Twierdzenie Wainera

Marek Czarnecki

Wydział Filozofii i Socjologii
Uniwersytet Warszawski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Warszawa, 3 lipca 2009

Motywacje

- Dla dowolnej hierarchii (w sensie szybkości wzrostu) funkcji rekurencyjnych możemy, metodą przekątniową, zdefiniować w arytmetyce nową, jeszcze szybciej rosnącą, funkcję rekurencyjną.
    - Dla funkcji elementarnych – $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}}\}n\text{–razy}$,
    - Dla funkcji pierwotnie rekurencyjnych – funkcja Ackermanna.

Motywacje

- Dla dowolnej hierarchii (w sensie szybkości wzrostu) funkcji rekurencyjnych możemy, metodą przekątniową, zdefiniować w arytmetyce nową, jeszcze szybciej rosnącą, funkcję rekurencyjną.
  - Dla funkcji elementarnych – $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}}\}n\text{–razy}$,
  - Dla funkcji pierwotnie rekurencyjnych – funkcja Ackermanna.
- Twierdzenie Wainera ogranicza możliwość wyboru funkcji – interesują nas jedynie dowodliwie całkowite w PA. Każdą z takich funkcji rekurencyjnych dominuje pewna funkcja z hierarchii Hardy'ego.

Motywacje

- Dla dowolnej hierarchii (w sensie szybkości wzrostu) funkcji rekurencyjnych możemy, metodą przekątniową, zdefiniować w arytmetyce nową, jeszcze szybciej rosnącą, funkcję rekurencyjną.
  - Dla funkcji elementarnych – $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}} \}n\text{–razy}$,
  - Dla funkcji pierwotnie rekurencyjnych – funkcja Ackermanna.
- Twierdzenie Wainera ogranicza możliwość wyboru funkcji – interesują nas jedynie dowodliwie całkowite w PA. Każdą z takich funkcji rekurencyjnych dominuje pewna funkcja z hierarchii Hardy'ego.
- Szukamy funkcji najwolniej rosnących definiowalnych w modelach skończonych. $f(n) = m \equiv_{df} \mathcal{N}_{n+1} \vDash \varphi(\max, m)$ (jako odwrotności funkcji szybko rosnących).

Motywacje

- Dla dowolnej hierarchii (w sensie szybkości wzrostu) funkcji rekurencyjnych możemy, metodą przekątniową, zdefiniować w arytmetyce nową, jeszcze szybciej rosnącą, funkcję rekurencyjną.
  - Dla funkcji elementarnych – $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}} \}n\text{–razy}$,
  - Dla funkcji pierwotnie rekurencyjnych – funkcja Ackermanna.
- Twierdzenie Wainera ogranicza możliwość wyboru funkcji – interesują nas jedynie dowodliwie całkowite w PA. Każdą z takich funkcji rekurencyjnych dominuje pewna funkcja z hierarchii Hardy'ego.
- Szukamy funkcji najwolniej rosnących definiowalnych w modelach skończonych. $f(n) = m \equiv_{df} \mathcal{N}_{n+1} \vDash \varphi(\max, m)$ (jako odwrotności funkcji szybko rosnących).
- Chcemy znaleźć odpowiednik twierdzenia Wainera w skończonych modelach, by móc zbudować hierarchię funkcji szybko (wolno) rosnących definiowalnych w modelach skończonych.

Podstawowe definicje

Postać normalna Cantora

Dowolną liczbę porządkową $\lambda < \varepsilon_0$ można zapisać w następującej postaci:
$\lambda = \omega^{\lambda_1} + \omega^{\lambda_2} + \cdots + \omega^{\lambda_m}$,
gdzie $\lambda > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$.

$\{\lambda\}(n)$

Niech $\lambda < \varepsilon_0$ oraz $n \in \omega$. $\lambda = \beta + \omega^{\lambda_m}$.

$$\{\lambda\}(n) = \begin{cases} \beta + \omega^{\lambda_m - 1} \cdot n & \text{gdy } \lambda_m \text{ jest następnikiem,} \\ \beta + \omega^{\{\lambda_m\}(n)} & \text{gdy } \lambda_m \text{ graniczna.} \end{cases}$$

Podstawowe definicje

Ciąg Hardy'ego

$H_0(x) = x,$
$H_{\alpha+1} = H_\alpha(x+1),$
$H_\lambda(x) = H_{\{\lambda\}(x)}(x)$, dla λ granicznej.

Przykłady

$H_n(x) = x + n,$
$H_\omega(x) = 2x,$
$H_{\omega\cdot 2}(x) = 4x,$
$H_{\omega\cdot n}(x) = 2^n x,$
$H_{\omega^\alpha\cdot n}(x) = H^{(n)}_{\omega^\alpha}(x).$

Sformułowanie twierdzenia Wainera

Twierdzenie Wainera

Niech $f : \omega \to \omega$ będzie funkcją rekurencyjną i niech $F(x, y)$ będzie Σ_1-formułą reprezentującą f.

Jeżeli $PA \vdash \forall x \exists ! y F(x, y)$, to istnieją $\alpha < \varepsilon_0$ oraz $n_0 \in \omega$ takie, że dla dowolnego $x \geq n_0$ zachodzi $f(x) \leq H_\alpha(x)$.

Pojęcia pomocnicze

Aproksymacje skończonych funkcji

Niech $f : \omega \to \omega$ będzie funckją częściową o skończonej dziedzinie i niech $S \subseteq \omega$. Mówimy, że S jest aproksymacją f, jeżeli:

$$\forall x \in S - \{\max S\} \forall y < x - 2 (y \in \mathrm{dom} f \to f(y) < x^{+} \vee f(y) \geq \max S)$$

$A_n^k(S)$

Niech S będzie zbiorem skończonym. Przez $A_n^k(S)$ oznaczamy następującą własność:

$$\forall f_1 \exists S_1 \subseteq S \forall f_2 \exists S_2 \subseteq S_1 \ldots \forall f_n \exists S_n \subseteq S_{n-1}$$
$$(\bigwedge_{i=1}^{n} S_i \text{ jest aproksymacją } f_i \wedge \mathrm{card} S_n > k)$$

ω_n^k, $I(a, b)$

Przez ω_n^k oznaczamy $\{\omega_{n+1}\}(k)$,
Przez $I(a, b)$ oznaczamy kod zbioru $\{x : a \leq x \leq b\}$.

Sformułowanie lematu 1

Lemat 1

Niech $a, b \in \omega$, $a > 0$. Jeżeli $H_{\omega_n^k}(a) < b$, to:

$$\mathcal{N} \vDash A_n^k[I^{\mathcal{N}}(a, b)]$$

Uogólnienie ciągów Hardy'ego

Definicja

Niech $S \subseteq \omega$. Dla $x \in S$ definiujemy: $H_0^S(x) = x$
$H_1^S(x) = x^+$
$H_{\alpha+1}^S(x) = H_\alpha^S(H_1^S(x))$, dla $\alpha < \varepsilon_0$
$H_\lambda^S(x) = H_{\{\lambda\}(x)}^S(x)$, dla $\lambda < \varepsilon_0$ granicznej.
Lewa strona określona jest tam, gdzie prawa strona jest określona.

Wielkość zbioru

Powiemy, że zbiór S jest wielkości α jeżeli $S \neq \varnothing$ oraz $H_\alpha^S(\min S) = \max S$.

Uwagi pomocnicze

Uwaga 1

Niech $S_1 \subseteq S_2$ będą takie, że S_1 jest przedziałem w S_2, czyli $S_1 = S_2 \cap [a, b]$. Wtedy $H_\alpha^{S_1} = H_\alpha^{S_2} | S_1$, dla $\alpha < \varepsilon_0$.
$H_\alpha^{[a,b]} = H_\alpha^\omega | [a, b] = H_\alpha | [a, b]$.

Uwaga 2

Niech S będzie zbiorem wielkości $\omega^{\alpha+1}$, f funkcją o skończonej dziedzinie. Załóżmy, że $\min S = a_0 > 0$. Wtedy istnieje $a \in S$ oraz $S' \subseteq S$ takie, żę $\min S' = a$, S' jest wielkości ω^α oraz

$$\forall x < a_0 - 2(x \in \mathrm{dom} f \to f(x) < a \vee f(x) \geq \max S')$$

Uwagi pomocnicze 2

Uwaga 2

Niech S będzie zbiorem wielkości $\omega^{\alpha+1}$, f funkcją o skończonej dziedzinie. Załóżmy, że $\min S = a_0 > 0$. Wtedy istnieje $a \in S$ oraz $S' \subseteq S$ takie, żę $\min S' = a$, S' jest wielkości ω^α oraz

$$\forall x < a_0 - 2(x \in \mathrm{dom} f \rightarrow f(x) < a \vee f(x) \geq \max S')$$

Dowód:

Niech $S \subseteq \omega$ wielkości $\omega^{\alpha+1}$, $\min S > 0$. Oznaczmy $a_0 = \min S$, $b_0 = \max S$. Mamy $H^S_{\omega^{\alpha+1}}(a_0) = b_0$. Zatem $H^S_{\omega^\alpha \cdot a_0}(a_0) = b_0$. Lewa strona równa się $(H^S_{\omega^\alpha})^{(a_0)}(a_0)$ – a_0-krotnej iteracji funkcji $H^S_{\omega^\alpha}$. Niech $a_k = (H^S_{\omega^\alpha})^{(k)}(a_0)$, dla $k = 0, \ldots, a_0$. Mamy $a_0 < a_1 < \cdots < a_{a_0} \leq b_0$, ponieważ $a_0 > 0$, $\omega^\alpha > 0$.

Dowód uwagi 2 ciąg dalszy

Zauważmy, że obraz przedziału $[0, a_0 - 3]$ przy f ma co najwyżej $a_0 - 2$ elementy. Dla $j \geq 1$ wśród przedziałów $[a_j, a_{j+1})$ jest zatem taki, który nie zawiera wartości $f(x)$ dla $x < a_0 - 2$. Niech będzie to $[a_{j_0}, a_{j_0+1})$. Niech $a = a_{j_0}$, $S' = S \cap [a_{j_0}, a_{j_0+1}]$.

Mamy $H^{S'}_{\omega^\alpha}(a_{j_0}) = H^{S}_{\omega^\alpha}(a_{j_0}) = a_{j_0+1}$. Na mocy uwagi 1 wielkość S' wynosi ω^α. Jeżeli $x < a_0 - 2$ i $x \in \mathrm{dom} f$, to $f(x) \notin [a_{j_0}, a_{j_0+1})$, więc $f(x) < a_{j_0}$ lub $f(x) \geq a_{j_0+1} = \max S'$. Zatem a i S' spełniają żądane warunki.

Kluczowa uwaga

Uwaga 3

Jeżeli S jest zbiorem wielkości ω^α, $\min S > 0$ oraz f jest funkcją o skończonej dziedzinie, to istnieje $S' \subseteq S$ taki, że S' ma wielkość α, S' jest aproksymacją dla f oraz $\min S' = \min S$.

Dowód:

Stosujemy indukcję względem α.

Krok bazowy:

Niech $\alpha = 0$ i S wielkości $\omega^\alpha = 1$. Ustalmy funkcję f o kończonej dziedznie. Wtedy $S = \{a_0, a_1\}$ oraz $S' = \{a_0\}$ jest aproksymacją dla f.

Dowód uwagi 3 ciąg dalszy

Krok niegraniczny:
Załóżmy, że S jest wielkości $\omega^{\alpha+1}$ i f funkcja o skończonej dziedzinie. Niech $a_1 \in S$ i $S' \subseteq S$ otrzymane z uwagi 2, czyli S' wielkości ω^{α}, $\min S' = a_1$ oraz
$\forall x < a_1 - 2(x \in \mathrm{dom} f \to f(x) < a \vee f(x) \geq \max S')$. Na mocy

założenia indukcyjnego mamy $S'' \subseteq S'$ wielkości α taki, że $\min S'' = \min S' = a_1$ oraz S'' jest aproksymacją dla f. Pokażemy, że $\{a_0\} \cup S''$ jest szukaną aproksymacją dla f mocy $\alpha + 1$, gdzie $a_0 = \min S$.

Dowód uwagi 3 ciąg dalszy

Mamy $\min(\{a_0\} \cup S'') = a_0 = \min S$. Załóżmy, że $S'' = \{a_1, \ldots a_n\}$, wtedy mamy: $H_{\alpha+1}^{\{a_0\}\cup S''}(a_0) = H_{\alpha}^{\{a_0\}\cup S''}(H_1^{\{a_0\}\cup S''}(a_0)) =$

$H_{\alpha}^{\{a_0 \cup S''\}}(a_1) = H_{\alpha}^{S''}(a_1) = a_n$. Więc $\{a_0\} \cup S''$ jest wielkości $\alpha + 1$. Niech teraz $a \in \{a_0\} \cup S''$, $a < \max(\{a_0\} \cup S'')$, $x < a - 2$.

Jeśli $a = a_j$, dla $j \geq 1$, to $f(x) < a_{j+1}$ lub $f(x) \geq \max S''$. Jeżeli $a = a_0$, to $f(x) < a_1$ lub $f(x) \geq \max S''$. więc $\{a_0\} \cup S''$ jest szukaną aproksymacją f.

Dowód uwagi 3 ciąg dalszy

Krok graniczny:
Niech α graniczna i załóżmy, że dla $\beta < \alpha$ uwaga zachodzi. Niech S będzie wielkości ω^α, $a_0 = \min S$ i niech f ustalona. Wtedy S jest wielkości $\omega^{\{\alpha\}(a_0)}$ ponieważ $\max S = H^S_{\omega^\alpha}(a_0) = H^S_{\omega^{\{\alpha\}(a_0)}}(a_0)$.

Z założenia indukcyjnego mamy $S' \subseteq S$ wielkości $\{\alpha\}(a_0)$ taki, że $\min S' = a_0$ i S' jest aproksymacją f. Wtedy S' jest wielkości α ponieważ $H^S_\alpha(a_0) = H^{S'}_{\{\alpha\}(a_0)}(a_0) = \max S'$. Zatem S' ma żądane własności. Co kończy dowód.

Dowód Lematu 1

Niech $a, b \in \omega$, $a > 0$. Jeżeli $H_{\omega_n^k}(a) < b$, to:

$$\mathcal{N} \vDash A_n^k[I^{\mathcal{N}}(a, b)]$$

Dowód:

Załóżmy, że $a > 0$ i $H_{\omega_n^k}(a) < b$. Niech $S = [a, H_{\omega_n^k}(a)] \subseteq [a, b]$. Wtedy S jest wielkości ω_n^k. Ustalmy f. Na mocy uwagi 1 mamy $S' \subseteq S$ wielkości ω_{n-1}^k, który jest aproksymacją dla f. Iterując tę procedurę n razy dostajemy:

$$\forall f_1 \exists S_1 \subseteq [a, b] \forall f_2 \exists S_2 \subseteq S_1 \ldots \forall f_n \exists S_n \subseteq S_{n-1}$$
$$((\bigwedge_{i=1}^{n} S_i \text{ jest aproksymacją } f_i)$$
$$\wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} S_i \text{ jest wielkości } \omega_{n-i}^k \wedge (S_n \text{ jest wielkości } k)).$$

Zatem $A_n^k([a, b])$.

Lemat 2

Lemat 2

Niech f i F będą jak w założeniu twierdzenia Wainera (f dowodliwie całkowita w PA funkcja rekurencyjna, F Σ_1–formuła reprezentująca ją). Załóżmy, że dla każdej pary $n, k \in \omega$ mamy: $\mathcal{N} \models \exists x \exists y [A_n^k(I(x,y)) \wedge F(x,y)]$. Wtedy istnieje model $\mathcal{M}$ PA oraz $a, b \in |M|$ takie, że $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, $\mathcal{M} \models F[a,b]$ oraz dla dowolnych $n, k \in \omega$ $\mathcal{M} \models A_n^k[I^{\mathcal{M}}(a,b)]$.

Dowód:

Ustalmy $n, k \in \omega$. Mamy $\mathcal{N} \models \exists x \exists y (F(x,y) \wedge \bigwedge_{n',k' \leq n,k} A_{n'}^{k'}(I(x,y))$. Niech T następująca teoria w języku $PA \cup \{\underline{a}, \underline{b}\}$: $Th(\mathcal{N}) \cup \{F(\underline{a},\underline{b})\} \cup \{A_n^k(I(\underline{a},\underline{b})) : n, k \in \omega\}$. Ponieważ każdy skończony fragment teorii T ma model ($< \mathcal{N}; a, b >$, dla stosownie wybranych $a, b \in \omega$), to również T ma model $< \mathcal{M}; a, b >$. To kończy dowód.

Lemat 3

Lemat 3

Jeżeli $\mathcal{M} \models PA$, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, $a, b \in M$, $\mathcal{M}$ przeliczalny oraz $\mathcal{M} \models A_n^k[I^{\mathcal{M}}(a, b)]$ dla wszystkich $n, k \in \omega$, to istnieje odcinek $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$ taki, że $I \models PA$, $a \in I$ oraz $b \in M - I$.

Szkic dowodu lematu 3

Definicja

Niech $\mathcal{M} \models PA$ i niech $I \subseteq M$ odcinek w M. Mówimy, że I jest mocny w $\mathcal{M}$, jeżeli dla każdej funkcji $f : M \to M$ definiowalnej w $\mathcal{M}$ istnieje $e \in M - I$ takie, że dla $x \in I$ zachodzi $f(x) \in I$ lub $f(x) \geq e$ w modelu $\mathcal{M}$.

Szkic dowodu

Pokazujemy, że jeżeli $a, b \in M$ spełniają założenia lematu, to istnieje $I \subseteq M$ mocny w $\mathcal{M}$ taki, że $a \in I$ oraz $b \in M - I$. Następnie pokazujemy, że jeżeli odcinek jest mocny, to jest on uniwersum dla modelu PA i $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$.

Dowód twierdzenia Wainera

Dowód:

Niech f dowodliwie rekurencyjna w PA funkcja rekurencyjna oraz F Σ_1–formuła reprezentująca f. Przypuśćmy, że dla $n, k \in \omega$ istnieje $x \in \omega$ takie, że w modelu standardowym mamy $x > 0$ oraz $f(x) > H_{\omega_n^k(x)}$. Z lematu 1 otrzymujemy $\mathcal{N} \models \exists x \exists y [A_n^k(I(x,y)) \wedge F(x,y)]$. Na mocy lematu 2 otrzymujemy taki model $\mathcal{M}$ arytmetyki PA oraz $a, b \in M$, że $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models F(a,b)$ i dla dowolnych $m, k \in \omega$ $\mathcal{M} \models A_n^k[I^{\mathcal{M}}(a,b)]$. Ponieważ $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ zachodzi $\mathcal{M} \models \forall x \exists y F(x,y)$. Na mocy lematu 3 otrzymujemy odcinek $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$ taki, że $\mathcal{I} \models PA$, $a \in I$ oraz $b \in M - I$. Ponieważ $PA \vdash \forall x \exists y F(x,y)$, to $\mathcal{I} \models \exists y F[a/x]$. Niech $b' \in I$ takie, że $\mathcal{I} \models F(a,b')$. Ponieważ $F(x,y)$ jest Σ_1-formułą i $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$ mamy również $\mathcal{M} \models F(a,b')$. Ale $\mathcal{M} \models F(a,b)$ i $b \neq b'$ ponieważ $b \notin I$ i $b' \in I$. Jednak z założenia o dowodliwej całkowitości f mamy $\mathcal{M} \models \forall x \exists! y F(x,y)$. Sprzeczność.

Zofia Adamowicz, Paweł Zbierski
Logika Matematyczna.
str. 174–181.

Dziękuję za uwagę