 4$ .

W niniejszej pracy przedstawimy naturalną topologiczną interpretację reprezentacji Burau, jednak nie w standardowej formie, którą można spotkać w literaturze [2, 9], czyli nie będziemy korzystać z języka pierwszej grupy homologii. Opierając się na fakcie z topologii algebraicznej głoszącym, że dla dowolnej przestrzeni łukowo–spójnej  $X$  pierwsza grupa homologii  $H_1(X)$  jest izomorficzna z abelianizacją grupy podstawowej  $\text{Ab}(\pi_1(X))$ <sup>1</sup>, zinterpretujemy reprezentację Burau właśnie w języku abelianizacji grupy podstawowej. Następnie, wzorując się na pracy Bigelowa [2] pokażemy nietrywialny element jądra reprezentacji Burau grupy  $B_5$ , dowodząc tym samym jej niewierności dla  $n \geq 5$ .

---

<sup>1</sup>Dowód tego faktu można znaleźć w [6].



# Rozdział 1

## Grupy warkoczy oraz reprezentacja Burau – podejście algebraiczne

Przedstawimy teraz podstawową definicję grupy warkoczy w formie zaprezentowanej przez Artina w [1].

**Definicja 1.0.1.** Dla  $n > 1$  definiujemy  $(n-t)$  grupę warkoczy  $B_n$  przez prezentację, jako grupę o  $n - 1$  generatorach:  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ , w której zachodzą następujące równości:

1.  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ , dla  $|j - i| \geq 2$ ,
2.  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ , dla  $i = 1, \dots, n - 2$ .

Reprezentacja Burau jest reprezentacją grupy  $B_n$  w grupę macierzy nad algebra  $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ . Reprezentację Burau określamy na generatorach grupy warkoczy:

$$\sigma_i \xrightarrow{\rho} I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}$$

Możemy zatem traktować reprezentację Burau jako homomorfizm grupy warkoczy  $B_n$  w grupę  $\text{Aut}(M)$  automorfizmów pewnego wolnego,  $n$ -wymiarowego  $\Lambda$ -modułu  $M = \text{lin}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ , gdzie  $\varepsilon_i$  jest  $i$ -tym wektorem bazy standardowej. Automorfizmy te reprezentujemy macierzowo. Przyjmujemy, że otrzymane w obrazie reprezentacji Burau macierze są macierzami automorfizmów z bazy standardowej, w bazę standardową.

**Uwaga 1.** Reprezentacja Burau  $\rho$  jest dobrze określona.

**Dowód.** Trzeba pokazać, że  $\rho$  jest dobrze określoną funkcją – wystarczy sprawdzić, że spełnia te same relacje co  $B_n$ :

- $\rho(\sigma_i)\rho(\sigma_j) = \rho(\sigma_j)\rho(\sigma_i)$  dla  $|j - i| \geq 2$ ,
- $\rho(\sigma_i)\rho(\sigma_{i+1})\rho(\sigma_i) = \rho(\sigma_{i+1})\rho(\sigma_i)\rho(\sigma_{i+1})$  dla  $i = 1, \dots, n - 2$ .

Niech  $|j - i| \geq 2$  wtedy:

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_i)\rho(\sigma_j) &= I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1} \cdot I_{j-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-j-1} = \\ &= I_{\min(i,j)-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{|j-i|-2} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{\max(j,i)-1} = \\ &= I_{j-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-j-1} \cdot I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1} = \rho(\sigma_j)\rho(\sigma_i). \end{aligned}$$

Zauważmy, że by dowieść drugiego punktu wystarczy ograniczyć się do macierzy  $3 \times 3$ , ponieważ zarówno lewa, jak i prawa strona działa na współrzędne wektorów o numerach  $1, \dots, i-1$  oraz  $i+3, \dots, n$  identycznie.

$$\begin{aligned}
\rho(\sigma_i)\rho(\sigma_{i+1})\rho(\sigma_i) &= \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1-t & t-t^2 & t^2 \\ 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \rho(\sigma_{i+1})\rho(\sigma_i)\rho(\sigma_{i+1}).
\end{aligned}$$

Zatem reprezentacja Burau jest dobrze określona na grupie warkoczy  $B_n$ .

□

Otrzymaliśmy zatem  $n$  wymiarową reprezentację  $\rho$  grupy  $B_n$ . Łatwo jednak zauważyć, że reprezentacja ta jest przywiedlna. Faktycznie, dla  $i = 1, \dots, n-1$  mamy:

$$\rho(\sigma_i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zatem  $W = \text{lin}((1, \dots, 1))$  jest jednowymiarową przestrzenią niezmienniczą reprezentacji Burau. Chcemy wprowadzić teraz zredukowaną reprezentację Burau – reprezentację w przestrzeni ilorazowej  $V/W$ , gdzie  $V = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]^n$ . Musimy pokazać najpierw, że przekształcenie  $\hat{\rho} : B_n \rightarrow V/W$  jest reprezentacją. Wybierzmy najpierw bazę  $V/W = \text{lin}([\varepsilon_1], \dots, [\varepsilon_{n-1}])$ , gdzie  $[\alpha]$  oznacza klasę abstrakcji elementu  $\alpha \in V$  w przestrzeni ilorazowej  $V/W$ . Ponieważ  $\rho$  jest homomorfizmem, zatem dla dowolnych  $v \in V$  i  $w \in W$  oraz dowolnego  $i = 1, \dots, n-1$ , mamy  $[\sigma_i(v+w)] = [\sigma_i(v) + \sigma_i(w)] = [\sigma_i(v) + w] = [\sigma_i(v)]$ . Zatem wynik nie zależy od wyboru reprezentanta klasy abstrakcji, czyli  $\hat{\rho}$  jest dobrze określone, a ponieważ  $\rho$  jest homomorfizmem, więc również  $\hat{\rho}$  jest homomorfizmem. Wiemy zatem, że  $\hat{\rho}$  jest  $n-1$  wymiarową reprezentacją grupy  $B_n$  – będziemy ją nazywać zredukowaną reprezentacją Burau. Musimy ustalić jeszcze, jak wyglądać będą macierze odpowiadające generatorom grupy warkoczy.

Dla  $i = 1, \dots, n-2$  nie będzie żadnej różnicy, w porównaniu ze standardową reprezentacją Burau. Mamy:

$$\sigma_i \xrightarrow{\hat{\rho}} I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}$$

Różnica pojawi się natomiast w obrazie ostatniego generatora:  $\sigma_{n-1}([\varepsilon_i])$  działa identycznie, gdy  $i = 1, \dots, n-2$ . Natomiast ostatni z generatorów grupy warkoczy działa na klasę ostatniego wektora bazy  $V/W$  następująco:  $\sigma_{n-1}([\varepsilon_{n-1}]) = [(1-t)\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n] = [(1-t)\varepsilon_{n-1} + (1, \dots, 1) - \varepsilon_1 - \dots - \varepsilon_{n-1}] = [(1-t)\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_1 - \dots - \varepsilon_{n-1}] = -[\varepsilon_1] \dots - [\varepsilon_{n-2}] - t[\varepsilon_{n-1}]$ . Poniżej przedstawiamy odpowiednią macierz.

$$\sigma_{n-1} \xrightarrow{\widehat{\varrho}} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -t \end{pmatrix}$$

Otrzymana przez nas zredukowana reprezentacja Burau  $\widehat{\varrho}$  różni się od tej, którą można znaleźć w literaturze [4], jest jednak dogodniejsza do naszych celów. Ponadto różnica ta wynika jedynie z wyboru baz, względem których zapisujemy macierze.



## Rozdział 2

# Grupy warkoczy oraz reprezentacja Burau – podejście topologiczne

Rozdział ten rozpoczynamy trzema twierdzeniami z topologii, z których skorzystamy konstruując topologiczny odpowiednik reprezentacji Burau. Twierdzenia te można znaleźć w [6].

**Twierdzenie 1.** Niech  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  będzie łukowo spójną przestrzenią nakrywającą łukowo spójnej, lokalnie łukowo spójnej przestrzeni  $X$  oraz niech  $H$  będzie podgrupą  $p[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)] \subseteq \pi_1(X, x_0)$ . Wtedy:

1. Przestrzeń nakrywająca jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy  $H \triangleleft \pi_1(X, x_0)$ ,
2. Jeżeli  $\tilde{X}$  jest nakryciem regularnym, to  $\text{Aut}(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)/H$ .

**Twierdzenie 2.** Niech  $N, G$  będą grupami i niech  $N \triangleleft G$ . Wtedy istnieją przestrzeń  $X$  oraz jej przestrzeń nakrywająca  $\tilde{X}$  takie, że  $\pi_1(X) = G$  oraz  $\pi_1(\tilde{X}) = N$ .

**Twierdzenie 3.** Niech  $\tilde{X}$  będzie nakryciem przestrzeni  $X$ . Dla dowolnej drogi  $f : I \rightarrow X$  oraz dowolnego podniesienia  $\tilde{x}_0$  punktu bazowego  $f(0) = x_0$  istnieje dokładnie jedna droga  $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$  o początku w  $\tilde{x}_0$ , podnosząca  $f$ .

### 2.1. Grupy warkoczy jako zachowujące orientację dyfeomorfizmy

Podamy teraz równoważną definicję grupy warkoczy, dzięki której będziemy mogli spojrzeć ma nie od topologicznej strony. Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  – dysk jednostkowy zespolony z brzegiem.

$D_n$  – dysk jednostkowy z usuniętymi  $n$  punktami leżącymi na prostej rzeczywistej  $\mathbb{R}$  i należącymi do  $\text{Int}(D)$ , punkty te nazywać będziemy nakłuciami i oznaczymy przez  $x_1, \dots, x_n$ , indeksując zgodnie z porządkiem dziedzicznym z  $\mathbb{R}$ .

Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną, wtedy przez  $\text{Diff}_0^+(X)$  oznaczamy grupę zachowujących orientację dyfeomorfizmów przestrzeni z przestrzeni  $X$  w samą siebie, rozważanych z dokładnością do klasy izotopii, czyli grupę ilorazową grupy zachowujących orientację dyfeomorfizmów przestrzeni  $X$  przez grupę zachowujących orientację dyfeomorfizmów izotopijnych z przekształceniem identycznościowym  $id_X$ .

Okazuje się, że istnieje odpowiedniość pomiędzy grupami  $\text{Diff}_0^+(D_n)$ , a grupami warkoczy  $B_n$ . Fakt ten ilustruje następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 4.** Dla  $n > 1$  zachodzi  $B_n \cong \text{Diff}_0^+(D_n)$ . Generatorom  $\sigma_i$  z algebraicznej definicji grupy warkoczy odpowiadają pólbroty Dehna wokół odcinków o końcach w  $x_i$  oraz  $x_{i+1}$ , które również oznaczają będziemy przez  $\sigma_i$ .

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w [3].

## 2.2. Reprezentacja Burau topologicznie

Pokażemy teraz w jaki sposób możemy w naturalny sposób nadać topologiczny sens, zadanej dotychczas czysto algebraicznie, reprezentacji Burau. Rozważmy grupę podstawową przestrzeni  $D_n$ , czyli  $F_n$  – grupę wolną o  $n$  generatorach. Niech  $q_1, \dots, q_n$  będą generatorami  $F_n$ . Każdy element grupy  $F_n$  można zapisać jako  $q_{i_1}^{n_1} \cdot \dots \cdot q_{i_k}^{n_k}$ , gdzie  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ . Rozważmy teraz homomorfizm grup  $\epsilon : F_n \rightarrow \mathbb{Z}$  zadany wzorem:  $q_{i_1}^{n_1} \cdot \dots \cdot q_{i_k}^{n_k} \mapsto n_1 + \dots + n_k$ . Wiadomo, że jądro homomorfizmu  $\epsilon$  –  $\ker \epsilon$  jest podgrupą normalną grupy wolnej  $F_n$ . W dalszym ciągu  $F_n$  przedstawiać będziemy jako  $\pi_1(D_n, d_0) = \langle x_1, \dots, x_{n-1}, z \rangle$  – generatory to pętle o końcach w ustalonym punkcie brzegu dysku  $d_0$  obiegające odpowiednie punkty zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara ( $z$  to pętla wokół  $x_n$  – powód wyróżnienia jej znajduje się poniżej). Oczywiście, ponieważ  $D_n$  jest łukowo spójna, grupa  $\pi_1(D_n, d_0)$  nie zależy od wyboru punktu bazowego – w dalszym ciągu będziemy zatem pisać  $\pi_1(D_n)$ .

Na mocy Twierdzenia 2 konstruujemy nakrycie regularne  $(\tilde{D}_n, \tilde{p})$  przestrzeni  $D_n$  o grupie podstawowej  $\ker \epsilon$ .

Korzystając z Twierdzenia 1 otrzymujemy fakt, że  $\text{Aut}_{D_n}(\tilde{D}_n) = F_n / \ker \epsilon \cong \mathbb{Z}$ . Wiemy zatem, że  $\mathbb{Z}$  działa na  $\tilde{D}_n$  przez automorfizmy. Działanie to indukuje z kolei działanie  $\mathbb{Z}$  na abelianizacji:  $\text{Ab}(\pi_1(\tilde{D}_n))$ . Grupę tę w dalszym ciągu tekstu będziemy oznaczać  $H(\tilde{D}_n)$  – mając na uwadze fakt, że  $\text{Ab}(\pi_1(D_n)) \cong H_1(\tilde{D}_n)$ , czyli że I grupa homologii przestrzeni  $\tilde{D}_n$  jest izomorficzna z abelianizacją grupy podstawowej  $\tilde{D}_n$ . Zgodnie z poczynionymi we wstępie ustaleniami nie definiujemy grup homologii – w dalszej części pracy pracować będziemy z grupą  $H(\tilde{D}_n)$  jako z  $\text{Ab}(\pi_1(\tilde{D}_n))$ .

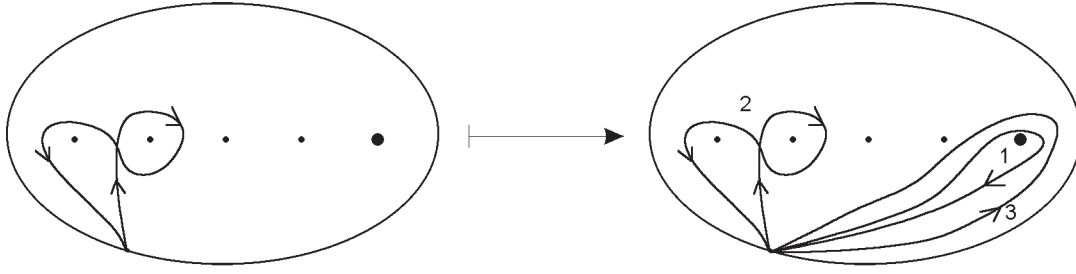
Pokazaliśmy do tej pory, że grupa  $\mathbb{Z}$  działa na  $\pi_1(\tilde{D}_n)$  przez automorfizmy, co indukuje działanie  $\mathbb{Z}$  na  $H(\tilde{D}_n)$ . Najpierw pokażmy wprost, jak wygląda działanie  $\mathbb{Z}$  na  $\tilde{D}_n$ . Wystarczy powiedzieć, jak działa pętla  $z \in F_n$  – oczywiście  $\mathbb{Z} = \langle z \rangle$ . Klasa tej pętli wyznacza działanie całego  $\mathbb{Z}$ . Ustalmy pętlę  $\omega \in \tilde{D}_n$ , jest to zatem podniesienie pewnej pętli  $z$  z  $\ker \epsilon \subset \pi_1(D_n)$ . Określamy działanie  $z$  na  $\omega$ . Rozważmy drogę będącą podniesieniem pętli  $z$  w  $\tilde{D}_n$  (jest ona wyznaczona jednoznacznie na mocy Twierdzenia 3). Działanie  $z$  polega zatem na sprzęganiu:  $\omega \mapsto z\omega z^{-1}$  – jest to oczywiście element  $\ker \epsilon$ , czyli  $\pi_1(\tilde{D}_n)$ , zatem obraz przy sprzęganiu podnosi się do pętli w  $\tilde{D}_n$ .

Pokażemy teraz, że zdefiniowane powyżej działanie jest dobrze określone. Musimy pokazać, że dowolne pętle:  $[\omega_1], [\omega_2] \in H(\tilde{D}_n)$  takie, że  $[\omega_1] = [\omega_2]$ . Chcemy pokazać, że wynik działania nie zależy od wyboru reprezentantów klas tych pętli. Musimy zatem udowodnić następującą równość:  $z[\omega_1]z^{-1} = z[\omega_2]z^{-1}$ , czyli równoważnie:  $[z\omega_1z^{-1}] = [z\omega_2z^{-1}]$ . Wystarczy więc pokazać, że  $[z\omega_1z^{-1}][z\omega_2^{-1}z^{-1}] = 1$ . Równoważnie mamy  $[z\omega_1z^{-1}z\omega_2^{-1}z^{-1}] = 1$ , czyli  $[z\omega_1\omega_2^{-1}z^{-1}] = 1$ . Wiadomo, że klasa  $[\omega_1\omega_2^{-1}]$  jest klasą  $1 \in \ker \epsilon$ , zatem również  $[z\omega_1\omega_2^{-1}z^{-1}] = 1$ .

Grupa  $H(\tilde{D}_n)$  jest abelowa, ma zatem w naturalny sposób strukturę  $\mathbb{Z}$ -modułu. Ponieważ powyżej udało nam się określić działanie  $\mathbb{Z}$  na  $H(\tilde{D}_n)$ , więc ma ona strukturę modułu nad  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ , czyli  $\Lambda$ -modułu.

Okazuje się, że  $H(\tilde{D}_n)$  jest wolnym  $\Lambda$ -modułem wymiaru  $n - 1$ . Dowód tego faktu przesunięty został do dodatku A, dla zachowania przejrzystości wywodu. Twierdzimy, że ele-





Rysunek 2.1: Sprzęganie pętlą  $z$  – obraz podnosi się do pętli w  $\tilde{D}_n$ .

menty  $g_1 = [x_1 z^{-1}], \dots, g_{n-1} = [x_{n-1} z^{-1}]$  są liniowo niezależnymi generatorami modułu  $H(\tilde{D}_n) = \text{Ab}(\ker \epsilon)$ .

### 2.3. Równoważność algebraicznej i topologicznej reprezentacji Burau

Pokażemy teraz, że nie bez przyczyny algebraiczną (zredukowaną) oraz topologiczną reprezentację Burau nazywamy w taki właśnie sposób. W pierwszym rozdziale niniejszej pracy podaliśmy obrazy generatorów grupy  $B_n$  przy zredukowanej reprezentacji Burau. Poniżej przedstawimy, w jaki sposób działają one na grupę  $H(\tilde{D}_n)$  – oczywiście pokazując ich działanie na elementy bazy  $g_1, \dots, g_{n-1}$ .

Rysunek 2.2 przedstawia działanie  $\sigma_1$  oraz  $\sigma_{n-1}$  na  $g_1$ . Pozostałe generatory, jak łatwo zauważyć, działają na  $g_1$  trywialnie. Otrzymujemy zatem następujące równości:  
 $x_1 z^{-1} \xrightarrow{\sigma_1} x_1 x_2 x_1^{-1} z^{-1} = [x_1 z^{-1}][z(x_2 z^{-1})z^{-1}][z(x_1^{-1})z^{-1}] = g_1 + t g_2 - t g_1 = (1-t)g_1 + t g_2,$   
 $x_1 z^{-1} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} x_1 x_{n-1}^{-1} = [x_1 z^{-1}][z x_{n-1}^{-1}] = g_1 - g_{n-1}.$

Działanie grupy  $B_n$  na  $g_2, \dots, g_{n-2}$  ilustruje rysunek 2.3 – również tutaj pomijamy generatory działające trywialnie. Zachodzą zatem następujące równości:

$$x_i z^{-1} \xrightarrow{\sigma_i} x_i x_{i+1} x_i^{-1} z^{-1} = [x_i z^{-1}][z(x_{i+1} z^{-1})z^{-1}][z(x_i^{-1})z^{-1}] = g_i + t g_{i+1} - t g_i = (1-t)g_i + t g_{i+1},$$

$$x_i z^{-1} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} x_i x_{n-1}^{-1} = [x_i z^{-1}][z x_{n-1}^{-1}] = g_i - g_{n-1}, \quad x_i z^{-1} \xrightarrow{\sigma_{i-1}} x_{i-1} z = g_{i-1}.$$

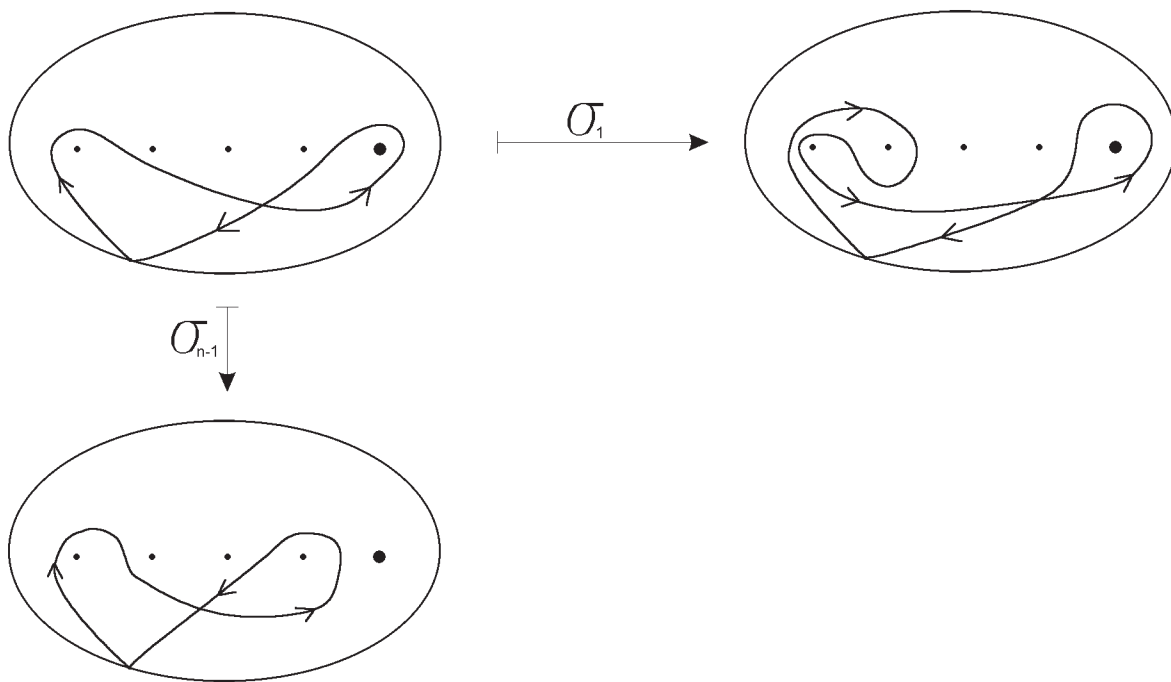
Pozostaje jeszcze sprawdzenie, w jaki sposób  $B_n$  działa na  $g_{n-1}$  – obrazuje to rysunek 2.4.

Widzimy, że jedyne nietrywialnie działające generatory  $B_n$  to dwa ostatnie:  $\sigma_{n-2}$  oraz  $\sigma_{n-1}$ . Otrzymujemy następujące równości:

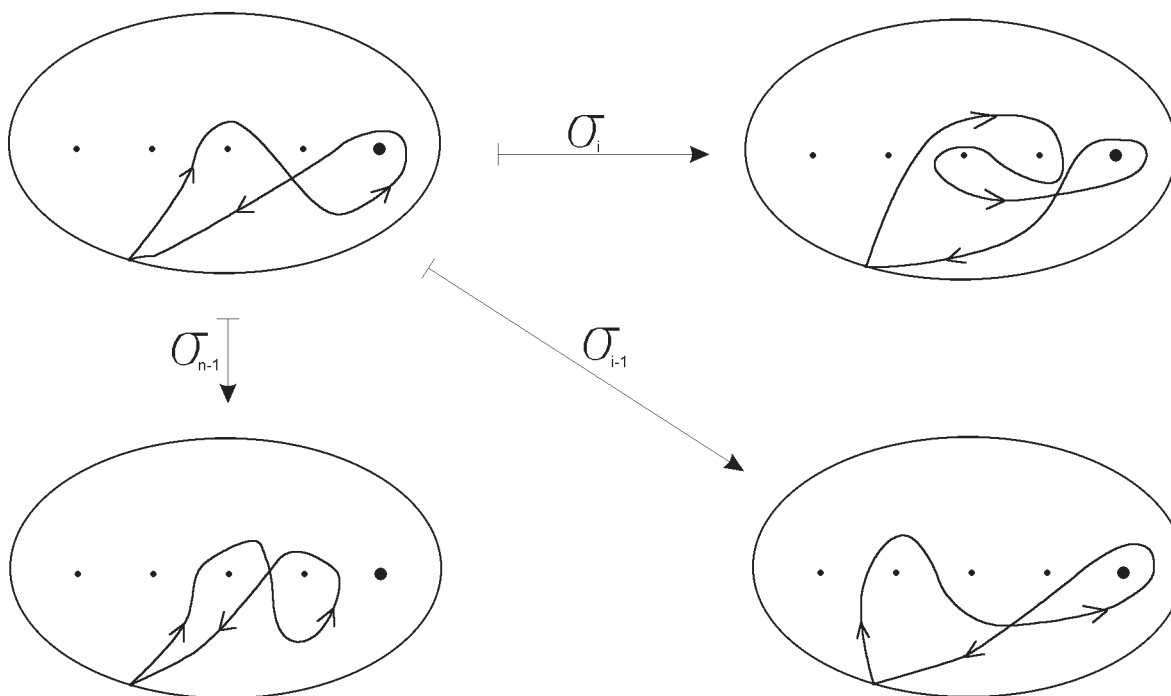
$$x_{n-1} z^{-1} \xrightarrow{\sigma_{n-2}} x_{n-2} z^{-1} = g_{n-2},$$

$$x_{n-1} z^{-1} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} x_{n-1} z x_{n-1}^{-1} = [x_{n-1} z^{-1}][z(x_{n-1}^{-1})z^{-1}][z x_{n-1}^{-1}] = g_{n-1} - t g_{n-1} - g_{n-1} = -t g_{n-1}.$$

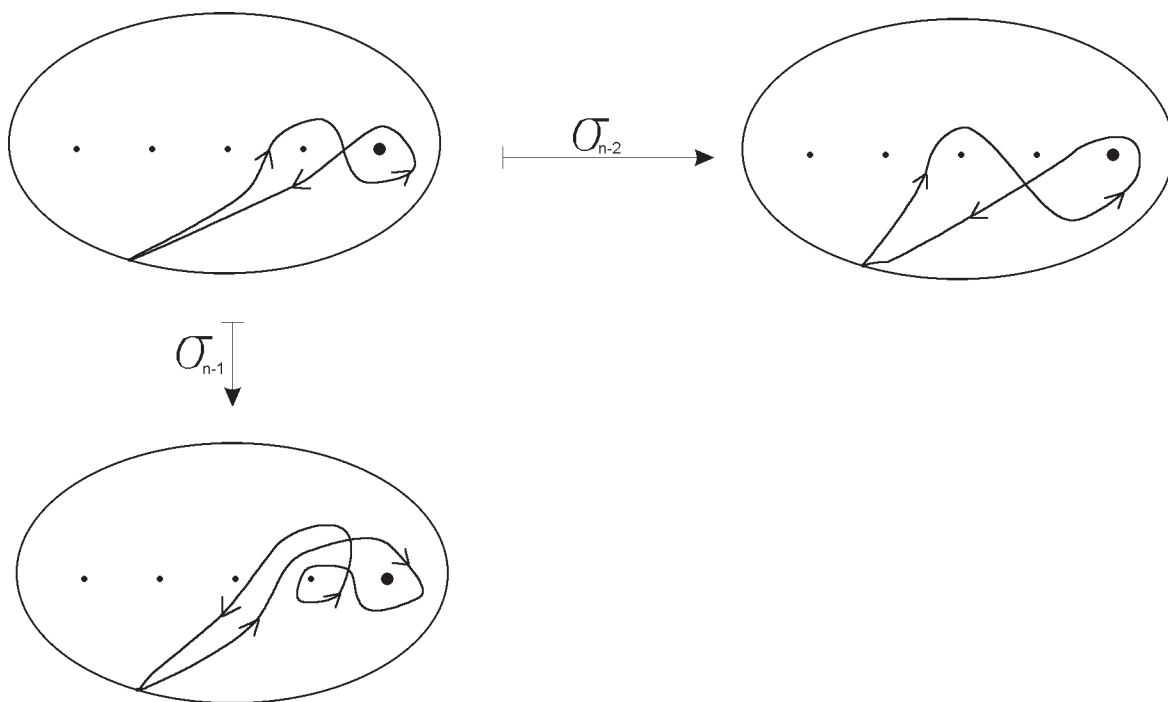
Podsumowując powyższe rozważania i reprezentując dane macierzowo otrzymujemy dla wszystkich generatorów  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  przy topologicznej reprezentacji Burau dokładnie transponowane macierze zredukowanej reprezentacji Burau. Biorąc pod uwagę, że przy rozważaniu tej ostatniej elementy grupy warkoczy działały z lewej strony na moduł  $M$  – przykładaliśmy całe słowo (w języku generatorów grupy warkoczy) do konkretnych elementów modułu, natomiast topologiczna reprezentacja Burau działa od prawej – czytamy jak działają jej kolejne od lewej wyrazy, obie reprezentacje okazują się być równe.



Rysunek 2.2: Działanie  $B_n$  na  $g_1 = x_1 z^{-1}$ .



Rysunek 2.3: Działanie  $B_n$  na  $g_i = x_i z^{-1}$  dla  $i = 2, \dots, n - 2$ .



Rysunek 2.4: Działanie  $B_n$  na  $g_{n-1} = x_{n-1}z^{-1}$ .



## Rozdział 3

# Reprezentacja Burau jest niewierna dla $n = 5$

Niewierność reprezentacji Burau dla  $n = 5$  jako pierwszy uzyskał Stephen Bigelow w [2]. W swojej pracy wykorzystuje on topologiczną interpretację reprezentacji Burau. Przedstawimy teraz kilka podstawowych definicji.

**Definicja 3.0.1.** *Niech  $\alpha$  i  $\beta$  będą łukami w  $D_n$ . Powiemy, że łuk  $\alpha$  można homotopijnie zdjąć z łuku  $\beta$  jeżeli istnieją homotopie  $h_1$  i  $h_2$  takie, że  $h_1(\alpha) \cap h_2(\beta) = \emptyset$ .*

Będziemy stosować pojęcia algebraicznej liczby przecięć – ważnego niezmiennika pętli ze względu na homotopię. Przecięć nie możemy jednak skutecznie dla naszych celów policzyć w pierścieniu  $\mathbb{Z}$ , ponieważ, jeżeli fragmenty dwóch łuków ograniczają obszar zawierający nakłucia, to nie można wtedy uznać przecięć po obu stronach tego obszaru za równoważne. Okazuje się jednak, że algebraiczną liczbę przecięć możemy liczyć z pomocą  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  – zliczając za pomocą  $k \in \mathbb{Z}$  ilość zamkniętych przez łuki nakłuc, które znalazły się pomiędzy przecięciami. Oczywiście ustalamy orientacje łuków, co powoduje powstanie dwóch typów przecięć: dodatnich i ujemnych; podobnie w zależności od orientacji łuków tworzących brzeg każdego z nakłutych dysków zamkniętych przez fragmenty łuków zawarte pomiędzy sąsiednimi przecięciami otrzymujemy informację, czy należy kolejny wyraz domnożyć o  $t^k$ , czy  $t^{-k}$ .

Podstawową obserwacją, przy pomocy której Bigelow wykazał niewierność reprezentacji Burau dla  $n = 5$  jest fakt, że obroty Dehna wokół dwóch krzywych prostych są przemienne dokładnie wtedy, gdy łuki te można homotopijnie z siebie zdjąć. Szukanie nietrywialnego elementu jądra reprezentacji Burau sprowadza się zatem do szukania dwóch łuków, których nie można homotopijnie z siebie zdjąć, lecz reprezentacja Burau traktuje je tak, jakby było inaczej.

**Definicja 3.0.2.** *Niech  $\alpha$  i  $\beta$  będą dwoma łukami w  $D_n$  oraz niech  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  będą ich podniesieniami do  $\tilde{D}_n$ . Definiujemy dla nich następujący wielomian Laurenta  $\int_{\beta} \alpha = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (t^k \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) t^k$ , gdzie  $(t^k \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  jest algebraiczną liczbą przecięć  $\tilde{\alpha}$  i  $\tilde{\beta}$ .*

$\int_{\beta} \alpha$  wyznaczony jest z dokładnością do znaku i do potęgi  $t$ , co jednak nie będzie przeszkadzać, ponieważ interesują nas jedynie przypadki, gdy  $\int_{\beta} \alpha = 0$ .

Zaprezentujemy teraz główny lemat, którego dowód można znaleźć w [2].

**Lemat 1.** *Dla  $n \geq 3$  reprezentacja Burau grupy  $B_n$  jest niewierna dokładnie wtedy, gdy istnieją  $\alpha, \beta$  łuki w  $D_n$  takie, że  $\alpha$  ma końce w  $x_1, x_2$ , a  $\beta$  w  $d_0$  i  $x_3$ , bądź w  $x_3$  i  $x_4$ , łuków tych nie można zdjąć homotopijnie z siebie, ale  $\int_{\beta} \alpha = 0$ .*

Musimy zatem pokazać dwa łuki, zaczepione w różnych punktach, dla których  $\int_{\beta} \alpha = 0$ , i których nie można homotopijnie z siebie zdjąć. Następnie musimy znaleźć dwa warkocze, które przekształcają pewne łuki  $\gamma_1, \gamma_2$  (o końcach jak w Lemacie 1) odpowiednio na  $\alpha$  i  $\beta$ .

Rysunek 3.1 przedstawia właśnie dwa takie łuki w  $D_5$ . Łatwo zauważyć, że ich fragmenty ograniczają nawet kilka obszarów zawierających nakłucia – zatem z pewnością nie można homotopijnie zdjąć  $\alpha$  z  $\beta$ . Licząc  $\int_{\beta} \alpha$  otrzymujemy:

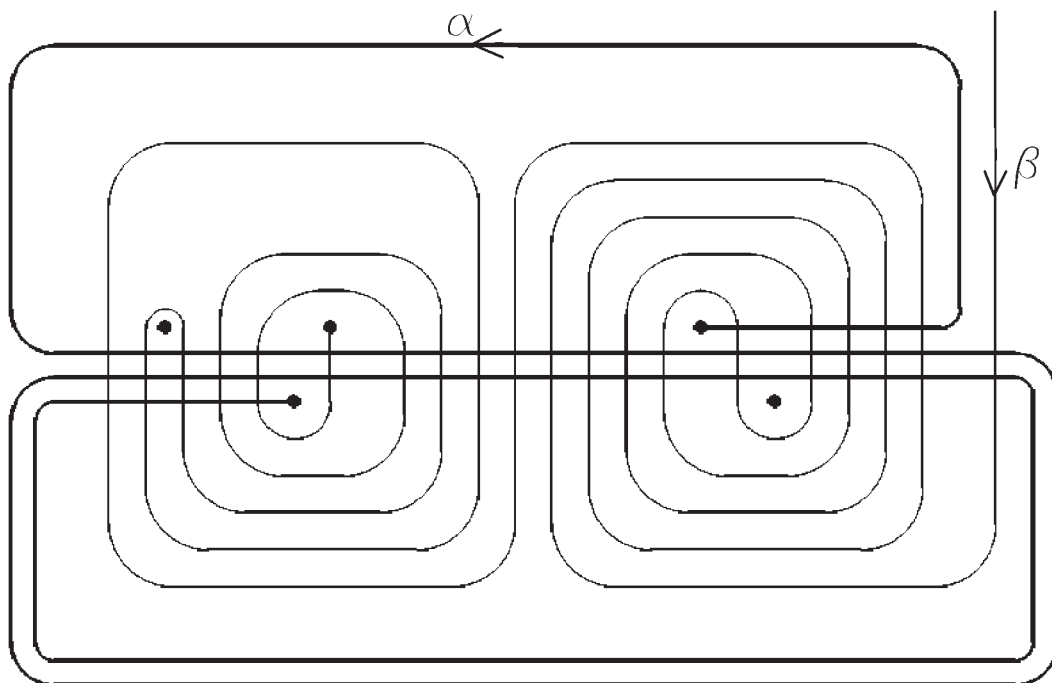
$$\begin{aligned} \int_{\beta} \alpha &= -t^2 + t^1 - t^0 + t^{-1} - t^{-2} \\ &\quad - t^1 - t^4 + t^5 + t^3 + t^1 - t^0 - t^2 - t^4 + t^3 + t^0 \\ &\quad - t^1 + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t^1 + t^0 \\ &\quad - t^{-1} - t^2 + t^3 + t^1 + t^{-1} - t^{-2} - t^0 - t^2 + t^1 + t^{-2} \\ &\quad - t^{-1} + t^0 - t^1 + t^2 - t^3 + t^2 - t^1 + t^0 - t^{-1} + t^{-2} \\ &\quad - t^{-3} - t^0 + t^1 + t^{-1} + t^{-3} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jako wniosek z Lematu 1 otrzymujemy niewierność reprezentacji Burau dla  $n = 5$ . Dodatkowo zastosowana technika pozwala wyprodukować explicite nietrywialne elementy jądra reprezentacji Burau grupy  $B_5$ . W [2] Bigelow otrzymuje inne warkocze oraz inne łuki  $\alpha$  i  $\beta$ . Jest tak dlatego, że zdefiniowane przez nas półobroty Dehna powodują obrót zgodnie ze wskazówkami zegara (w [2] obrót odbywa się w przeciwną stronę). Podobnie jeżeli chodzi o stronę działania słów warkoczowych na nakłuty dysk  $D_n$ : Bigelow rozważa warkocze działające od lewej, tu zaś warkocze działają od prawej. Warkocz  $\psi_1$  przekształca odcinek idący z nakłucia  $x_4$  do  $x_5$  w łuk  $\alpha$ , natomiast warkocz  $\psi_2$  przekształca odcinek z punktu bazowego  $d_0$  do  $x_5$  w łuk  $\beta$ .

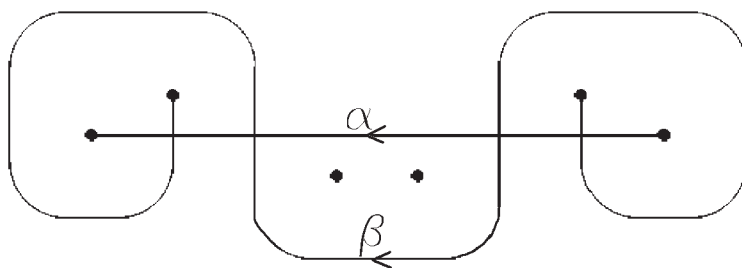
$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_4^3 \sigma_3 \sigma_2 \\ \psi_2 &= \sigma_4^{-1} \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^{-2} \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_4^5 \end{aligned}$$

Zatem warkocz  $\psi_1^{-1} \sigma_4 \psi_1$  jest półobrotem Dehna wokół regularnego otoczenia  $\alpha$ , natomiast  $\psi_2^{-1} \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \psi_2$  jest pełnym obrotem Dehna wokół  $\beta \cup \partial D_n$ . Ponieważ  $\alpha$  i  $\beta$  nie mogą być homotopijnie zdjęte z siebie, więc obroty te nie są przemienne, zatem mają nietrywialny komutator:  $[\psi_1^{-1} \sigma_4 \psi_1, \psi_2^{-1} \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \psi_2]$ . Z drugiej jednak strony, ponieważ  $\int_{\beta} \alpha = 0$  obraz przy reprezentacji Burau tego warkocza będzie trywialny.

Powyższy przykład jest bardzo skomplikowany – słowo warkoczowe reprezentujące komutator odpowiednich obrotów Dehna jest długości aż 120 w języku generatorów  $B_5$ . Dużo wyrażniej zastosowaną teorię obrazuje dowód niewierności reprezentacji Burau grupy  $B_6$  – rysunek 3.2. Przedstawione na nim łuki  $\alpha$  i  $\beta$  nie mogą być oczywiście homotopijnie z siebie zdjęte. Każdy również może policzyć, że  $\int_{\beta} \alpha = 0$ , ponieważ istnieją tylko cztery przecięcia (nie zaś 50, jak w przykładzie z rysunku 3.1). Dla tego przykładu mamy warkocz  $\psi_1 = \sigma_4 \sigma_5^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1$  przekształcający odcinek pomiędzy nakłuciami  $x_3$ , a  $x_4$  w łuk  $\alpha$  oraz warkocz  $\psi_2 = \sigma_4^{-1} \sigma_5^2 \sigma_2 \sigma_1^{-2}$  przekształcający ten sam odcinek w  $\beta$ . Podobnie jak w przypadku  $B_5$  nietrywialny element jądra reprezentacji Burau grupy  $B_6$  to:  $[\psi_1^{-1} \sigma_3 \psi_1, \psi_2^{-1} \sigma_3 \psi_2]$ .



Rysunek 3.1: Łuków  $\alpha$  i  $\beta$  nie można homotopijnie zdjąć z siebie oraz  $\int_{\beta} \alpha = 0$ .



Rysunek 3.2: Najprostszy znany przykład łuków w  $D_6$ , których istnienie dowodzi niewierności  $B_6$ .





## Dodatek A

# $H(\tilde{D}_n)$ jako wolny $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -moduł wymiaru $n - 1$

Rozważając reprezentację Burau od strony topologicznej pokazaliśmy w jaki sposób na grupę  $H(\tilde{D}_n) = \text{Ab}(\ker \epsilon)$  działają wielomiany Laurenta jednej zmiennej nad  $\mathbb{Z}$ , czyli  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}] = \Lambda$ . Pokażemy teraz, że  $H(\tilde{D}_n)$  jest to wolny  $\Lambda$ -moduł wymiaru  $n - 1$ . W tym celu wykazemy, że  $g_1 = [x_1 z^{-1}], \dots, g_{n-1} = [x_{n-1} z^{-1}]$  jest bazą  $H(\tilde{D}_n)$ . Musimy zatem pokazać, że generatory te są liniowo niezależne oraz, że rozpinają cały moduł – to znaczy, że dowolny jego element można zapisać przy pomocy ich oraz ich sprzężeń.

### A.1. Liniowa niezależność generatorów $H(\tilde{D}_n)$

Podczas dowodzenia liniowej niezależności  $g_1, \dots, g_{n-1}$  skorzystamy z następującego faktu.

**Fakt 1.** *Dla dowolnego słowa  $\alpha \in F_n = \langle x_1, \dots, x_{n-1}, z \rangle$ , jeżeli  $a_0 \dots a_k = \alpha \in [0] \in \text{Ab}(\ker \epsilon)$ , to suma wszystkich wystąpień w  $\alpha$  każdego z generatorów  $F_n$  jest równa 0.*

*Dowód.* Najpierw zauważmy, że twierdzenie to prawdziwe jest dla elementu neutralnego grupy wolnej  $F_n$  – z definicji. W oczywisty sposób teza przenosi się na  $\ker \epsilon$ , jako na podgrupę grupy  $F_n$  (mają te same elementy neutralne). Teza prawdziwa jest również dla  $\text{Ab}(\ker \epsilon) = \ker \epsilon / \langle x^{-1} y^{-1} x y : x, y \in \ker \epsilon \rangle$  ponieważ abelianizując  $\ker \epsilon$ , czyli wykonując dzielenie przez komutant, utożsamiamy jedynie iloczyny komutatorów. Jako wniosek otrzymujemy, że aby element  $\ker \epsilon$  trafił do klasy abstrakcji  $[0]$  musi należeć do komutanta, czyli być iloczynem komutatorów – musi zatem mieć zerową sumę wystąpień każdego z generatorów.  $\square$

Łatwo teraz pokazać, że generatory  $g_1, \dots, g_{n-1}$   $\Lambda$ -modułu  $H(\tilde{D}_n)$  są liniowo niezależne.

**Twierdzenie 5.** *Generatory  $g_1, \dots, g_{n-1}$   $\Lambda$ -modułu  $H(\tilde{D}_n)$  są liniowo niezależne.*

*Dowód.* Załóżmy nie wprost, że  $g_1, \dots, g_{n-1}$  są liniowo zależne, czyli istnieją wielomiany Laurenta  $p_1(t), \dots, p_{n-1}(t) \in \Lambda$  nie wszystkie równe 0 takie, że  $p_1(t)g_1 + \dots + p_{n-1}(t)g_{n-1} = 0$ . Znaczy to, że suma wystąpień wszystkich generatorów  $x_1, \dots, x_{n-1}, z$  w wyrażeniu  $p_1(t)g_1 + \dots + p_{n-1}(t)g_{n-1}$  wynosi 0.

Ale  $x_1$  występuje jedynie w  $g_1$ , oraz w  $p_1(t)g_1$  suma wystąpień  $x_1$  jest zerowa tylko wtedy, gdy  $p_1(t) = 0$ .

Analogicznie pokazujemy dla  $x_2, \dots, x_{n-1}$ . Zatem, aby suma wszystkich wystąpień każdego z generatorów  $F_n$  była zerowa, wszystkie wielomiany Laurenta  $p_1(t), \dots, p_{n-1}(t)$  muszą być identycznie równe 0. Sprzeczność.  $\square$

## A.2. Każdy element $\text{Ab}(\ker \epsilon)$ można zapisać za pomocą generatorów $g_1, \dots, g_{n-1}$ .

Pozostało nam pokazać, że proponowane przez nas generatory  $g_1, \dots, g_{n-1}$  faktycznie rozpinają  $\Lambda$ -moduł  $H(\tilde{D}_n)$ . Pokażemy teraz, że dowolny element  $\ker \epsilon$  możemy zapisać przy pomocy generatorów  $g_1, \dots, g_{n-1}$  i ich sprzężeń. Poniżej prezentujemy dwa algorytmy pozwalające znaleźć elementy  $\Lambda$ -modułu  $H(\tilde{D}_n)$  zapisane w bazie  $g_1, \dots, g_{n-1}$  dla dowolnych elementów  $\ker \epsilon$ . Pokrótkie omówimy działanie każdego z nich.

Pierwszy algorytm działa na słowach w sensie grupy wolnej  $F_n$ , czyli na wejściu otrzymuje ciąg  $a_0 \dots a_l$  nad alfabetem złożonym z  $x_1, \dots, x_{n-1}, x_1^{-1}, \dots, x_{n-1}^{-1}, z, z^{-1}$  i przekształca je na ciąg złożony z generatorów  $H(\tilde{D}_n)$  (i ich odwrotności), czyli  $x_j z^{-1}$  (oraz  $z x_j^{-1}$ ) dla  $j := 1, \dots, n-1$ . Podczas działania algorytmu używane są dwa liczniki  $m$  i  $k$ .  $m$  przechowuje informację, jak wiele sprzężeń musi zostać wykonanych, czyli jak wiele (liczba ta może być również ujemna) niewykorzystanych liter  $z$  (lub  $z^{-1}$ ) następuje po fragmencie już przetworzonym, czyli też ile trzeba będzie wstawić liter przeciwnych po zapisaniu generatora (a następnie, aby wyrównać ilość  $z$  i  $z^{-1}$  pomiędzy kolejno czytany literami – czyli by zachować równowagę elementów reprezentowanych przez słowa wejściowe i wyjściowe). Licznik  $k$  przechowuje informację o tym, do którego miejsca zapisany został już wyraz wyjściowy. Algorytm korzysta z dwóch procedur, które uruchamiane są, gdy zostanie przeczytany odpowiednio symbol  $x_j$  lub  $x_j^{-1}$ . Różnice między procedurami Generator-Pozytywny( $a_i, i, k, m$ ) i Generator-Negatywny( $a_i, i, k, m$ ) jest czysto techniczna i wynika jedynie z faktu, że w przypadku przeczytania pozytywnego generatora  $F_n$  musimy po nim zapisać  $z^{-1}$ , natomiast natrafiając na  $x_j^{-1}$  musimy zadbać, by przed przepisaniem go znalazło się  $z$ . Cały algorytm skupia się zatem na dopisywaniu pomiędzy kolejne przeczytane litery postaci  $x_j$  oraz  $x_j^{-1}$  odpowiedniej ilości  $z$  i  $z^{-1}$ . Prześledzenie pierwszego algorytmu pozwoli zrozumieć działanie drugiego, którego działanie jest w zasadzie identyczne jak pierwszego, jedynie słowo wyjściowe zapisywane jest bezpośrednio przy pomocy generatorów  $g_1, \dots, g_{n-1}$  oraz sprzężeń, czyli mnożenia przez  $t$ . Poniżej prezentujemy oba algorytmy a następnie dwie procedury pomocnicze używane w pierwszym z nich. Poprawność drugiego algorytmu wynika bezpośrednio z poprawności pierwszego, ta zaś wynika z faktu, że na wejściu otrzymuje on słowo z  $\ker \epsilon$ , zatem suma wykładników wszystkich generatorów jest zerowa, oraz ponieważ pomiędzy kolejne generatory dopisuje on zawsze tę samą ilość  $z$ , co  $z^{-1}$ .

Istnienie algorytmu pozwalającego zapisać dowolny wyraz  $\ker \epsilon$  w bazie  $g_1, \dots, g_{n-1}$  wraz z liniową niezależnością generatorów dowodzi, że są one bazą  $H(\tilde{D}_n)$ .

**Wejście:** Słowo  $a_0 \dots a_l$  nad alfabetem  $x_1, \dots, x_{n-1}, z$  należące do  $\ker \epsilon$ .

**Wyjście:** Słowo  $b_0 \dots b_s$  takie, że  $a_0 \dots a_l = b_0 \dots b_s \in \ker \epsilon$  posiadające naturalną interpretację w  $H(\tilde{D}_n)$ .

```
1.1  $k := 0$ ;  
1.2  $m := 0$ ;  
1.3 for  $i := 0$  to  $l$  do  
1.4   if  $a_i = x_1$  or  $\dots$  or  $a_i = x_{n-1}$  then  
1.5      $\text{Generator-Pozytywny}(a_i, i, k, m)$   
1.6   end  
1.7   if  $a_i = x_1^{-1}$  or  $\dots$  or  $a_i = x_{n-1}^{-1}$  then  
1.8      $\text{Generator-Negatywny}(a_i, i, k, m)$   
1.9   end  
1.10  if  $a_i = z$  then  
1.11    if  $m \geq 0$  then  
1.12       $m := m + 1$ ;  
1.13       $b_k := z$ ;  
1.14       $k := k + 1$ ;  
1.15    end  
1.16    if  $m < 0$  then  
1.17       $m := m + 1$ ;  
1.18       $k := k - 1$ ;  
1.19       $b_k := \text{nil}$ ;  
1.20    end  
1.21  end  
1.22  if  $a_i = z^{-1}$  then  
1.23    if  $m \leq 0$  then  
1.24       $b_k := z^{-1}$ ;  
1.25       $k := k + 1$ ;  
1.26       $m := m - 1$ ;  
1.27    end  
1.28    if  $m > 0$  then  
1.29       $k := k - 1$ ;  
1.30       $m := m - 1$ ;  
1.31       $b_k := \text{nil}$ ;  
1.32    end  
1.33  end  
1.34 end
```

**Algorytm 1:** Tworzenie elementu  $H(\tilde{D}_n)$  z elementu  $\ker \epsilon$

**Wejście:** Słowo  $a_0 \dots a_l$  nad alfabetem  $x_1, \dots, x_{n-1}, z$  należące do  $\ker \epsilon$ .

**Wyjście:** Wypisany element  $H(\tilde{D}_n)$  w bazie  $g_1, \dots, g_{n-1}$ .

```
2.1  $m := 0;$ 
2.2 for  $i := 0$  to  $l$  do
2.3   for  $j := 1$  to  $n - 1$  do
2.4     if  $a_i = x_j$  then
2.5        $\text{write}(t^m g_j +);$ 
2.6        $m := m + 1;$ 
2.7     end
2.8     if  $a_i = x_j^{-1}$  then
2.9        $m := m - 1;$ 
2.10     $\text{write}((-t^m g_j) +);$ 
2.11    end
2.12  end
2.13  if  $a_i = z$  then
2.14     $m := m + 1$ 
2.15  end
2.16  if  $a_i = z^{-1}$  then
2.17     $m := m - 1$ 
2.18  end
2.19 end
```

**Algorytm 2:** Tłumaczenie wyrazów  $\ker \epsilon$  na język generatorów  $H(\tilde{D}_n)$

**Wejście:**  $a_i \in \{x_1, \dots, x_{n-1}\}, i, k, m \in \mathbb{Z}$

```
3.1  $b_k := a_i;$ 
3.2  $k := k + 1;$ 
3.3  $b_k := z^{-1};$ 
3.4  $k := k + 1;$ 
3.5 if  $m > 0$  then
3.6   for  $j := 1$  to  $m$  do
3.7      $b_k := z^{-1};$ 
3.8      $k := k + 1;$ 
3.9   end
3.10   $m := m + 1;$ 
3.11  for  $j := 1$  to  $m$  do
3.12     $b_k := z;$ 
3.13     $k := k + 1;$ 
3.14  end
3.15 end
3.16 if  $m < -1$  then
3.17   for  $j := 1$  to  $-m$  do
3.18      $b_k := z;$ 
3.19      $k := k + 1;$ 
3.20   end
3.21    $m := m + 1;$ 
3.22   for  $j := 1$  to  $-m$  do
3.23      $b_k := z^{-1};$ 
3.24      $k := k + 1;$ 
3.25   end
3.26 end
3.27 if  $m = -1$  then
3.28    $b_k := z;$ 
3.29    $k := k + 1;$ 
3.30    $m := 0;$ 
3.31 end
3.32 if  $m = 0$  then
3.33    $b_k := z;$ 
3.34    $k := k + 1;$ 
3.35    $m := 1;$ 
3.36 end
```

Procedura Generator-Pozytywny( $a_i, i, k, m$ )

**Wejście:**  $a_i \in \{x_1^{-1}, \dots, x_{n-1}^{-1}\}, i, k, m \in \mathbb{Z}$

```
4.1 if  $m > 0$  then
4.2   |  $m := m - 1$ ;
4.3 end
4.4 if  $m \leq 0$  then
4.5   |  $m := m - 1$ ;
4.6   |  $b_k := z^{-1}$ ;
4.7   |  $k := k + 1$ ;
4.8   |  $b_k := z$ ;
4.9   |  $k := k + 1$ ;
4.10 end
4.11  $b_k := a_i$ ;
4.12  $k := k + 1$ ;
4.13 if  $m > 0$  then
4.14   | for  $j := 1$  to  $m$  do
4.15     |  $b_k := z^{-1}$ ;
4.16     |  $k := k + 1$ ;
4.17   | end
4.18   |  $m := m + 1$ ;
4.19   | for  $j := 1$  to  $m$  do
4.20     |  $b_k := z$ ;
4.21     |  $k := k + 1$ ;
4.22   | end
4.23 end
4.24 if  $m < -1$  then
4.25   | for  $j := 1$  to  $-m$  do
4.26     |  $b_k := z$ ;
4.27     |  $k := k + 1$ ;
4.28   | end
4.29   |  $m := m + 1$ ;
4.30   | for  $j := 1$  to  $-m$  do
4.31     |  $b_k := z^{-1}$ ;
4.32     |  $k := k + 1$ ;
4.33   | end
4.34 end
4.35 if  $m = -1$  then
4.36   |  $b_k := z$ ;
4.37   |  $k := k + 1$ ;
4.38   |  $m := 0$ ;
4.39 end
4.40 if  $m = 0$  then
4.41   |  $b_k := z$ ;
4.42   |  $k := k + 1$ ;
4.43   |  $m := 1$ ;
4.44 end
```

Procedura Generator-Negatywny( $a_i, i, k, m$ )

# Bibliografia

- [1] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Hamburg, 4 (1925), 47–72.
- [2] S. Bigelow, *The Burau Representation is Not Faithful for  $n = 5$* , Geometry & Topology 3 (1999) 397–404.
- [3] J. S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Annals of Mathematics Studies 82, Princeton University Press, N.J., No. 1974.
- [4] J. S. Birman, T. E. Brendle, *Braids: A survey*, w W. Menasco, M. Thistlethwaite, ed., Handbook of Knot Theory, Elsevier, Amsterdam, 2005. Dostępne na stronie: <http://arXiv.org/math.GT/0409205>.
- [5] W. Burau *Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen*, Abh. Math. Sem. Ham. II (1936), 171–178.
- [6] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002, s. 166.
- [7] J. A. Moody, *The Burau representation of the braid group  $B_n$  is unfaithful for large  $n$* , Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 25(2):379–384, 1991.
- [8] D.D. Long, M. Paton, *The Burau representation is not faithful for  $n \geq 6$* , Topology, 32(2):439–447, 1993.
- [9] V. Turaev, *Faithful linear representations of braid groups*, Séminaire Bourbaki, 42, 1999-2000, exp. no. 878, 389–409.