Wokół twierdzenia Gödla o pełności logiki pierwszego rzędu

Marek Czarnecki

11 lipca 2010

Podczas II Konferencji Epistemologii Nauk Ścisłych w Królewcu w 1930 roku, Kurt Gödel zaprezentował dowód twierdzenia o pełności systemu aksjomatycznego logiki elementarnej wprowadzonego przez David Hilberta i Wilhelma Ackermanna w *Grundzüge der theoretischen Logik* [4], gdzie też problem pełności tego systemu został po raz pierwszy postawiony. Niemniej w sprawozdaniu ze wspomnianej konferencji nie znalazła się nawet wzmianka o wystąpieniu Gödla. Dlaczego referat Gödla przeszedł bez echa?

Jean van Heijenoort w komentarzu do artykułu Gödla opublikowanym w *From Frege to Gödel* [3] dopatruje się powodu takiego stanu rzeczy w semantycznym charakterze twierdzenia o pełności. Jego sformułowanie z *Grundzüge der theoretischen Logik* było następujące: *Każda prawomocna formuła logiki elementarnej jest dowodliwa*, gdzie *prawomocna* miało znaczyć tyle co *prawdziwa w każdej dziedzinie*. Powyższe twierdzenie łączy w sobie własności składniowe języka (dowodliwa) z własnościami semantycznymi (prawomocna). Zwróćmy uwagę na fakt, że przed pracą Tarskiego z 1933 roku [5] pojęcia semantyczne budziły wśród logików wiele zastrzeżeń. Wynikało to z faktu, że próby uogólniania wnioskowań semantycznych, znanych na przykład z algebry, natrafiały na problemy i prowadziły do antynomii. W szczególności nie istniało ścisłe pojęcie *prawdziwości w dziedzinie*. Posługiwano się co prawda pojęciem systemów (dziedzin), w które to 'czyniły' formuły prawdziwymi bądź fałszywymi, jednak jego użycia występowały na poziomie intuicji – problematyczne pozostawało pojęcie *dowolnego systemu*. Dlatego samo postawione przez Hilberta i Ackermanna zagadnienie wydaje się być pewnego rodzaju półnaukową hipotezą. Zatem przed Tarskim twierdzenie o pełności logiki elementarnej mogło być postrzegane w podobny sposób, jak w latach czterdziestych teza Churcha, a dowód Gödla jako agitacja, argument, nie zaś jako ścisłe rozumowanie – dowód na miarę oczekiwań ówczesnych logików.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że ówczesna logika znała już zagadnienie pełności. W 1926 roku Paul Bernays udowodnił pełność klasycznego rachunku zdań. Jednak w tym przypadku modele są bardzo prostymi obiektami – funkcjami ze zbioru zdań atomowych w $\{0, 1\}$, podczas gdy w przypadku logiki elementarnej mogą one być o wiele bardziej złożone. Ponadto, zdaniem van Heijenoorta, zagadnienie pełności logiki elementarnej, jako metatwierdzenie było o wiele mniej interesujące dla Hilberta i Ackermanna, niż własności wewnętrzne ich systemu, czy problem znalezienia ogólnej metody budowania dowodów formuł logiki elementarnej. Możliwe też, że semantyczny charakter twierdzenia o pełności sprawiał, że Hilbert i Ackermann nie zwyczajnie wyobrażali sobie, jak miałby wyglądać konkluzywny za nim argument.

W swoim dowodzie twierdzenia o pełności Gödel poświęca większość uwagi lematom dotyczącym składni, w tym między innymi dobrze już wówczas znanym twierdzeniom o preneksowej i Skolemowskiej postaci normalnej, wyjątkowo skrótowo przedstawiając argumenty semantyczne. W ten sposób pokazuje na przykład równoważność oryginalnego sformułowania pełności z *Grundzüge der theoretischen Logik* z dowodzoną przez siebie wersją:

Twierdzenie 1. *Dla dowolnej formuły α logiki elementarnej (bez identyczności) albo α jest obalalna (*refutable – *$\neg\alpha$ jest dowodliwa), albo α jest spełnialna (*satisfiable – *istnieje interpretacja, w której α jest prawdziwa).*

Pokazując każdą z implikacji trzeba zastosować warunek Tarskiego dla negacji[1], co Gödel czyni na poziomie intuicji, w przypadku implikacji, w której poprzednikiem jest twierdznie 1, oraz przyjmując za oczywistą drugą implikację. Na tym jednak nie kończą się przykłady zamiatania pod dywan wnioskowań semantycznych. Największe nagromadzenie przemilczanych argumentów semantycznych można znaleźć pod sam koniec dowodu. Aby jednak móc omówić ten fragment trzeba zarysować ideę całego dowodu. Najpierw należy pokazać, że każdą formułę logiki elementarnej można sprowadzić do postaci normalnej Skolema i otrzymana w ten sposób formuła jest spełnialna dokładnie wtedy, gdy spełnialna jest oryginalna formuła. Dla dowolnej formuły w postaci normalnej Skolema, czyli $\varphi = \forall\overline{x}\exists\overline{y}\, A(\overline{x}, \overline{y})$ można skonstruować ciąg formuł A_n, którego n–ty wyraz jest koniunkcją n kopii formuły A z podstawionymi w odpowiedni sposób zmiennymi w taki sposób, by przeliczyć wszystkie krotki zmiennych wiązanych przez kwantyfikatory ogólne, oraz by zmienne egzystencjalne w żadnym z podstawień nie powtarzały się, i by były różne od ogólnych. Taka konstrukcja gwarantuje nam,

[1] Zdanie $\neg\varphi$ jest prawdziwe w modelu M dokładnie wtedy, gdy zdanie φ jest nie jest prawdziwe w M.

że egzystencjalne domknięcie każdego A_n dowodliwie wynika z φ. Następnie tłumaczymy każdą formułę A_n na klasyczny rachunek zdań otrzymując ciąg B_n. Ponieważ klasyczny rachunek zdań jest pełny każde zdanie B_n jest spełnialne bądź odrzucalne. Jeżeli któreś ze zdań B_n jest odrzucalne, to istnieje dowód w logice elementarnej egzystencjalnego domknięcia A_n, a tym samym φ jest odrzucalne. Pozostaje więc do zbadania przypadek, gdy wszystkie B_n są spełnialne. Wtedy spełniające je wartościowania można przetłumaczyć na pewne skończone modele dla A_n – dla każdego i zmienną x_i tłumaczymy na liczbę i. Egzystencjalne domknięcie formuły A_n jest spełnialne, gdy istnieje wartościowanie spełniające B_n. W tym miejscu aż prosi się, by wprowadzić pojęcie wartościowania w modelu, jednak Gödel tego nie czyni. Następnie Gödel korzysta implicite z lematu Königa – każda z formuł A_n ma tylko skończenie wiele modeli[2] oraz każdy model dla A_{n+1} jest również modelem dla A_n (tu implicite wprowadzony warunek Tarskiego dla koniunkcji[3]), zatem musi istnieć ciąg modeli $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$ dla formuł $A_1, A_2, \ldots$. Ostatecznie model S (o uniwersum będącym liczbami naturalnymi) dla formuły φ otrzymujemy sumując ciąg modeli S_n. Następnie Gödel stwierdza, że jest oczywiste, że w S prawdziwe jest φ.

Jak wyglądać powinien dowód tego 'oczywistego' faktu? Przeprowadzimy rozumowanie w S przy założeniu nie wprost, że w S zdanie φ jest fałszywe. Wtedy na mocy warunku Tarskiego dla negacji w S prawdziwe jest zdanie $\neg\varphi = \neg\forall\overline{x}\exists\overline{y}A(\overline{x},\overline{y}) = \exists\overline{x}\forall\overline{y}\neg A(\overline{x},\overline{y})$. Na mocy warunku Tarskiego dla kwantyfikatora egzystencjalnego[4] istnieje ciąg liczb naturalnych $\overline{a}$ taki, że $\forall\overline{y}\neg A(\overline{a},\overline{y})$. Model S został skonstruowany w taki sposób, by prawdziwe były zdania $\exists\overline{y}A(\overline{c},\overline{y})$ dla dowolnej krotki $\overline{c}$[5]. Otrzymujemy sprzeczność – w S prawdziwe są zarówno $A(\overline{a},\overline{b})$, jak i $\neg A(\overline{a},\overline{b})$ dla pewnej krotki $\overline{b}$. Gdyby Gödel uzupełnił swój dowód o sformułowanie warunków prawdziwości dla negacji, koniunkcji i kwantyfikatora egzystencjalnego oraz rozpisał przemilczane argumenty semantyczne powołując się na te warunki, jego dowód byłby kompletny i wreszcie zasługiwałby na miano dowodu.

Swoboda z jaką Gödel używa argumentów semantycznych dziwi tym bardziej, że już w rok później w swojej najsłynniejszej pracy *Über formal unent-*

---

[2]Ponieważ rozważamy jedynie skończone modele (o uniwersach będących początkowymi segmentami liczb naturalnych) pochodzące od wartościowań spełniających B_n.

[3]Zdanie $\varphi \wedge \psi$ jest prawdziwe w modelu M dokładnie wtedy, gdy zdanie φ jest prawdziwe w M oraz zdanie ψ jest prawdziwe w M.

[4]Zdanie $\exists x\varphi(x)$ jest prawdziwe w modelu M dokładnie wtedy, gdy istnieje element e uniwersum modelu M taki, że w modelu M prawdziwe jest zdanie $\varphi(\tilde{e})$, gdzie $\tilde{e}$ jest nazwą elementu e.

[5]W ciągu A_n przeliczone zostały wszystkie krotki $\overline{x}$, te zaś tłumaczone były na krotki liczb naturalnych odpowiadających indeksom tych zmiennych.

scheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I jego podejście nich jest zgoła inne. We wstępie podaje intuicyjny, semantyczny argument za tym, że arytmetyka pierwszego rzędu jest niezupełna. Argumentację tę można by łatwo uzupełnić do pełnego dowodu, jednak Gödel tego nie czyni – tym razem traktuje ją jedynie jako szkic, prezentując następnie długi i skomplikowany, ale w pełni syntaktyczny dowód[6].

Wydaje się zatem, że pełności nie można było w ścisłym sensie dowieść w 1930 roku, a zarazem, że środowisko formalistów wierzyło, że podana przez Hilberta i Ackermanna aksjomatyka logiki elementarnej faktycznie pozwala dowodzić wszystkich tautologii, natomiast referat Gödla mógł utwierdzić ich w tej wierze. Z drugiej strony jakkolwiek doniosłym osiągnięciem był dowód pełności, sławę przyniosło Gödlowi dopiero twierdzenie o niezupełności arytmetyki pierwszego rzędu – twierdzenie, którego nikt[7] się wówczas nie spodziewał. Co więcej kontrowersje, jakie budziło twierdzenie o niezupełności sprawiły, że Gödel nie mógł sobie pozwolić w dowodzie na żadne niepewne kroki. Efekty były niezwykle doniosłe – 'przy okazji' Gödel musiał wymyślić arytmetyzację składni, lemat przekątniowy, funkcje pierwotnie rekurencyjne[8], funkcję β[9], czy pojęcie reprezentowalności relacji.

Z drugiej strony, ponieważ hipoteza pełności logiki pierwszego rzędu nie należała do najistotniejszych problemów ówczesnej logiki oraz nie wydawała się kontrowersyjna, Gödlowi mogły ujść na sucho argumenty semantyczne stosowane bez większych uzasadnień. Być może, gdyby Gödel był zmuszony pracować nad problemem równie wytrwale, co w przypadku twierdzenia o niezupełności semantyka zostałaby ujarzmiona już wtedy w 1930 roku.

Literatura

[1] K. Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, , Monatshefte für Mathematik und Physik 37*, Springer Wien, 1930, s. 349–360.

[6] Trzeba mieć na uwadze, że zupełność (*completeness* – teoria zupełna dla dowolnej formuły α dowodzi α, lub dowodzi $\neg\alpha$), w przeciwieństwie do pełności jest pojęciem czysto syntaktycznym, dlatego też czysto syntaktyczny dowód mógł istnieć, podczas gdy w przypadku pełności było to zwyczajnie niemożliwe.

[7] Albo co najwyżej nieliczni.

[8] Nazywał je po prostu funkcjami rekurencyjnymi. Była to historycznie pierwsza próba eksplikacji pojęcia funkcji obliczalnej.

[9] Dzięki niej można kodować skończone ciągi w języku z dodawaniem i mnożeniem, nie zaś jak w przypadku kodowań opartych na zasadniczym twierdzeniu arytmetyki, przy użyciu funkcji eksponencjalnej.

[2] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, *Monatshefte für Mathematik und Physik 38*, Springer Wien, 1931, s. 173–198.

[3] J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, 1967, s. 582–591.

[4] D. Hilbert, W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer-Verlag, 1928.

[5] A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Towarzystwo Naukowe Warszawskie, 1933.