Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Marek Czarnecki
Nr albumu: 208417

Analiza formuł modalnego rachunku μ pod względem szybkości osiągania punktów stałych

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA
w zakresie LOGIKA

Praca wykonana pod kierunkiem
profesora Damiana Niwińskiego
Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Wrzesień 2010

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data | Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data | Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W niniejszej rozprawie badamy formuły modalnego rachunku μ pod względem szybkości, z jaką osiągają one punkty stałe. Rozważamy formuły *ograniczone* oraz *konstruktywne* oraz ich związki z formułami ciągłymi. Następnie dla każdej liczby porządkowej $\alpha < \omega^2$ podajemy przykład formuły osiągającej punkt stały po co najwyżej α krokach oraz konstruujemy model, w którym do osiągnięcia punktu stałego formuła ta potrzebuje dokładnie α kroków.

Słowa kluczowe

punkt stały, modalny rachunek μ, bezpiecznik, formuła konstruktywna, formuła ciągła, szybkość osiągania punktu stałego

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

03G10 Lattices and related structures

Tytuł pracy w języku angielskim

Analysis of the modal μ–calculus formulae with respect to the speed of reaching fixed points

Spis treści

Wprowadzenie 7

1. Podstawy modalnego rachunku μ 9
  1.1. Składnia i semantyka modalnego rachunku μ 10
  1.2. Podstawowe własności modalnego rachunku μ 12

2. Formuły szybko osiągające punkty stałe 15
  2.1. Formuły ciągłe 17
  2.2. Formuły ograniczone i konstruktywne oraz ich związki z formułami ciągłymi . 19

3. Formuły osiągające punkty stałe po więcej niż ω krokach 25
  3.1. Przykłady formuł osiągających punkty stałe po $\alpha < \omega^2$ krokach 26

Bibliografia 33

Spis rysunków

2.1. Przyporządkowanie liczbom porządkowym drzew. Drzewo dla 0, krok następnika, krok graniczny. 17

2.2. Model $\mathcal{M}$ użyty do dowodu nieciągłości formuły $\Box x \wedge \Box\Box \bot$ w twierdzeniu 2.2.2. 21

2.3. Model, w którym formuła $(\Diamond x \wedge p_1 \wedge \Box p_1) \vee (\Box x \wedge \neg p_1 \wedge \Box p_1) \vee \Box \bot$ osiąga punkt stały dopiero po $\omega + 1$ krokach. 22

2.4. Relacje pomiędzy formułami ciągłymi, ograniczonymi i konstruktywnymi. Strzałki symbolizują właściwe inkluzje. 23

3.1. Konstrukcja drzew, w których formuły φ_α osiągają punkty stałe po α krokach dla $\omega \leq \alpha < \omega^2$. 30

Wprowadzenie

Modalny rachunek μ wywodzi się z informatyki teoretycznej, nie zaś, jak duża część logik modalnych, z filozoficznych rozważań nad pojęciem możliwości. Rachunek ten znalazł szerokie zastosowania w weryfikacji systemów komputerowych. Stanowi on bardzo naturalne rozszerzenie logiki modalnej – jest to wzbogacenie języka logiki modalnej o definicje indukcyjne, co owocuje znacznym wzrostem jego semantycznej siły.

Jednym z pierwszych zastosowań logiki modalnej w weryfikacji programów komputerowych była, wprowadzona w latach 60. XX wieku logika Hoare'a, uprawiana jeszcze w stylu teorio–dowodowym. Następnie pojawiły się logiki dynamiczne wraz z najbardziej popularną PDL (*propositional dynamic logic*), której konstrukcja $< a > \varphi$ interpretowana jest jako *możliwe jest, by program a zakończył działanie w stanie spełniającym* φ. Semantyka PDL wyrażana jest w modelach Kripkego. We wczesnych latach 80. XX wieku pojawiła się inna, prostsza logika służąca do weryfikacji programów komputerowych: CTL (*computation tree logic*), posiadająca jedynie jedną modalność interpretowaną jako *następny stan*, posiadająca w zamian konstrukcje temporalne jak na przykład *Until*: $\varphi U \psi$, czy *Finally*: $F\varphi$ oraz kwantyfikację po ścieżkach.

W międzyczasie rozwijały się modalne logiki opisujące procesy. Semantyka tych logik wyrażana była w etykietowanych modelach Kripkego. Ważną różnicą między użyciem modeli Kripkego do weryfikacji poprawności systemów, a w analizie przebiegu procesów jest to, że przejścia oznaczały w tej ostatniej akcje proste, nie zaś wykonanie całego programu, jak w przypadku PDL, czy CTL. Jedną z logik stosowanych do analizy procesów była HML (*Hennessy—Milner logic*) – prosta logika modalna, w której semantyka operatorów modalnych odnosi się do wykonywania przez konkretny program pojedynczych akcji. Oczywiście HML była bardzo ubogą logiką, niepozwalającą na wyrażanie wielu, potrzebnych w weryfikacji systemów komputerowych, pojęć takich, jak na przykład *możliwość/konieczność ostatecznego przejścia systemu do stanu o określonych właściwościach*, czy *konieczność przechodzenia w przyszłości przez stany spełniające pewną specyfikację*. Aby móc wyrażać te i inne potrzebne własności stosowano infinitystyczne wersje HML, pozwalające na nieskończone koniunkcje i alternatywy. Tego typu rozszerzenie logiki nie odpowiadało jednak ówczesnym potrzebom, gdyż owocowało pojawieniem się formuł o nieskończonych długościach, które nie mogą być poddawane analizie komputerowej.

W 1983 roku Dexter Kozen opublikował wyniki badań nad logikami modalnymi wzbogaconymi o operatory punktu stałego [Koz83], mające na celu dostarczyć językowi sposobu do wyrażania rekursji. Powstałą w ten sposób logikę nazwał modalnym rachunkiem μ. Łączy ona w sobie wyjątkowo prostą składnię oraz dużą siłę semantyczną, dostarczaną przez operatory punktu stałego. Wspomniane wcześniej logiki jak PDL, CTL, czy HML można rozważać, jako fragmenty modalnego rachunku μ.

W niniejszej rozprawie badamy szybkość, z jaką formuły modalnego μ rachunku osiągają punkty stałe. Interesuje nas najmniejsze ograniczenie α na liczbę iteracji formuły takie, by w dowolnym modelu Kripkego α–krotna iteracja tej formuły (rozumianej jako automorfizm podzbiorów modelu) przyłożona do zbioru pustego dawała najmniejszy punkt stały w tym modelu. Pokażemy przykłady formuł, osiągających punkty stałe bardzo szybko – w co najwyżej ω krokach, jak również takich, które nie mają takiego ograniczenia w ogóle. W głównym, trzecim rozdziale niniejszej rozprawy prezentujemy formuły potrzebujące do osiągnięcia swoich punktów stałych aż α iteracji, dla dowolnego $\omega \le \alpha < \omega^2$.

Rozdział 1

Podstawy modalnego rachunku μ

Zanim przejdziemy bezpośrednio do omawiania składni i semantyki modalnego rachunku μ pokrótce przyjrzymy się podstawom algebraicznym, dzięki którym mógł on powstać.

Rozważając dowolne przekształcenie $f\colon X \longrightarrow X$ możemy pytać o istnienie jego *punktów stałych*, czyli takich elementów $x \in X$, by $f(x) = x$. Dodatkowo, jeżeli na zbiorze X zadany jest częściowy porządek $\leq$, możemy rozważać istnienie najmniejszych i największych – w sensie $\leq$ – punktów stałych. Znalezienie prostych warunków wystarczających do istnienia największego i najmniejszego punktu stałego zawdzięczamy Bronisławowi Knasterowi [Kna28], a uogólnienie tego wyniku do prezentowanej poniżej postaci Alfredowi Tarskiemu [Tar55].

Twierdzenie 1.0.1. *(Knaster–Tarski) Niech $(X, \leq)$ będzie kratą zupełną oraz niech $f\colon X \longrightarrow X$ będzie przekształceniem monotonicznym. Wówczas zbiór punktów stałych f jest również kratą zupełną.*

Dowód. Ustalmy kratę zupełną $(X, \leq)$ oraz przekształcenie monotoniczne $f\colon X \to X$. Niech Y będzie zbiorem punktów stałych f, czyli $Y = \{y \in X\colon f(y) = y\}$. Pokażemy, że $(Y, \leq)$ jest kratą zupełną. Niech $D = \{x \in X\colon x \leq f(x)\}$ i niech $x \in D$ ($D \neq \varnothing$, ponieważ $0 \leq f(0)$). Wówczas $f(x) \in D$ ponieważ, z uwagi na monotoniczność f zachodzi $f(x) \leq f(f(x))$.

Niech teraz $u = \bigcup D$. Wówczas $x \leq u$ i $x \leq f(x) \leq f(u)$. Zatem $f(u)$ jest ograniczeniem górnym zbioru D. Ale u jest kresem górnym D, więc $u \leq f(u)$, a zatem $u \in D$, a stąd wynika, że $f(u) \in D$. Zatem $f(u) \leq u$, a więc, wobec $u \leq f(u)$ zachodzi $u = f(u)$. Ponieważ każdy punkt stały f należy do D, u jest największym punktem stałym.

Analogicznie pokazujemy, że istnieje najmniejszy punkt stały d przekształcenia f. Zatem $(Y, \leq)$ ma elementy największy i najmniejszy.

Dla $a, b \in X$ zdefiniujmy przedział $[a, b] = \{x \in X\colon a \leq x \leq b\}$. Z zupełności X wynika zupełność dowolnego, tak zdefiniowanego przedziału.

Pozostało pokazać zupełność kraty Y. Niech $1 = \bigcup X$, $W \subseteq Y$ oraz $w = \bigcup W$. Pokażemy, że $f([w, 1]) \subseteq [w, 1]$. Dla dowolnego $x \in W$ zachodzi $x = f(x) \leq f(w)$, a ponieważ w jest kresem górnym W, więc $w \leq f(w)$. Jeżeli teraz $y \in [w, 1]$, to mamy $w \leq f(w) \leq f(y)$, czyli $f([w, 1]) \subseteq [w, 1]$. Możemy zatem rozważyć przekształcenie $f|_{[w,1]}\colon [w, 1] \to [w, 1]$ – jest ono monotoniczne, a $[w, 1]$ jest kratą zupełną, zatem f posiada najmniejszy punkt stały – ten punkt stały będzie kresem górnym W[1] w kracie $(Y, \leq)$. Analogicznie znajdujemy kres dolny dowolnego podzbioru Y. □

W toku dowodu pokazaliśmy najistotniejszy dla nas fakt, że dowolne monotoniczne przekształcenie $f\colon X \to X$, określone na kracie zupełnej X, posiada najmniejszy i największy

[1] Warto zauważyć, że krata $(Y, \leq)$ nie musi być podkratą kraty $(X, \leq)$ – $\bigcup W$ w kracie $(Y, \leq)$ nie musi być równe w.

punkt stały.

1.1. Składnia i semantyka modalnego rachunku μ

Przeniesiemy teraz powyższe, czysto algebraiczne, rozważania na grunt konkretnego języka – modalnego rachunku μ.

Niech $Prop$ będzie skończonym zbiorem stałych zdaniowych – będziemy je oznaczać literami $p, p_1, p_2, \ldots$. Niech Var będzie przeliczalnym zbiorem zmiennych, będziemy je oznaczać literami $x, y, x_1, x_2, \ldots$.

Zdefiniujemy teraz składnię modalnego rachunku μ.

Definicja 1.1.1. *(Formuły atomowe modalnego rachunku μ) Formułą atomową modalnego rachunku μ jest $\top$ oraz każdy element zbiorów $Prop$ i Var.*

Definicja 1.1.2. *(Formuły modalnego rachunku μ)*

- *Każda formuła atomowa modalnego rachunku μ jest formułą modalnego rachunku μ,*
- *Jeżeli φ jest formułą modalnego rachunku μ, to $\neg\varphi$ również,*
- *Jeżeli φ oraz ψ są formułami modalnego rachunku μ, to $\varphi \vee \psi$ również,*
- *Jeżeli φ jest formułą modalnego rachunku μ, to $\Diamond\varphi$ również,*
- *Jeżeli φ jest formułą modalnego rachunku μ oraz x jest zmienną taką, że wszystkie wystąpienia x w φ znajdują się w zasięgu parzystej liczby negacji, to $\mu x.\varphi$ jest również formułą modalnego rachunku μ.*

Zauważmy, że zdefiniowany powyżej modalny rachunek μ jest rozszerzeniem logiki modalnej o dodatkową konstrukcję $\mu x.\varphi$ dopuszczalną, gdy zmienna x zawsze występuje w φ w zasięgu parzystej liczby negacji.

Pozostałe elementy składni wprowadzamy jako skróty w standardowy sposób przy użyciu praw De Morgana:

- $\bot = \neg\top$,
- $\varphi \wedge \psi = \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,
- $\Box\varphi = \neg\Diamond\neg\varphi$,
- $\nu x.\varphi = \neg\mu x.\neg\varphi[x := \neg x]$.

Semantykę modalnego rachunku μ możemy wyrażać, podobnie jak semantykę logiki modalnej, w modelach Kripkego.

Definicja 1.1.3. *(Model Kripkego) Trójkę $\mathcal{M} = (M, R, V)$ nazywamy modelem Kripkego, gdy (M, R) jest grafem skierowanym oraz $V : Prop \longrightarrow \mathcal{P}(M)$. Przekształcenie V nazywamy interpretacją stałych zdaniowych w modelu $\mathcal{M}$. Elementy modelu Kripkego będziemy nazywać punktami modelu.*

W dalszej części pracy modele Kripkego będziemy nazywać w skrócie modelami. Czasami, aby zaznaczyć, że dziedziną interpretacji stałych zdaniowych V pewnego modelu jest konkretny zbiór $Prop$, będziemy używać sformułowania *model nad Prop*.

Semantykę modalnego rachunku μ definiujemy w następujący sposób:

Definicja 1.1.4. *(Semantyka modalnego rachunku μ) Niech $\mathcal{M} = (M, R, V)$ będzie modelem Kripkego, oraz niech $\tau{:}\,Var \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ będzie wartościowaniem w $\mathcal{M}$. Zbiór punktów modelu $\mathcal{M}$, w których formuła φ jest prawdziwa oznaczamy przez $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau}$ i definiujemy następująco:*

- $[\![\top]\!]_{\mathcal{M},\tau} = M$,
- $[\![x]\!]_{\mathcal{M},\tau} = \tau(x)$, *dla* $x \in Var$,
- $[\![p]\!]_{\mathcal{M},\tau} = V(p)$, *dla* $p \in Prop$,
- $[\![\neg\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau} = M - [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau}$,
- $[\![\varphi \vee \psi]\!]_{\mathcal{M},\tau} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau} \cup [\![\psi]\!]_{\mathcal{M},\tau}$,
- $[\![\Diamond\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau} = \{s \in M{:}\, \exists t \in M\, sRt \wedge t \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau}\}$,
- $[\![\mu x.\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau} = \bigcap\{A \subseteq M{:}\, [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=A]} \subseteq A\}$, *gdzie* $\tau[x{:}= A](x) = A$ *oraz* $\tau[x{:}= A](y) = \tau(y)$ *dla* $x \neq y$.

Jeżeli z kontekstu wynikało będzie, w jakim modelu i przy jakim wartościowaniu badamy prawdziwość formuły, będziemy pomijać odpowiednie indeksy dolne. Często również zamiast oznaczać fakt, że punkt a należy do zbioru punktów, w których pewna formuła φ jest prawdziwa przez $a \in [\![\varphi]\!]$ będziemy po prostu pisać $a \models \varphi$. Powiemy, że formuła ψ wynika z formuły φ ($\varphi \models \psi$), gdy dla dowolnego modelu, wartościowania i punktu a, jeżeli $a \models \varphi$, to $a \models \psi$. Formuły są równoważne, gdy zachodzą pomiędzy nimi wynikania w obie strony.

Pokażemy teraz przykłady formuł modalnego rachunku μ, wraz z ich intuicyjnymi znaczeniami, aby pokazać jakie własności można wyrażać w tym języku.

1. $\Box\perp$ – ta formuła prawdziwa jest w punktach, z których nie można przejść przez relację dostępności R do żadnych innych (ani do nich samych). Ponieważ będą nas szczególnie interesować modele drzewiaste dodajmy, że w drzewach znaczy ona *jestem liściem*.
2. $\mu x.\Diamond x \vee p$ – ta formuła wyraża istnienie ścieżki do punktu należącego do $V(p)$.
3. $\mu x.\Box x \vee p$ – ta formuła prawdziwa jest w punktach, w których wszystkie ścieżki prowadzą do punktów, w których prawdziwe jest p, bądź do punktów spełniających $[\![\Box\perp]\!]$.
4. $\mu x.(\Diamond x \vee (\nu y.\Diamond y \wedge p))$ – ta formuła jest prawdziwa w tych punktach, z których istnieje ścieżka do punktu, z którego istnieje nieskończona ścieżka, której każdy punkt spełnia p.

Widać w jaki sposób zagnieżdżanie punktów stałych pozwala na wyrażanie trudniejszych własności. Okazuje się, że nie jest to przypadek – istnieje ścisła hierarchia alternacji punktów stałych modalnego rachunku μ, jednak rozważania te są dalekie od tematyki poruszanej w niniejszej rozprawie. Definicję hierarchii alternacji oraz dowód jej ścisłości można znaleźć w [Bra97].

Przy użyciu zdefiniowanych wcześniej skrótów łatwo otrzymać następującą postać normalną dla formuł modalnego rachunku μ:

Twierdzenie 1.1.1. *(Postać normalna dla modalnego rachunku μ) Dla każdej formuły ψ modalnego rachunku μ istnieje równoważna jej formuła φ zdefiniowana indukcyjnie:*

$$\varphi \;\longrightarrow\; \perp \mid \top \mid p \mid \neg p \mid x \mid \neg x \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \Diamond\varphi \mid \Box\varphi \mid \mu x.\varphi \mid \nu x.\varphi$$

gdzie konstrukcje $\mu x.\varphi$ oraz $\nu x.\varphi$ są dozwolone, gdy w formule φ nie występuje $\neg x$.

Dowód. Stosujemy zdefiniowane wcześniej skróty by *zepchnąć* negację maksymalnie do wewnątrz formuły. □

Pokażemy teraz związek pomiędzy wprowadzonym właśnie językiem, a przedstawionym wcześniej spojrzeniem algebraicznym na przekształcenia i ich punkty stałe. Ustalmy model $\mathcal{M} = (M, R, V)$, wartościowanie τ oraz zmienną x. Dowolną formułę φ modalnego rachunku μ możemy traktować jako przekształcenie $\varphi_x : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ zadane w następujący sposób $\varphi_x(A) = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=A]}$. Możemy założyć, że φ jest w postaci normalnej. Wówczas, jeżeli $\neg x$ nie występuje w φ to φ_x jest monotoniczna, a co za tym idzie istnieją najmniejszy i największy punkt stały przekształcenia φ_x. Łatwo zauważyć, że najmniejszym punktem stałym przekształcenia φ_x jest zbiór $[\![\mu x.\varphi]\!]$ oraz że największym punktem stałym φ_x jest $[\![\nu x.\varphi]\!]$. Jeżeli będzie wiadomo z kontekstu, względem której zmiennej rozważamy formułę φ, jako automorfizm podzbiorów modelu $\mathcal{P}(M)$, to będziemy pomijać odpowiadający jej indeks dolny.

Na mocy powyższych obserwacji uzasadnione jest, by nazywać operatory μx oraz νx odpowiednio operatorami najmniejszego i największego punktu stałego.

1.2. Podstawowe własności modalnego rachunku μ

W poprzednim podrozdziale wprowadziliśmy składnię i semantykę modalnego rachunku μ oraz zaprezentowaliśmy kilka przykładów własności punktów, które wyrażać można przy pomocy tego języka. Przedstawimy teraz bardziej ogólne własności języka. Prezentowane tu twierdzenia można znaleźć w [BS06] oraz [Eme90].

Definicja 1.2.1. *(Bisymulacja) Bisymulacją pomiędzy dwoma modelami $\mathcal{M} = (M, R, V)$ oraz $\mathcal{N} = (N, S, W)$ nad Prop nazywamy relację $\mathcal{B} \subseteq M \times N$ taką, że:*

- *Dla dla dowolnego $p \in Prop$, $s \in M$ i $t \in N$, jeżeli $s \vDash p$ oraz $s\mathcal{B}t$, to $t \vDash p$ oraz jeżeli $t \vDash p$ i $s\mathcal{B}t$, to $s \vDash p$.*
- *Niech $s_1 \in M, s_2 \in N$ takie, że $s_1\mathcal{B}s_2$. Wówczas dla dowolnego $s_1' \in M$ jeżeli $s_1 R s_1'$, to istnieje $s_2' \in N$ takie, że $s_1'\mathcal{B}s_2'$ i $s_2 S s_2'$ oraz dla dowolnego $s_2' \in N$ jeżeli $s_2 S s_2'$, to istnieje $s_1' \in M$ takie, że $s_1'\mathcal{B}s_2'$ i $s_1 R s_1'$.*

Powiemy, że dwa punkty a, b są bisymilarne, gdy istnieje bisymulacja $\mathcal{B}$ taka, że $a\mathcal{B}b$.

Poniższe twierdzenie pokazuje, że bisymulacja odgrywa w modalnym rachunku μ równie ważną rolę, co w logice modalnej.

Twierdzenie 1.2.1. *Jeżeli dwa punkty są bisymilarne, to spełniają dokładnie te same formuły modalnego rachunku μ.*

Ponieważ każdy graf skierowany można rozwinąć do drzewa, zachowując bisymulację, otrzymujemy wniosek z twierdzenia 1.2.1 – własność modelu drzewiastego dla modalnego rachunku μ.

Wniosek 1.2.1. *Jeżeli formuła ma model, to posiada model będący drzewem.*

W przypadku logiki modalnej istnieje tłumaczenie jej formuł na logikę pierwszego rzędu z jedną zmienną wolną. Znane jest również twierdzenie van Benthema głoszące, że dowolna niezmiennicza ze względu na bisymulację formuła logiki pierwszego rzędu z jedną zmienną wolną jest równoważna pewnej formule logiki modalnej. Można zatem uznać logikę modalną za niezmienniczą ze względu na bisymulację fragment logiki pierwszego rzędu. Okazuje się, że podobne twierdzenia prawdziwe są o modalnym rachunku μ. Oczywiście wykracza on poza logikę pierwszego rzędu, jednak również można go traktować jako niezmienniczą ze względu na bisymulację fragment pewnej bardzo naturalnej logiki.

Twierdzenie 1.2.2. *Dowolną formułę modalnego rachunku μ można przetłumaczyć na formułę monadycznej logiki drugiego rzędu (MSO) z jedną zmienną wolną.*

Dowód przebiega przez indukcję ze względu na budowę formuły. Tłumaczenie formuły φ oznaczmy przez $\varphi[x]$, gdzie x jest zmienną wolną użytą w tłumaczeniu i zadajemy w następujący sposób:

- $y[x] = Y[x]$, dla $y \in Var$,
- $p[x] = P(x)$, dla $p \in Prop$,
- $\Diamond\varphi[x] = \exists y\, xRy \wedge \varphi[y]$.
- $(\nu z.\varphi)[x] = \exists Z\, (Z(x) \wedge \forall y\, Z(y) \to \varphi[y])$

Analogiczne do twierdzenia van Benthema dla logiki modalnej twierdzenie dla modalnego rachunku μ udowodnione zostało przez Janina i Walukiewicza w [JW96].

Twierdzenie 1.2.3. *Niezmienniczy ze względu na bisymulację fragment MSO z jedną zmienną wolną jest równoważny modalnemu rachunkowi μ.*

Poniżej przedstawimy jeszcze dwie istotne, powiązane ze sobą własności modalnego rachunku μ. Więcej informacji, jak również dowody poniższych twierdzeń można znaleźć odpowiednio w [Eme90] i [BS06].

Twierdzenie 1.2.4. *Jeżeli formuła φ nie jest równoważna $\bot$, to istnieje skończony model $\mathcal{M} = (M, R, V)$, wartościowanie τ oraz $a \in M$ takie, że $a \vDash \varphi$.*

Twierdzenie 1.2.5. *Problem spełnialności dla modalnego rachunku μ jest rozstrzygalny.*

Rozdział 2

Formuły szybko osiągające punkty stałe

Wprowadziliśmy dość abstrakcyjną semantykę dla najmniejszego punktu stałego:

$$[\![\mu x.\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau} = \bigcap\{A \subseteq M \colon [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=A]} \subseteq A\}$$

Istnieje dużo bardziej konstruktywny sposób zadania semantyki najmniejszego punktu stałego. Dostarcza go następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.0.6. *Niech $(X,\leq)$ będzie kratą zupełną z elementem najmniejszym 0 oraz niech $f\colon X \to X$ będzie przekształceniem monotonicznym. Wówczas istnieje liczba porządkowa α taka, że $f^{\alpha+1}(0) = f^{\alpha}(0)$, gdzie $f^0(x) = x, f^{\alpha+1}(x) = f(f^{\alpha}(x))$ oraz $f^{\lambda}(x) = \sup_{\beta<\lambda} f^{\beta}(x)$, dla λ granicznych.*

Dowód. Ustalmy kratę zupełną X i przekształcenie monotoniczne $f\colon X \to X$. Wiadomo, że $0 \leq f(0)$ następnie, na mocy monotoniczności f otrzymujemy, że $f^{\alpha}(0) \leq f^{\alpha+1}(0)$, dla dowolnego α. Gdyby nie istniała liczba porządkowa α taka, że $f^{\alpha+1}(0) = f^{\alpha}(0)$, znaczyłoby to, że istnieją w X dowolnie długie łańcuchy $(a_{\alpha})_{\alpha<\beta}$ – w szczególności istniałyby łańcuchy dłuższe, w sensie liczby kardynalnej, niż moc X, co jest niemożliwe. □

Wiemy zatem, że odpowiednio wiele razy iterując dowolną funkcję monotoniczną $f\colon X \to X$, gdzie X jest kratą zupełną, na elemencie najmniejszym osiągniemy punkt stały. Pokażemy teraz, że punkt stały uzyskany w ten sposób jest najmniejszym punktem stałym przekształcenia f.

Twierdzenie 2.0.7. *Niech X będzie kratą zupełną z elementem najmniejszym 0 oraz niech $f\colon X \to X$ będzie przekształceniem monotonicznym. Niech α będzie liczbą porządkową taką, że $f^{\alpha+1}(0) = f^{\alpha}(0)$, wówczas $f^{\alpha}(0)$ jest najmniejszym punktem stałym przekształcenia f.*

Dowód. Rozważmy dowolny punkt stały x przekształcenia f. Jeżeli $x = 0$, to $f^{\alpha}(0) = 0$ i $f^{\alpha}(0)$ jest najmniejszym punktem stałym przekształcenia f. Jeżeli $0 < x$, to na mocy monotoniczności f zachodzi $f(0) \leq f(x) = x$, a następnie przez indukcję pozaskończoną pokazujemy, że dla każdej liczby porządkowej β zachodzi $f^{\beta}(0) \leq x$, a w szczególności $f^{\alpha}(0) \leq x$. Zatem punkt stały $f^{\alpha}(0)$ jest mniejszy niż dowolny inny punkt stały przekształcenia f, czyli jest najmniejszym punktem stałym f. □

Powyższe dwa twierdzenia dostarczają nam metody obliczania najmniejszych punktów stałych przekształceń monotonicznych. Największe punkty stałe, jako pojęcia dualne względem najmniejszych punktów stałych, można obliczać w podobny sposób zamieniając element najmniejszy 0, na element największy 1.

Przełóżmy powyższe rozważania na grunt modalnego rachunku μ. Przypomnijmy, że przy ustalonym modelu $\mathcal{M} = (M, R, V)$, wartościowaniu τ oraz zmiennej x dowolną formułę φ można traktować jako przekształcenie $\varphi{:}\mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ zadane w następujący sposób $\varphi(A) = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=A]}$. Wprowadzimy teraz dwie, kluczowe dla niniejszej rozprawy, definicje.

Definicja 2.0.2. *(Osiąganie punktu stałego przez formułę w modelu) Niech $\mathcal{M} = (M, R, V)$ będzie modelem, x zmienną i niech α będzie najmniejszą liczbą porządkową taką, że dla dowolnego wartościowania τ zachodzi $\varphi^{\alpha+1}(\varnothing) = \varphi^{\alpha}(\varnothing) = [\![\mu x.\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau}$. Powiemy wówczas, że **formuła φ osiąga punkt stały po α krokach względem x w modelu $\mathcal{M}$**.*

Definicja 2.0.3. *(Osiąganie punktu stałego przez formułę) Niech x będzie zmienną i niech α będzie najmniejszą liczbą porządkową taką, że dla dowolnego modelu $\mathcal{M} = (M, R, V)$ oraz dowolnego wartościowania τ formuła φ osiąga punkt stały po co najwyżej α krokach względem x w modelu $\mathcal{M}$. Powiemy wówczas, że **formuła φ osiąga punkt stały względem x po α krokach.** Fakt ten będziemy oznaczać, przez $\mathcal{O}_x(\varphi) = \alpha$.*

Oczywiście, jeżeli z kontekstu będzie wynikało, względem której zmiennej obliczamy punkt stały, będziemy pomijać informację o niej. Będziemy mówić, że punkt $a \in \varphi^{\alpha+1}(\varnothing) - \varphi^{\alpha}(\varnothing)$ został *dodany do punktu stałego po $\alpha + 1$ krokach.*

Zanim przejdziemy do głównych rozważań niniejszej rozprawy, czyli badania, jak szybko formuły modalnego rachunku μ mogą osiągać swoje punkty stałe, zauważmy, że nie każda formuła osiąga punkt stały po jakiejś liczbie kroków, w sensie definicji 2.0.3. Wręcz przeciwnie – bardzo łatwo znaleźć formuły φ takie, dla których liczba porządkowa $\mathcal{O}(\varphi)$ nie jest określona. Poniżej przedstawiamy najprostszy możliwy przykład.

Twierdzenie 2.0.8. *$\mathcal{O}(\Box x)$ jest nieokreślona.*

Dowód. Pokażemy, że istnieją modele, w których formuła $\Box x$ osiąga punkt stały po α krokach, dla dowolnie dużych α.

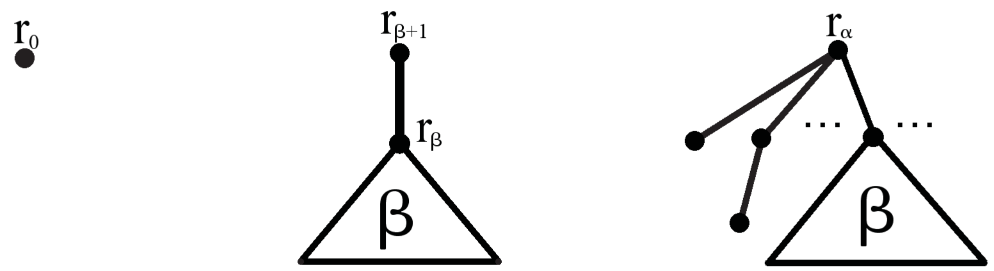
Istnieje pewien klasyczny sposób przyporządkowania dowolnym liczbom porządkowym drzew. Rozważmy modele indeksowane liczbami porządkowymi $\mathcal{M}_\alpha = (M_\alpha, R_\alpha, V_\alpha)$ nad $Prop = \varnothing$.

Krok bazowy:
Dla $\alpha = 0$ weźmy $M_\alpha = \{r_0\}$ i $R_\alpha = \varnothing$.

Krok następnika:
Załóżmy, że skonstruowaliśmy drzewo $\mathcal{M}_\beta$. Drzewo $\mathcal{M}_{\beta+1}$ konstruujemy, dodając nowy punkt $r_{\beta+1}$ – korzeń drzewa $\mathcal{M}_{\beta+1}$ i dodając korzeń drzewa $\mathcal{M}_\beta$, jako jego jedyne dziecko. Ściślej $M_{\beta+1} = M_\beta \cup \{r_{\beta+1}\}$, $R_{\beta+1} = R_\beta \cup \{(r_{\beta+1}, r_\beta)\}$.

Krok graniczny:
Załóżmy, że skonstruowaliśmy drzewa $\mathcal{M}_\beta$ dla wszystkich liczb porządkowych $\beta < \alpha$, gdzie α jest liczbą graniczną. Drzewo $\mathcal{M}_\alpha$ konstruujemy kładąc $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M'_\beta$, gdzie M'_β są rozłącznymi kopiami M_β oraz $R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta \cup \{(r_\alpha, r_\beta){:}\, \beta < \alpha\}$.

Pokażemy teraz, że w dowolnym modelu $\mathcal{M}_\alpha$ formuła $\Box x$ osiąga punkt stały M_α po $\alpha + 1$ krokach. Dla $\alpha = 0$ zachodzi $(\Box x)^1(\varnothing) = (\Box x)(\varnothing) = \{r_0\} = M_0$. Załóżmy, że teza zachodzi dla β pokażemy, że dla $\beta + 1$ również. W modelu $\mathcal{M}_{\beta+1}$ mamy $(\Box x)^{\beta+1}(\varnothing) = (\Box x)((\Box x)^{\beta}(\varnothing)) = (\Box x)(M_{\beta+1} - \{r_{\beta+1}\}) = M_{\beta+1}$. Załóżmy teraz, że α jest liczbą graniczną, oraz że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich $\beta < \alpha$. Przyjrzyjmy się procesowi obliczania punktu stałego w modelu $\mathcal{M}_\alpha$. Łatwo zauważyć, że skoro korzenie drzew $\mathcal{M}_\beta$ dodawane są w ostatnim $(\beta{+}1)$–szym kroku, to korzeń drzewa $\mathcal{M}_\alpha$ nie będzie mógł być dodany wcześniej, niż w $(\alpha + 1)$–szym kroku (ponieważ w krokach granicznych nie dodaje się żadnych nowych punktów). Dopiero w α–tym kroku do punktu stałego zostaną dodane wszystkie korzenie kopii drzew



Rysunek 2.1: Przyporządkowanie liczbom porządkowym drzew. Drzewo dla 0, krok następnika, krok graniczny.

$\mathcal{M}_\beta$, a zatem faktycznie w $(\alpha+1)$–szym kroku do punktu stałego dodany zostanie korzeń drzewa $\mathcal{M}_\alpha$.

Tym samym pokazaliśmy, że liczba $\mathcal{O}(\Box x)$ nie jest określona. $\square$

2.1. Formuły ciągłe

Formuły ciągłe zostały bardzo dokładnie zbadane przez Gaëlle Fontaine w [Gae08]. Ich definicja nie odnosi się bezpośrednio do ilości kroków potrzebnych, by osiągnąć punkt stały, jednak stanowią one punkt wyjścia w badaniach nad formułami konstruktywnymi. Podana przez Fontaine definicja formuł ciągłych jest następująca:

Definicja 2.1.1. *(Formuły ciągłe) Powiemy, że formuła φ jest ciągła w x, jeżeli dla każdego modelu $\mathcal{M} = (M, R, V)$, wartościowania τ oraz punktu $s \in M$ następujące warunki są równoważne:*

- $s \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau}$,
- *Istnieje skończony zbiór $F \subseteq \tau(x)$ taki, że $s \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=F]}$.*

Na mocy powyższej definicji, aby formuła była ciągła w x musi być monotoniczna[1] w x oraz jej wartość logiczna w dowolnym punkcie dowolnego modelu i przy dowolnym wartościowaniu musi zależeć jedynie od pewnej skończonej liczby punktów, w których x jest prawdziwa. W podobny sposób można zdefiniować ciągłość formuły w stałej p.

Istnieje jeszcze jedno pojęcie ciągłości formuły: ciągłość Scotta, czyli ciągłość w topologii Scotta. Przedstawienie go wymaga zdefiniowania kilku innych terminów, jednak wprowadzimy je, z uwagi na łatwiejsze dowodzenie twierdzeń w oparciu o nie. Następnie pokażemy, że pojęcie ciągłości w sensie Scotta pokrywa się z wprowadzonym powyżej pojęciem ciągłości.

Definicja 2.1.2. *(Rodzina skierowana) Niech $\mathcal{M} = (M, R, V)$ będzie modelem. Rodzinę $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru M nazwiemy rodziną skierowaną, gdy dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ istnieje $C \in \mathcal{F}$ taki, że $A \cup B \subseteq C$.*

Definicja 2.1.3. *(Zbiór otwarty w topologii Scotta) Niech $\mathcal{M} = (M, R, V)$ będzie modelem. Zbiór otwarty w topologii Scotta na $\mathcal{P}(M)$ to rodzina $\mathcal{O}$ podzbiorów zbioru M domknięta na nadzbiory oraz taka, że dla dowolnej rodziny skierowanej $\mathcal{F}$ podzbiorów M takiej, że $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{O}$ przecięcie $\mathcal{F} \cap \mathcal{O}$ jest niepuste.*

[1] Jeżeli $A \subseteq B$, to z $a \in \varphi(A)$ wynika, że istnieje skończony zbiór $A' \subseteq A$ taki, że $a \in \varphi(A')$. Ale $A' \subseteq B$, zatem z ciągłości $a \in \varphi(B)$.

Definicja 2.1.4. *(Przekształcenie ciągłe w sensie Scotta) Przekształcenie $f{:}\mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ jest ciągłe w sensie Scotta, gdy jest ciągłe w zwykłym sensie topologicznym w topologii Scotta, czyli gdy dla każdego zbioru otwartego w sensie Scotta $\mathcal{O}$ przeciwobraz $f^{-1}[\mathcal{O}] = \{f^{-1}(A){:} A \in \mathcal{O}\}$ jest otwarty w sensie Scotta.*

Definicja 2.1.5. *(Formuła ciągła w x w sensie Scotta) Ustalmy zmienną x. Formuła φ jest ciągła w x w sensie Scotta, jeżeli dla dowolnego modelu $\mathcal{M} = (M, R, V)$ i dowolnego wartościowania τ przekształcenie $\varphi_x{:}\mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ jest ciągłe w sensie Scotta.*

Przedstawimy teraz bez dowodu bardzo użyteczną charakteryzację formuł ciągłych w sensie Scotta.

Twierdzenie 2.1.1. *[Gae08] Dla dowolnego zbioru M, przekształcenie $f{:}\mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ jest ciągłe w sensie Scotta dokładnie wtedy, gdy zachowuje sumy skierowane, czyli dla dowolnej rodziny skierowanej $\mathcal{F}$ zachodzi $f(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup f[\mathcal{F}] = \bigcup\{f(A){:} A \in \mathcal{F}\}$.*

W oparciu o fakt 2.1.1 łatwo dowodzić, że formuła nie jest ciągła w sensie Scotta. Pokażemy teraz, że pojęcia ciągłości i ciągłości w sensie Scotta mają takie same zakresy.

Twierdzenie 2.1.2. *[Gae08] Formuła φ jest ciągła w x dokładnie wtedy, gdy jest ciągła w x w sensie Scotta.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że φ jest ciągła w x. Ustalmy model $\mathcal{M} = (M, R, V)$. Pokażemy, że przekształcenie $\varphi_x{:}\mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ zachowuje sumy skierowane.

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną skierowaną. Z monotoniczności φ wynika, że $\bigcup \varphi_x[\mathcal{F}] \subseteq \varphi_x(\bigcup \mathcal{F})$. Pozostaje pokazać, że $\varphi_x(\bigcup \mathcal{F}) \subseteq \bigcup \varphi_x[\mathcal{F}]$. Niech $s \in \varphi_x(\bigcup \mathcal{F})$, czyli $s \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=\bigcup \mathcal{F}]}$. Ponieważ φ jest ciągła w x istnieje skończony podzbiór F zbioru $\bigcup \mathcal{F}$ taki, że $s \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=F]}$. Ponieważ $\mathcal{F}$ jest skierowana, a F skończonym podzbiorem jej sumy, to istnieje zbiór $A \in \mathcal{F}$ taki, że $F \subseteq A$. Następnie, na mocy monotoniczności φ, z $s \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=F]}$ wynika, że $s \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=A]}$, czyli $s \in \varphi_x(A)$. Stąd $s \in \bigcup \varphi_x[\mathcal{F}]$, ponieważ $A \in \mathcal{F}$, co kończy dowód pierwszej implikacji.
($\Leftarrow$) Załóżmy, że φ jest ciągła w x w sensie Scotta. Pokażemy, że φ jest ciągła w x. Najpierw pokażemy, że φ jest monotoniczna w x. Ustalmy model $\mathcal{M} = (M, R, V)$. Załóżmy, że $A \subseteq B \subseteq M$ i niech $\mathcal{F} = \{A, B\}$. Oczywiście $\mathcal{F}$ jest rodziną skierowaną oraz $\bigcup \mathcal{F} = B$. Ponieważ φ_x zachowuje sumy skierowane wiemy, że $\varphi_x(B) = \varphi_x(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup \varphi_x[\mathcal{F}] = \varphi_x(A) \cup \varphi_x(B)$. Uzyskaliśmy zatem $\varphi_x(B) = \varphi_x(A) \cup \varphi_x(B)$, a zatem $\varphi_x(A) \subseteq \varphi_x(B)$.

Pozostaje pokazać, że jeżeli $s \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau}$, to istnieje skończony zbiór $F \subseteq \tau(x)$ taki, że $s \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=F]}$. Załóżmy więc, że $s \in \varphi_x(\tau(x))$. Niech $\mathcal{F} = \{F \subseteq \tau(x){:} F \text{ jest skończony}\}$. Ponieważ φ_x zachowuje sumy skierowane zachodzi $\varphi_x(\tau(x)) = \varphi_x(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup \varphi_x[\mathcal{F}]$, zatem $s \in \bigcup \varphi_x[\mathcal{F}]$. Zatem istnieje $F \in \mathcal{F}$ taki, że $s \in \varphi_x(F)$. Zbiór F jest skończonym podzbiorem $\tau(x)$ oraz zachodzi $s \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=F]}$. To kończy dowód drugiej implikacji. □

Najważniejszym z twierdzeń zawartych w pracy Gaëlle Fontaine [Gae08], obok rozstrzygalności przynależności do ciągłego fragmentu modalnego rachunku μ, jest prezentowana poniżej charakteryzacja składniowa modalnego rachunku μ.

Definicja 2.1.6. *Niech $P \subseteq Prop$ oraz $X \subseteq Var$. Zbiór formuł $CF(P \cup X)$ jest generowany przy pomocy następującej gramatyki:*

$$\varphi \longrightarrow \top \mid p \mid x \mid \psi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \Diamond \varphi \mid \mu y.\chi$$

gdzie $p \in P$, $x \in X$, ψ jest formułą modalnego rachunku μ, której zmienne i stałe zdaniowe nie należą do $P \cup X$ oraz $\chi \in CF(P \cup X \cup \{y\})$.

Twierdzenie 2.1.3. *(Charakteryzacja składniowa formuł ciągłych [Gae08]) Niech φ będzie formułą modalnego rachunku μ, $P \subseteq Prop$ oraz $X \subseteq Var$.*

1. *Jeżeli $\varphi \in CF(P \cup X)$, to dla dowolnych $p \in P$ oraz $x \in X$ φ jest ciągła w p i x.*

2. *Jeżeli φ jest ciągła w x (w p), to φ jest równoważna formule z $CF(\{x\})$ $(CF(\{p\}))$.*

Dowód powyższego twierdzenia pominiemy – stanowi znaczną część artykułu Gaëlle Fontaine [Gae08].

Pokazana przez Fontaine charakteryzacja składniowa ciągłego fragmentu modalnego rachunku μ pokazuje, jak wiele formuł jest ciągłych. Jedynie trzy konstrukcje wyprowadzają poza formuły ciągłe. Są to:

1. $\Box\varphi$,

2. $\nu x.\varphi$,

3. $\mu x.\varphi$, gdy φ nie jest ciągła w x.

W następnym podrozdziale okaże się, że wszystkie formuły ciągłe szybko osiągają swoje punkty stałe.

2.2. Formuły ograniczone i konstruktywne oraz ich związki z formułami ciągłymi

Przechodzimy do analizy formuł modalnego rachunku μ pod względem szybkości, z jaką osiągają punkty stałe. Podrozdział ten poświęcimy badaniu formuł, które są pod tym względem szybkie – potrzebują nie więcej niż ω kroków – oraz ich związków z omówionymi wcześniej formułami ciągłymi.

Definicja 2.2.1. *Niech φ będzie formułą modalnego rachunku μ. Formuła φ jest ograniczona w x, jeżeli $\mathcal{O}_x(\varphi) < \omega$.*

Podamy teraz proste przykłady formuł ograniczonych. Rozważmy $\varphi_n = \Box x \wedge \Box^n \bot$, dla $n \in \omega$. Zauważmy, że dla $k \leq l$ zachodzi $\Box^k \bot \wedge \Box^l \bot \equiv \Box^k(\Box^{l-k}\bot \wedge \bot) \equiv \Box^k \bot$ oraz $\Box^k \bot \vee \Box^l \bot \equiv \Box^l \bot$. Dla dowolnego $n \in \omega$, w dowolnym modelu i przy dowolnym wartościowaniu mamy $\varphi_n^{n+1}(\varnothing) = [\![\bigvee_{i=0}^{n+1}(\Box^{i+1}\bot \wedge \Box^n \bot)]\!] = [\![\Box^n \bot \wedge \bigvee_{i=0}^{n+1} \Box^{i+1}\bot]\!] = [\![\Box^n \bot \wedge \Box^{n+2}\bot]\!] = [\![\Box^n \bot]\!] = \varphi_n^n(\varnothing)$. Z drugiej strony dla $n \in \omega$ w modelach $\mathcal{M}_n$ formuła φ_n osiąga punkt stały M_n w dokładnie n krokach. Mamy zatem $\mathcal{O}(\varphi_n) = n$. Zatem wszystkie powyższe formuły są ograniczone. Widzimy, że łatwo budować formuły osiągające punkty stałe w skończonej liczbie kroków.

Podamy jeszcze bardziej skomplikowany przykład formuły ograniczonej w x: $\varphi = \nu y.\Diamond y \wedge x$. Faktycznie, w dowolnym modelu mamy $\varphi(\varnothing) = [\![\nu y.\ \bot]\!] = \varnothing$.

Formuły ograniczone stanowią interesującą podklasę formuł modalnego rachunku μ. Wiąże się z nimi kilka ciekawych problemów otwartych. Jeżeli formuła jest ograniczona, to jej punkt stały wyrażalny jest bez użycia operatora μx. Istotnie, skoro $\mathcal{O}(\varphi) < \omega$, to $\mathcal{O}(\varphi) = k$, dla pewnego $k \in \omega$. Zatem w dowolnym modelu $\mathcal{M}$ oraz przy dowolnym wartościowaniu τ zachodzi $[\![\mu x.\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau} = \varphi^0(\varnothing) \cup \dots \cup \varphi^k(\varnothing)$. Mamy zatem $\mu x.\varphi \equiv \underbrace{\bot}_{\psi_0} \vee \underbrace{\varphi[x := \psi_0]}_{\psi_1} \vee \dots \vee \underbrace{\varphi[x := \psi_{k-1}]}_{\psi_k}$, gdzie $\varphi[x := \psi]$ oznacza formułę powstałą z φ przez wstawienie ψ w miejsce wszystkich wystąpień zmiennej x.

W [Ott99] Martin Otto pokazał, że rozstrzygalny jest problem eliminacji rekursji w modalnym rachunku μ. Dokładnie zostało pokazane, że istnieje algorytm w EXPTIME rozstrzygający, czy wszystkie punkty stałe w danej formule są ograniczone, czyli czy jest ona równoważna pewnej formule logiki modalnej. Ten sam algorytm pozwala rozstrzygać ograniczoność formuł logiki modalnej. Problem rozstrzygalności ograniczoności w całym modalnym rachunku μ pozostaje otwarty. Zagadnienie to można próbować rozwiązywać w dziedzinie jedynie modeli skończonych. Ograniczona formuła jest ograniczona również w modelach skończonych, natomiast w przypadku formuły nieograniczonej dla dowolnego $k \in \omega$ zachodzi:

$$\varphi[x := \psi_{k+1}] \wedge \neg\varphi[x := \psi_k] \not\equiv \perp$$

a zatem, na mocy własności skończonego modelu – istnieje skończony model $\mathcal{M}$ i punkt a, w którym formuła ta jest prawdziwa. W tym modelu φ będzie potrzebować co najmniej $k+1$ kroków, by dodać a do punktu stałego, co wobec dowolności k oznacza, że φ nie jest ograniczona.

Kolejną klasą formuł, budzących zainteresowanie badaczy modalnego rachunku μ są formuły konstruktywne.

Definicja 2.2.2. *Niech φ będzie formułą modalnego rachunku μ. Formuła φ jest konstruktywna w x, jeżeli $\mathcal{O}_x(\varphi) \leq \omega$.*

Formuły konstruktywne w oczywisty sposób zawierają wszystkie formuły ograniczone. Mniej oczywisty jest fakt, że zawierają one również wszystkie formuły ciągłe.

Twierdzenie 2.2.1. *[Gae08] Niech φ będzie ciągłą w x formułą modalnego rachunku μ. Wówczas φ jest konstruktywna w x.*

Dowód. Załóżmy, że φ jest ciągła w x. Na mocy 2.1.1 i 2.1.2 φ zachowuje sumy skierowane. Rozważmy $\mathcal{F} = \{\varphi^i(\emptyset) : i \in \omega\}$. Wystarczy pokazać, że $\varphi(\bigcup_{i\in\omega}\varphi^i(\emptyset)) = \bigcup_{i\in\omega}\varphi^i(\emptyset)$. Ponieważ φ jest monotoniczna, $\mathcal{F}$ jest rodziną skierowaną, zatem:

$$\varphi(\bigcup_{i\in\omega}\varphi^i(\emptyset)) = \bigcup_{i\in\omega}\varphi(\varphi^i(\emptyset)) = \bigcup_{i>0}\varphi^i(\emptyset) = \bigcup_{i\in\omega}\varphi^i(\emptyset)$$

Czyli $\bigcup_{i\in\omega}\varphi^i(\emptyset)$ jest najmniejszym punktem stałym formuły φ, a zatem φ jest konstruktywna w x. □

Wiemy zatem, że każda formuła ciągła jest konstruktywna. Pokażemy teraz, że przeciwna inkluzja nie zachodzi. Poniższy przykład pochodzi z [Gae08].

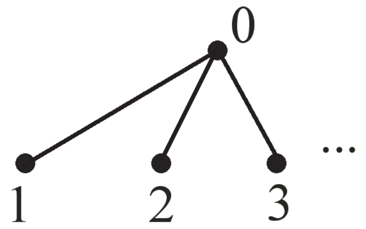
Twierdzenie 2.2.2. *Istnieją ograniczone (a więc i konstruktywne), nieciągłe formuły modalnego rachunku μ.*

Dowód. Rozważmy formułę $\varphi = \Box x \wedge \Box\Box \perp$. Pokażemy najpierw, że jest ona ograniczona. Istotnie, w ustalonym modelu $\mathcal{M}$ i wartościowaniu τ mamy:

$$\varphi^3(\emptyset) = \varphi^2([\![\Box \perp]\!]) = \varphi([\![\Box\Box \perp]\!]) = [\![\Box\Box \perp]\!]$$

Zatem formuła φ jest ograniczona, a więc również konstruktywna.

Aby pokazać, że φ jest nieciągła rozważmy następujący model $\mathcal{M} = (M, R, V)$: $M = \omega$, $R = \{(0,i) : i > 0\}$, $V = \emptyset$. Łatwo zobaczyć, że rodzina $\mathcal{F} = \{\{1,\dots,n\} : n > 0\}$ jest skierowana. Mamy $\varphi(\bigcup\mathcal{F}) = [\![\Box x \wedge \Box\Box \perp]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=\omega-\{0\}]} = \omega$ oraz $\bigcup\varphi[\mathcal{F}] = \omega - \{0\}$. Zatem $\Box x \wedge \Box\Box \perp$ nie jest ciągła. □



Rysunek 2.2: Model $\mathcal{M}$ użyty do dowodu nieciągłości formuły $\Box x \wedge \Box\Box \bot$ w twierdzeniu 2.2.2.

Wiemy zatem, że konstruktywność nie jest w ścisłym sensie równoważna ciągłości. Jednak w [Gae08] Gaëlle Fontaine przedstawia następującą hipotezę Yde Venemy o formułach konstruktywnych:

Hipoteza 2.2.1. *(Yde Venema) Dla dowolnej formuły φ konstruktywnej w x istnieje formuła ψ ciągła w x taka, że $\mu x.\varphi \equiv \mu x.\psi$.*

Hipotezę Yde Venemy można rozumieć w następujący sposób: pomimo, iż zbiór formuł konstruktywnych zawiera w sposób właściwy zbiór formuł ciągłych, punkty stałe formuł konstruktywnych są definiowalne już jako punkty stałe formuł ciągłych i w tym sensie konstruktywność rozszerza ciągłość na poziomie logiki modalnej, nie zaś na poziomie całego modalnego rachunku μ. Ciągły fragment modalnego rachunku μ, jako silnie związany z jego składnią ma być najlepszym składniowym przybliżeniem fragmentu konstruktywnego. Próbując dowodzić hipotezy Venemy w naturalny sposób, zakładamy, że φ jest konstruktywna. Jednak oprócz czysto semantycznej definicji takie założenie nie dostarcza nam wiele wiedzy. Do końca niniejszego podrozdziału będziemy badać formuły konstruktywne.

Pokażemy teraz, że formuły konstruktywne nie zachowują się *dobrze* względem składni modalnego rachunku μ, a dokładniej – nie są domknięte na alternatywę.

Twierdzenie 2.2.3. *Istnieją formuły konstruktywne (a nawet ograniczone) φ i ψ takie, że $\varphi \vee \psi$ nie jest konstruktywna.*

Dowód. Niech $\varphi = (\Diamond x \wedge p_1 \wedge \Box p_1) \vee (\Box x \wedge \neg p_1 \wedge \Box p_1)$ oraz $\psi = \Box \bot$. Pokażemy teraz ograniczoność obu podanych formuł. W dowolnym modelu $\mathcal{M}$ i wartościowaniu τ zachodzi:

$$\varphi^2(\varnothing) = \varphi([\![\Box \bot \wedge \neg p_1]\!]) = [\![\Box \bot \wedge \neg p_1]\!]$$

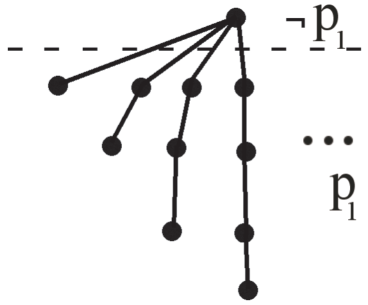
oraz

$$\psi^2(\varnothing) = \psi([\![\Box \bot]\!]) = [\![\Box \bot]\!]$$

Rozważmy teraz następujący model $\mathcal{M}'_\omega = (M_\omega, R_\omega, V')$, będący wzbogaceniem modelu $\mathcal{M}_\omega$ z początku tego rozdziału do modelu nad $Prop = \{p_1\}$. Kładziemy $V'(p_1) = M_\omega - \{r_\omega\}$. Wówczas $(\varphi \vee \psi)^{\omega+1}(\varnothing) = (\varphi \vee \psi)(V'(p_1)) = M_\omega$, zatem $\varphi \vee \psi$ nie jest konstruktywna. $\Box$

Wiemy już, że zbiór formuł ciągłych jest ściśle zawarty w zbiorze formuł konstruktywnych, że istnieją nieciągłe formuły ograniczone, pokażemy teraz, że istnieją również nieograniczone formuły ciągłe.

Rozważmy formułę $\varphi = \Diamond x \vee \Box \bot$. Na mocy charakteryzacji składniowej ciągłego fragmentu modalnego rachunku μ formuła φ jest ciągła w x. Nie jest jednak ograniczona – wystarczy zauważyć, że w modelach $\mathcal{M}_n$, dla $n \in \omega$ osiąga ona punkt stały w n krokach. Zatem $\Diamond x \vee \Box \bot$ jest nieograniczona.



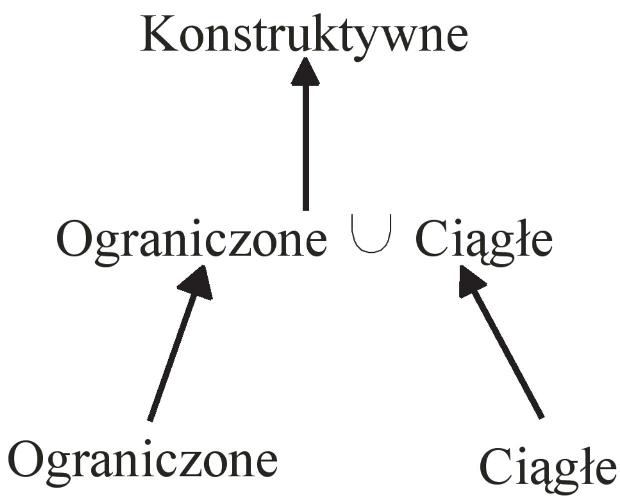
Rysunek 2.3: Model, w którym formuła $(\Diamond x \wedge p_1 \wedge \Box p_1) \vee (\Box x \wedge \neg p_1 \wedge \Box p_1) \vee \Box \perp$ osiąga punkt stały dopiero po $\omega + 1$ krokach.

W dotychchczasowych rozważanych formuły konstruktywne pojawiały się albo jako formuły ciągłe, albo formuły ograniczone. W przypadku obu tych klas formuł hipoteza Venemy jest, w trywialny sposób, prawdziwa. Dla formuł ciągłych wystarczy wziąć $\psi = \varphi$. W przypadku formuł ograniczonych należy rozpisać $\mu x.\varphi$ do postaci $\psi = \underbrace{\perp}_{\psi_0} \vee \underbrace{\varphi[x := \psi_0]}_{\psi_1} \vee \cdots \vee \underbrace{\varphi[x := \psi_k]}_{\psi_{k-1}}$, gdzie $k = \mathcal{O}_x(\varphi)$. Łatwo zauważyć, że w ψ nie występuje zmienna x, zatem ψ jest ciągła w x, na mocy charakteryzacji syntaktycznej ciągłego fragmentu modalnego rachunku μ.

Czy jednak możemy zakładać, że dowolna formuła konstruktywna jest albo ograniczona, albo ciągła? Okazuje się, że nie. Dowodu dostarcza następujący przykład.

Rozważmy formułę $\varphi = \Diamond\Diamond x \vee (\Box x \wedge \Box\Box \perp)$. Nieciągłość φ wynika z udowodnionej wcześniej nieciągłości $\Box x \wedge \Box\Box \perp$. Nieograniczoność łatwo zobaczyć obliczając najmniejszy punkt stały φ w modelach $\mathcal{M}_{2n}$, dla $n \in \omega$. Pozostaje pokazać konstruktywność φ. W dowolnym modelu $\mathcal{M}$ i wartościowaniu τ zachodzi:
$\varphi_x^1(\varnothing) = [\![\Box \perp]\!]$,
$\varphi_x^2(\varnothing) = [\![\Diamond \Diamond \Box \perp \vee \Box \Box \perp]\!]$,
$\varphi_x^3(\varnothing) = [\![\Diamond^4 \Box \perp \vee \Diamond^2 \Box^2 \perp \vee \Box^2 \perp]\!]$,
$\varphi_x^\omega(\varnothing) = [\![\bigvee_{i \in \omega} \Diamond^{2i} \Box^2 \perp]\!]$.
$\varphi_x^{\omega+1}(\varnothing) = \varphi_p^\omega(\varnothing)$,
zatem φ jest konstruktywna.

Zatem istnieją nieciągłe i nieograniczone formuły konstruktywne. Co ciekawe, ponieważ dla powyższej formuły zachodzi: $\varphi_x^\omega(\varnothing) = [\![\bigvee_{i \in \omega} \Diamond^{2i} \Box^2 \perp]\!]$, łatwo znaleźć formułę ciągłą ψ równoważną φ modulo punkt stały w x. Wystarczy wziąć $\psi = \Diamond \Diamond x \vee \Box\Box \perp$. Zatem nie jest to kontrprzykład dla hipotezy Venemy, jednak rozszerza naszą wiedzę o formułach konstruktywnych. Przedstawione powyżej relacje pomiędzy formułami ciągłymi, ograniczonymi i konstruktywnymi obrazuje ilustracja 2.4.



Rysunek 2.4: Relacje pomiędzy formułami ciągłymi, ograniczonymi i konstruktywnymi. Strzałki symbolizują właściwe inkluzje.

Rozdział 3

Formuły osiągające punkty stałe po więcej niż ω krokach

Podczas jednego z seminariów Damian Niwiński postawił pytanie o istnienie formuły, która osiąga punkt stały po $\omega+1$ krokach oraz w szerszym sensie, czy i dla jakich liczb porządkowych α większych niż ω istnieją formuły modalnego rachunku μ, które osiągają swoje punkty stałe po α krokach.

Jak dowiedliśmy w poprzednim rozdziale, nawet dla bardzo prostych formuł, jak $\Box x$, związana z nimi liczba porządkowa $\mathcal{O}(\Box x)$ może być nieokreślona. Z drugiej strony na mocy charakteryzacji syntaktycznej ciągłego fragmentu modalnego rachunku μ, jeżeli w formule prostej logiki modalnej nie występuje modalność $\Box$, w której zasięgu znajduje się zmienna x, to taka formuła jest ciągła, a zatem konstruktywna. Gdyby zatem istniała formuła prostej logiki modalnej, osiągająca punkt stały po $\omega+1$ krokach, musiałaby ona zawierać modalność $\Box$, jednak w taki sposób, by uniemożliwić istnienie modeli, w których osiągałaby ona punkt stały po dowolnie wielu krokach.

W odpowiedzi na postawione przez Niwińskiego pytanie Mikołaj Bojańczyk zaproponował, że następująca formuła:

$$(\Diamond x \wedge p_1 \wedge \Box p_1) \vee (\Box x \wedge \neg p_1 \wedge \Box p_1) \vee \Box \perp$$

osiąga punkt stały po $\omega+1$ krokach. W poprzednim rozdziale pokazaliśmy model, w którym formuła osiąga punkt stały po $\omega+1$ krokach (rysunek 2.3).

Pokażemy, że hipoteza Mikołaja Bojańczyka jest prawdziwa. Wykorzystamy sposób kontroli ilości kroków podczas obliczania punktu stałego, polegający na zliczaniu ilości przechodzonych kroków granicznych – czyli zliczaniu, jak często w sposób istotny została użyta modalność $\Box$. Dla $\alpha < \omega^2$ skonstruujemy formuły φ_α wyposażone w *bezpieczniki*, gwarantujące, że wartość $\mathcal{O}(\varphi_\alpha)$ jest określona, a jednocześnie potrzeba aż α kroków do osiągnięcia punktu stałego. Każde przejście przez liczbę graniczną podczas obliczania punktu stałego będzie wiązało się z przepaleniem kolejnego bezpiecznika.

Wprowadzimy teraz ścisłą definicję bezpiecznika i zbioru bezpieczników.

Definicja 3.0.3. *(Bezpieczniki) Dla $i > 0$ dowolną stałą zdaniową $p_i \in Prop$ nazwiemy* ***bezpiecznikiem.***
Niech $n > 0$ oraz $0 \leq i \leq n$.
Układ bezpieczników *C_i^n definiujemy jako:*

$$\neg p_1 \wedge \ldots \neg p_i \wedge p_{i+1} \wedge \cdots \wedge p_n$$

Układy bezpieczników można rozumieć jako kolory punktów modelu. Jedną z ich istotnych cech jest to, że dla ustalonego $n > 0$ i $0 \leq i, j \leq n$ C_i^n oraz C_j^n wykluczają się wzajemnie dla $i \neq j$.

3.1. Przykłady formuł osiągających punkty stałe po $\alpha < \omega^2$ krokach

Możemy teraz zaprezentować ogólną konstrukcję[1] formuł, o których pokażemy następnie, że osiągają swoje punkty stałe po α krokach, dla $\omega \leq \alpha < \omega^2$.

$$\psi_{\omega \cdot n} = \bigvee_{i=0}^{n-1} (\Diamond x \wedge C_i^n \wedge \Box C_i^n) \vee \bigvee_{i=0}^{n-2} (\Box x \wedge C_{i+1}^n \wedge \Box C_i^n), \tag{3.1}$$

$$\psi_{\omega \cdot n+m} = \psi_{\omega \cdot n} \vee \bigvee_{i=0}^{m-1} (\Box x \wedge \bigwedge_{j=0}^{i} \Box^j C_n^n \wedge \Box^{i+1} C_{n-1}^n), \tag{3.2}$$

$$\varphi_{\omega \cdot n+m} = \psi_{\omega \cdot n+m} \vee \Box \perp . \tag{3.3}$$

Zauważmy, że formuła $\varphi_{\omega+1}$ jest identyczna z tą, o której Mikołaj Bojańczyk postulował, że osiąga punkt stały w $\omega + 1$ krokach.

Naszym celem jest pokazanie, że formuły φ_α osiągają swoje punkty stałe po α krokach. Zanim przejdziemy jednak do właściwego dowodu tego twierdzenia, sformułujemy lemat, który przybliży sposób, w jaki sposób przebiega obliczanie najmniejszych punktów stałych formuł φ_α.

Lemat 3.1.1. *(Lemat główny) Dla dowolnego $k > 0$, dowolnego α takiego, że $\omega \cdot k \leq \alpha < \omega^2$, dowolnego modelu $\mathcal{M} = (M, R, V)$, wartościowania τ oraz dowolnego punktu $a \in M$, jeżeli*

- $a \vDash p_k$,
- $a \in [\![\mu x.\varphi_\alpha]\!]_{\mathcal{M},\tau}$,

to $a \in \varphi_\alpha^{\omega \cdot k}(\varnothing)$.

Dowód. Na początku zauważmy, że warunek $a \in [\![\mu x.\varphi_\alpha]\!]_{\mathcal{M},\tau}$, na mocy twierdzeń 2.0.6 i 2.0.7, równoważny jest następującemu: $\exists \beta\, a \in \varphi_\alpha^\beta(\varnothing)$. Kwantyfikator egzystencjalny wiążący β możemy wyciągnąć przed implikację otrzymując kwantyfikator ogólny. Ustalmy model $\mathcal{M} = (M, R, V)$, wartościowanie τ oraz punkt $a \in M$. Dowodzimy przez indukcję ze względu na β.

Krok bazowy:
Krok bazowy – dla $\beta = \omega \cdot k$ – jest oczywisty. Mamy:

$$\forall k > 0 \forall \omega \cdot k \leq \alpha < \omega^2 \left[(a \vDash p_k \wedge a \in \varphi_\alpha^{\omega \cdot k}(\varnothing)) \Rightarrow a \in \varphi_\alpha^{\omega \cdot k}(\varnothing) \right]$$

Krok graniczny:
Krok graniczny jest również prosty:
Niech β będzie graniczną liczbą porządkową oraz dla dowolnej liczby porządkowej $\gamma < \beta$ zachodzi założenie indukcyjne:

$$\forall k > 0 \forall \omega \cdot k \leq \alpha < \omega^2 \left[(a \vDash p_k \wedge a \in \varphi_\alpha^\beta(\varnothing)) \Rightarrow a \in \varphi_\alpha^{\omega \cdot k}(\varnothing) \right]$$

[1] Chciałbym podziękować Michałowi Skrzypczakowi za uwagi, które pozwoliły uczynić formuły łatwiejszymi w zrozumieniu.

Pokażemy, że lemat zachodzi również dla β. Ustalmy $k > 0$ oraz liczbę porządkową α spełniającą $\omega \cdot k \leq \alpha < \omega^2$. Załóżmy, że $a \vDash p_k$ oraz, że $a \in \varphi_\alpha^\beta(\varnothing)$. Przypomnijmy definicję granicznej iteracji formuły φ_α:

$$\varphi_\alpha^\beta(\varnothing) = \bigcup_{\gamma<\beta} \varphi_\alpha^\gamma(\varnothing)$$

Istnieje zatem liczba porządkowa $\gamma < \beta$ taka, że $a \in \varphi_\alpha^\gamma(\varnothing)$. Zatem, na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy $a \in \varphi_\alpha^{\omega\cdot k}(\varnothing)$.

Krok następnika:

Pozostaje zatem udowodnić lemat w przypadku, gdy β jest następnikiem. Niech zatem $\beta = \gamma + 1$. Założenie indukcyjne ma postać:

$$\forall k > 0 \forall \omega \cdot k \leq \alpha < \omega^2 \left[(a \vDash p_k \wedge a \in \varphi_\alpha^\gamma(\varnothing)) \Rightarrow a \in \varphi_\alpha^{\omega\cdot k}(\varnothing)\right]$$

Pokażemy, że lemat zachodzi również dla β, czyli:

$$\forall k > 0 \forall \omega \cdot k \leq \alpha < \omega^2 \left[(a \vDash p_k \wedge a \in \varphi_\alpha^{\gamma+1}(\varnothing)) \Rightarrow a \in \varphi_\alpha^{\omega\cdot k}(\varnothing)\right]$$

Ustalmy $k > 0$ oraz niech $\alpha = \omega \cdot n + m$, dla pewnych $n \geq k$ i $m \in \omega$. Załóżmy, że $a \vDash p_k$ oraz, że $a \in \varphi_\alpha^\beta(\varnothing)$. Ponieważ $\beta = \gamma + 1$, zachodzi: $a \in \varphi_\alpha(\varphi_\alpha^\gamma(\varnothing))$ i na mocy definicji formuły φ_α zachodzić musi jeden z przypadków:

- $a \vDash \Box\perp$ – wtedy $a \in \varphi_\alpha^0(\varnothing) \subseteq \varphi_\alpha^{\omega\cdot k}(\varnothing)$ (w kolejnych punktach możemy zakładać, że istnieje t takie, że aRt),
- $a \vDash C_l^n \wedge \Box C_l^n$ dla pewnego $l < k$ – skoro $a \vDash p_k$ oraz istnieje t takie, że aRt oraz $t \in \varphi_\alpha^\gamma(\varnothing)$. Wiadomo zatem, że $t \vDash C_l^n$ co pociąga $t \vDash p_{l+1}$. Na mocy założenia indukcyjnego, ponieważ $t \in \varphi_\alpha^\gamma(\varnothing)$ oraz $t \vDash p_{l+1}$ wiadomo, że $t \in \varphi_\alpha^{\omega\cdot(l+1)}(\varnothing)$. Ponieważ $\omega \cdot (l+1)$ jest graniczną liczbą porządkową, istnieje $s \in \omega$ takie, że $t \in \varphi_\alpha^{\omega\cdot l+s}(\varnothing)$. Wtedy $a \in \varphi_\alpha^{\omega\cdot l+s+1}(\varnothing) \subseteq \varphi_\alpha^{\omega\cdot(l+1)}(\varnothing) \subseteq \varphi_\alpha^{\omega\cdot k}(\varnothing)$,
- $a \vDash C_{l+1}^n \wedge \Box C_l^n$ for some $l < k - 1$ – skoro $a \vDash p_k$, oraz dla dowolnego t jeżeli aRt, to $t \in \varphi_\alpha^\gamma(\varnothing)$. Wiemy również, że takie t istnieje – ustalmy takie t. Wtedy $t \vDash C_l^n$ a zatem $t \vDash p_{l+1}$ i na mocy założenia indukcyjnego $t \in \varphi_\alpha^{\omega\cdot(l+1)}(\varnothing)$. Stąd $a \in \varphi_\alpha^{\omega\cdot(l+1)+1}(\varnothing) \subseteq \varphi_\alpha^{\omega\cdot k}(\varnothing)$, ponieważ $l < k - 1$,
- Pozostaje przypadek, gdy $a \vDash \bigvee_{i=0}^{m-1}(\Box x \wedge \bigwedge_{j=0}^{i} \Box^j C_n^n \wedge \Box^{i+1} C_{n-1}^n)$. Jednak wtedy $a \vDash C_n^n$ co oznacza, że $a \vDash \neg p_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. To jednak jest niemożliwe, ponieważ założyliśmy, że $a \vDash p_k$ dla $k \leq n$.

To kończy dowód lematu głównego. □

Lemat główny pokazuje, w jaki sposób działają *bezpieczniki*. Jeżeli punkt, w którym prawdziwa jest p_i znajduje się w najmniejszym punkcie stałym jednej z formuł φ_α, to musi on zostać dodany do punktu stałego relatywnie szybko – w jednym z $\omega \cdot i$ pierwszych kroków. Po tej liczbie iteracji formuły φ_α *bezpiecznik* p_i przepala się zamykając dostęp do punktu stałego wszystkim punktom modelu spełniającym p_i, które jeszcze nie zostały dodane. Jest to globalne spojrzenie na *bezpieczniki.*

Na *bezpieczniki* można patrzeć również lokalnie. Rozważmy następujący przykład:

$$\begin{aligned}\varphi_{\omega\cdot 2+3} = {} & (\Diamond x \wedge C_0^2 \wedge \Box C_0^2) \vee (\Diamond x \wedge C_1^2 \wedge \Box C_1^2) \vee (\Box x \wedge C_1^2 \wedge \Box C_0^2) \vee \\ & \vee (\Box x \wedge C_2^2 \wedge \Box C_1^2) \vee (\Box x \wedge C_2^2 \wedge \Box C_2^2 \wedge \Box^2 C_1^2) \vee \\ & \vee (\Box x \wedge C_2^2 \wedge \Box C_2^2 \wedge \Box^2 C_2^2 \wedge \Box^3 C_1^2)\end{aligned}$$

Przypomnijmy, że $C_0^2 = p_1 \wedge p_2$, $C_1^2 = \neg p_1 \wedge p_2$ and $C_2^2 = \neg p_1 \wedge \neg p_2$. Ograniczymy nasze rozważania do modeli będących drzewami. W każdym drzewie pierwsza iteracja dodaje do punktu stałego wszystkie liście, to znaczy $\varphi^0_{\omega\cdot 2+3}(\varnothing) = [\![\Box\bot]\!]$. Ponieważ w rozważanym przez nas przykładzie $n = 2$ istnieją cztery typy punktów: te spełniające $p_1 \wedge p_2$, $p_1 \wedge \neg p_2$, $\neg p_1 \wedge p_2$ oraz $\neg p_1 \wedge \neg p_2$. Jeżeli punkt pierwszego typu został dodany do punktu stałego, w którejś iteracji, to jego ojciec może zostać dodany w następnej iteracji jedynie w dwóch przypadkach – jeżeli on i wszystkie jego dzieci spełniają p_1 i p_2 ($\Diamond x \wedge C_0^2 \wedge \Box C_0^2$) lub, gdy wszystkie jego dzieci zostały już dodane do punktu stałego i spełniają p_1 i p_2, a on spełnia $\neg p_1$ and p_2 ($\Box x \wedge C_1^2 \wedge \Box C_0^2$). W drugim przypadku *bezpiecznik* p_1 przepalił się, dzięki czemu wiemy, że ojciec punktu, którego dodanie przepaliło bezpiecznik p_1 nie zostanie dodany ani przez $\Diamond x \wedge C_0^2 \wedge \Box C_0^2$ ani przez $\Box x \wedge C_1^2 \wedge \Box C_0^2$. Przepalenie się *bezpiecznika* p_1 symbolizuje tym samym zużycie jednego $\Box$, tymczasem wiadomo, że modalność $\Diamond$ nie pozwala iterować dłużej niż ω razy – przechodzenie formuł φ_α przez graniczne liczby porządkowe wymaga ingerencji modalności $\Box$.

Podobnie wygląda sytuacja punktów spełniających $\neg p_1 \wedge p_2$. Jedyną różnicą jest fakt, że pozostał już tylko jeden nieprzepalony *bezpiecznik* p_2.

Punkty spełniające $p_1 \wedge \neg p_2$ nie są interesujące z naszego punktu widzenia, ponieważ ich rodzice nigdy nie zostaną dołączeni do punktu stałego. Natomiast punkty spełniające $\neg p_1 \wedge \neg p_2$ posiadają przepalone oba bezpieczniki, a ich rodzice mogą zostać dodani do punktu stałego jedynie przez $\Box x \wedge C_2^2 \wedge \Box C_1^2$, $\Box x \wedge C_2^2 \wedge \Box C_2^2 \wedge \Box^2 C_1^2$ lub $\Box x \wedge C_2^2 \wedge \Box C_2^2 \wedge \Box^2 C_2^2 \wedge \Box^3 C_1^2$ – są to dość sztuczne człony alternatywy pozwalające na kolejne m (tu $m = 3$) iteracji. Gdy wszystkie bezpieczniki są już przepalone nie będzie możliwe już przejście więcej liczb granicznych.

Możemy teraz przejść do ścisłego sformułowania i dowodów dwóch głównych twierdzeń dotyczących formuł z *bezpiecznikami.*

Twierdzenie 3.1.1. *Dla dowolnej liczby porządkowej α takiej, że $\omega \le \alpha < \omega^2$, w dowolnym modelu $\mathcal{M} = (M, R, V)$ oraz przy dowolnym wartościowaniu τ zachodzi:*

$$\varphi_\alpha^{\alpha+1}(\varnothing) = \varphi_\alpha^\alpha(\varnothing)$$

Dowód. Inkluzja $\supseteq$ jest oczywista z uwagi na monotoniczność φ_α w x. Pozostaje pokazać przeciwną inkluzję.

Niech $\alpha = \omega \cdot n + m$ dla $n > 0$ i $m \in \omega$. Ustalmy model $\mathcal{M} = (M, R, V)$, wartościowanie τ oraz załóżmy, że $a \in \varphi_\alpha^{\alpha+1}(\varnothing)$. Pokażemy, że $a \in \varphi_\alpha^\alpha(\varnothing)$.

Jeżeli istnieje $i \le n$ takie, że $a \vDash p_i$, to, na mocy lematu 3.1.1 wiadomo, że $a \in \varphi_\alpha^{\omega\cdot i}(\varnothing) \subseteq \varphi_\alpha^{\omega\cdot n+m}(\varnothing) = \varphi_\alpha^\alpha(\varnothing)$, a zatem $a \in \varphi_\alpha^{\alpha+1}(\varnothing)$.

Załóżmy teraz, że dla $i = 1, \dots, n$ zachodzi $a \vDash \neg p_i$. Ponieważ $a \in \varphi_\alpha(\varphi_\alpha^\alpha(\varnothing))$, to na mocy definicji φ_α, mamy $m > 0$ oraz zachodzić musi jeden z następujących przypadków:

- $a \vDash \Box \bot$ – wtedy oczywiście $a \in \varphi_\alpha^\alpha(\varnothing)$.

- $a \vDash \bigwedge_{j=0}^{i} \Box^j C_n^n \wedge \Box^{i+1} C_{n-1}^n$, dla pewnych $i = 0, \dots, m-1$ oraz dla dowolnego t takiego, że aRt, zachodzi $t \in \varphi_\alpha^\alpha(\varnothing)$.

  Przez indukcję ze względu na i pokażemy, że jeżeli $a \vDash \bigwedge_{j=0}^{i} \Box^j C_n^n \wedge \Box^{i+1} C_{n-1}^n$, to $a \in \varphi_\alpha^{\omega\cdot n+i+1}(\varnothing)$.

  Krok bazowy:

  Załóżmy, że $i = 0$. Wtedy dla dowolnego t takiego, że aRt, zachodzi $t \vDash C_{n-1}^n$. Zatem $t \vDash p_n$ oraz na mocy lematu 3.1.1, $t \in \varphi_\alpha^{\omega\cdot n}(\varnothing)$. Zatem $a \in \varphi_\alpha^{\omega\cdot n+1}(\varnothing)$.

Krok następnika:
Załóżmy, że dla $0 \le i < k \le m$ jeżeli $a \vDash \bigwedge_{j=0}^{i} \Box^j C_n^n \wedge \Box^{i+1} C_{n-1}^n$, to

$$a \in \varphi_\alpha^{\omega \cdot n+i+1}(\varnothing)$$

Pokażemy, że dla $i = k$ powyższa implikacja również zachodzi. Załóżmy, że $a \vDash \bigwedge_{j=0}^{k} \Box^j C_n^n \wedge \Box^{k+1} C_{n-1}^n$. Wówczas dla dowolnego t takiego, że aRt zachodzi $t \vDash \bigwedge_{j=0}^{k-1} \Box^j C_n^n \wedge \Box^k C_{n-1}^n$. Wtedy, na mocy założenia indukcyjnego $t \in \varphi_\alpha^{\omega \cdot n+k}(\varnothing)$, a zatem $a \in \varphi_\alpha^{\omega \cdot n+k+1}(\varnothing)$.

Zatem w każdym z rozważonych przypadków $a \in \varphi_\alpha^{\omega \cdot n+m}(\varnothing) = \varphi_\alpha^\alpha(\varnothing)$.

- W pozostałych przypadkach zachodzi $a \vDash \bigvee_{i=0}^{n-1}(\Diamond x \wedge C_i^n \wedge \Box C_i^n) \vee \bigvee_{i=0}^{n-2}(\Box x \wedge C_{i+1}^n \wedge \Box C_i^n)$, a zatem $a \vDash C_i^{n+1}$, dla pewnego $i = 1, \dots n-1$. Oznacza to, że $a \vDash p_n$, co stoi w sprzeczności z założeniem, że $a \vDash \neg p_n$.

To kończy dowód twierdzenia. □

Na mocy twierdzenia 3.1.1 dla dowolnej liczby porządkowej α takiej, że $\omega \le \alpha < \omega^2$ najmniejszy punkt stały φ_α osiągany jest co najwyżej po α krokach. Wystarczy pokazać teraz dla każdej formuły φ_α model, w którym φ_α faktycznie potrzebuje dokładnie α kroków by osiągnąć punkt stały. Pokażemy teraz, jak skonstruować takie modele.

Twierdzenie 3.1.2. *Dla dowolnej liczby porządkowej α takiej, że $\omega \le \alpha < \omega^2$ istnieje model, w którym φ_α osiąga punkt stały po α krokach.*

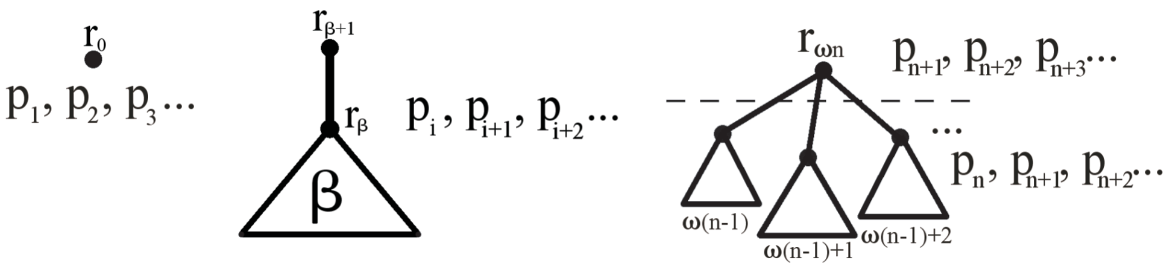
Dowód. Przypomnijmy przyporządkowanie drzew liczbom porządkowym omówione przy okazji dowodu faktu, że formuła $\Box x$ nie osiąga punktu stałego po żadnej ograniczonej liczbie kroków, czyli że wartość $\mathcal{O}(\Box x)$ jest nieokreślona.

Liczbie 0 przyporządkowaliśmy tylko jeden punkt – korzeń drzewa r_0. W kroku następnika: $\beta+1$ dodajemy do skonstruowanego wcześniej drzewa dla β dodatkowy punkt r_α, który pełnić będzie funkcję korzenia nowego drzewa, a następnie dołączamy do niego, jako jedyne dziecko, korzeń drzewa dla β. Zmiana w stosunku do wcześniejszej konstrukcji pojawia się w kroku granicznym. Potrzebujemy modeli dla liczb porządkowych mniejszych niż ω^2, zatem wszystkie liczby graniczne, które napotkamy, są postaci $\alpha = \omega \cdot n$, dla $n > 0$. Podobnie, jak w przypadku kroku następnika dołączamy jeden nowy punkt $r_{\omega \cdot n}$, jako korzeń drzewa dla $\omega \cdot n$, jako jego dzieci dodajemy jednak jedynie korzenie drzew przyporządkowanych liczbom porządkowym $\omega \cdot (n-1), \omega \cdot (n-1)+1, \omega \cdot (n-1)+2, \dots$. W ten sposób przyporządkowaliśmy liczbom porządkowym $\alpha < \omega^2$ modele $\mathcal{N}'_\alpha = (N_\alpha, S_\alpha, \varnothing)$.

Musimy teraz wzbogacić powstałe w ten sposób modele z modeli nad $Prop = \varnothing$, do modeli nad $Prop = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$. Niech $n > 0$, $m \in \omega$ oraz niech $\alpha = \omega \cdot n + m$. Zdefiniujmy $V_{\omega \cdot n+m}$ w taki sposób, by zachodziło: $r_{\omega \cdot n+m} \in V(p_i)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i > n$, gdzie $r_{\omega \cdot n+m}$ jest korzeniem odpowiedniego modelu. Idea konstrukcji polega na rozpoczęciu od modelu $\mathcal{M}_0$, którego korzeń spełnia p_i, dla wszystkich $i > 0$. Gdy przechodzimy przez krok następnika, nowy korzeń ma spełniać dokładnie te same stałe zdaniowe, co poprzedni. Wreszcie, w przypadku granicznym, jeżeli i jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że stała p_i jest spełniona w każdym punkcie skonstruowanych wcześniej modeli, to korzeń modelu przyporządkowanego liczbie granicznej spełnia wszystkie p_j, dla $j > i$ (nie spełnia p_i). Powstałe w ten sposób modele nad $\{p_1, p_2, \dots\}$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{N}_\alpha = (N_\alpha, S_\alpha, W_\alpha)$

Pokażemy teraz, że dla α takich, że $\omega \le \alpha < \omega^2$ formuła φ_α osiąga w modelu $\mathcal{N}_\alpha$ punkt stały równy $N_\alpha - \{r_\alpha\}$ po α krokach, przy dowolnym wartościowaniu τ.

Krok bazowy:
Dla $\alpha = \omega$ formuła jest postaci $\varphi_\alpha = (\Diamond x \wedge p_1 \wedge \Box p_1) \vee \Box \perp$. Łatwo zobaczyć, że punkt stały



Rysunek 3.1: Konstrukcja drzew, w których formuły φ_α osiągają punkty stałe po α krokach dla $\omega \leq \alpha < \omega^2$.

nie zostanie osiągnięty po żadnej, skończnej licznie kroków, jednak po ω krokach wszystkie punkty spełniające p_1 zostaną już dodane i tym samym zostanie osiągnięty punkt stały. Można zobaczyć to na rysunku 2.3.

Krok następnika:
Załóżmy, że teza zachodzi dla β, pokażemy, że zachodzi również dla $\alpha = \beta + 1$. Zauważmy, że $\beta = \omega{\cdot}n{+}m$, dla pewnych $n > 0$ i $m \in \omega$. Z założenia indukcyjnego punkt stały φ_β w modelu $\mathcal{N}_\beta$ wynosi $N_\beta - \{r_\beta\}$. Przypomnijmy, że $\varphi_\alpha = \varphi_\beta \vee (\Box x \wedge \bigwedge_{j=0}^{m-1} \Box^j C_n^n \wedge \Box^m C_{n-1}^n)$. Przeanalizujmy, w jaki sposób będzie przebiegać obliczanie punktu stałego φ_α w modelu $\mathcal{N}_\alpha$. Ponieważ, żaden punkt oprócz dziecka r_β korzenia r_α nie spełnia $\bigwedge_{j=0}^{m-1} \Box^j C_n^n \wedge \Box^m C_{n-1}^n$ oraz w każdej kolejnej iteracji dodawany punkt musi być bezpośrednim przodkiem punktów dodanych wcześniej, pierwsze β iteracji będzie przebiegać identycznie, jak w przypadku formuły φ_β i modelu $\mathcal{N}_\beta$. W α–tym kroku zostanie dodany punkt r_β ponieważ spełnia on φ_α przy wartościowaniu $\tau[x{:=}\varphi_\alpha^\beta(\varnothing)]$. Tym samym, na mocy twierdzenia 3.1.1 punkt stały został osiągnięty i wynosi $N_\alpha - \{r_\alpha\}$.

Krok graniczny:
Załóżmy teraz, że $\alpha = \omega \cdot n$, dla pewnego $n > 1$, i że dla $\beta < \alpha$ teza jest prawdziwa. Zauważmy, że $\varphi_{\omega\cdot n} = (\varphi_{\omega\cdot(n-1)} \wedge p_n \wedge \Box p_n) \vee (\Diamond x \wedge C_{n-1}^n \wedge \Box C_{n-1}^n) \vee (\Box x \wedge C_n^n \wedge \Box C_{n-1}^n)$. Rozważmy drzewa $\mathcal{N}_{\omega} \cdot (n{-}1), \mathcal{N}_{\omega\cdot(n-1)+1}, \mathcal{N}_{\omega\cdot(n-1)+2}, \ldots$. Pierwsze $\omega{\cdot}(n{-}1)$ kroków obliczania punktu stałego formuły φ_α w $\mathcal{M}_{\omega\cdot n}$ przebiega tak samo, jak w przypadku formuł $\varphi_{\omega\cdot(n-1)+m}$ i modeli $\mathcal{M}_{\omega\cdot(n-1)+m}$, dla $m \in \omega$. Następnie łatwo zauważyć, że dla $m \in \omega$ kopie punktów $r_{\omega\cdot(n-1)+m}$ zostają dodane do punktu stałego φ_α w $(\omega \cdot (n-1) + m + 1)$–szym kroku, poprzez człon alternatywy $\Diamond x \wedge C_{n-1}^n \wedge \Box C_{n-1}^n$. Stąd po α krokach mamy $\varphi_\alpha^\alpha(\varnothing) = N_\alpha - \{r_\alpha\}$. Na mocy twierdzenia 3.1.1 jest to punkt stały formuły φ_α.

To kończy dowód twierdzenia. □

Podsumowując wyniki otrzymane w twierdzeniach 3.1.1 i 3.1.2 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.1.1. *Niech $\alpha < \omega^2$, wówczas $\mathcal{O}_x(\varphi_\alpha) = \alpha$.*

Tym samym pokazaliśmy, że formuły φ_α rzeczywiście osiągają swoje punkty stałe po α krokach, dla $\alpha < \omega^2$.

Podsumowanie i kierunki dalszej pracy

W niniejszej rozprawie badaliśmy szybkość z jaką formuły modalnego rachunku μ mogą osiągać swoje punkty stałe. Omówiliśmy wybrane własności dwóch klas formuł osiągających punkty stałe relatywnie szybko: *formuły ograniczone* i *formuły konstruktywne* oraz naszkicowaliśmy ich związki z dogłębnie zbadanymi przez Gaëlle Fonataine w [Gae08] formułami ciągłymi. Wśród otwartych problemów związanych ze wspomnianymi formułami należy wymienić:

1. Rozstrzygalność ograniczoności formuł modalnego rachunku μ,
2. Rozstrzygalność konstruktywności formuł modalnego rachunku μ,
3. Hipotezę Yde Venemy.

Następnie przedstawiliśmy sposób kontroli ilości kroków potrzebnych do osiągnięcia punktu stałego przez formułę modalnego rachunku μ dla liczb porządkowych mniejszych niż ω^2. Problem możliwości kontroli ilości kroków dla większych liczb porządkowych pozostaje otwarty, w szczególności nie są znane odpowiedzi na pytania:

1. Czy istnieje formuła φ modalnego rachunku μ oraz liczba porządkowa $\alpha \geq \omega^2$ taka, że $\mathcal{O}(\varphi) = \alpha$, a jeżeli tak, to dla jakich α istnieją formuły takie, że $\mathcal{O}(\varphi) = \alpha$?
2. Czy istnieje formuła modalnego rachunku μ, która zachowuje się jak ω–licznik we wszystkich odpowiednio dużych modelach[2]?

Z pierwszym z powyższych pytań wiąże się jeszcze jedno, prostsze: czy istnieje formuła φ logiki modalnej oraz liczba porządkowa $\alpha \geq \omega^2$ taka, że $\mathcal{O}(\varphi) = \alpha$? Wysuwamy hipotezę, że takie formuły nie istnieją.

Pozostaje jeszcze jeden ciekawy problem związany z pojęciem osiągania punktu stałego w określonej ilości kroków:

- Czy rozstrzygalny jest problem określoności $\mathcal{O}(\varphi)$?

[2] To jest takich, w których pewna formuła potrzebuje co najmniej ω^2 kroków, by osiągnąć punkt stały

Bibliografia

[AN01] A. Arnold, D. Niwinski, *Rudiments of μ–Calculus*, Studies in Logic, Vol. **146**, North–Holland (2001).

[Bra97] J. C. Bradfield, The modal mu-calculus alternation hierarchy is strict, *Theoretical Computer Science* **195**, 133—153 (1997).

[BS06] J. Bradfield, J. C. Stirling, Modal mu–calculi, w: P. Blackburn, J. van Benthem and F. Wolter (eds.), *The Handbook of Modal Logic*, 721–756, Elsevier (2006).

[Eme90] E. A. Emerson, Temporal and modal logic, *Handbook of Theoretical Computer Science*, Vol. B, w: J. van Leeuwen (ed.), 995–1072, Elsevier (1990).

[Gae08] G. Fontaine, Continuous fragment of the μ–calculus, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. **5213**, 139–153 (2008).

[JW96] D. Janin, I. Walukiewicz, On the expressive completeness of the propositional mu-calculus with respect to monadic second order logic. *Proceedings CONCUR '96* LNCS **1119**, 263–277 (1996).

[Kna28] B. Knaster, Un théorème sur les fonctions d'ensembles, *Ann. Soc. Polon. Math.* **6**, 133–134 (1928).

[Koz83] D. Kozen, Results on the propositional mu-calculus. *Theoretical Computer Science* **27**, 333—354 (1983).

[Koz88] D. Kozen, A finite model theorem for the propositional μ-calculus. *Studia Logica* **47**, 233—241 (1988).

[Koz84] D. Kozen and R. Parikh, A decision procedure for the propositional μ-calculus, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. **164**, 313—325 (1984).

[Ott99] M. Otto, Eliminating recursion in the μ–calculus, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. **1563**, 531–540 Springer (1999).

[Tar55] A. Tarski, A Lattice-Theoretical Fixpoint Theorem and Its Applications. *Pacific Journal of Mathematics* **5**, 285–309 (1955).