Ciągły fragment rachunku μ

Marek Czarnecki

Wydział Filozofii i Socjologii
Uniwersytet Warszawski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Warszawa, 28 maja 2009

Motywacje

1. Rozważamy logiki wzbogacone o operator najmniejszego punktu stałego (modalny rachunek μ, LFP=FO+μ),

Motywacje

1. Rozważamy logiki wzbogacone o operator najmniejszego punktu stałego (modalny rachunek μ, LFP=FO+μ),
2. Ciągły fragment jest silnie powiązany z ciągłością w sensie Scotta,

Motywacje

1. Rozważamy logiki wzbogacone o operator najmniejszego punktu stałego (modalny rachunek μ, LFP=FO+μ),
2. Ciągły fragment jest silnie powiązany z ciągłością w sensie Scotta,
3. Ciągły fragment jest naturalnym rozszerzeniem PDL,

Motywacje

1. Rozważamy logiki wzbogacone o operator najmniejszego punktu stałego (modalny rachunek μ, LFP=FO+μ),
2. Ciągły fragment jest silnie powiązany z ciągłością w sensie Scotta,
3. Ciągły fragment jest naturalnym rozszerzeniem PDL,
4. Badanie relacji pomiędzy formułami ciągłymi, a konstruktywnymi – przybliżanie formuł konstruktywnych ciągłymi.

Contents

Składnia rachunku μ

Definicja

Prop – skończony zbiór zmiennych zdaniowych, Var – przeliczalny zbiór zmiennych.
Formuły rachunku μ definiujemy indukcyjnie:

$$\varphi \longrightarrow \mathrm{T} \mid p \mid x \mid \varphi \vee \varphi \mid \neg\varphi \mid \Diamond\varphi \mid \mu x.\varphi,$$

gdzie $p \in \mathrm{Prop}$, $x \in \mathrm{Var}$ oraz każde wystąpienie zmiennej x w $\mu x.\varphi$ poprzedzone jest parzystą ilością negacji.

Skróty notacyjne: $\varphi \wedge \psi$, $\Box\varphi$ oraz $\nu x.\varphi$ są skrótami dla odpowiednio $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, $\neg\Diamond\neg\varphi$ oraz $\neg\mu x.\neg\varphi[\neg x/x]$.

Modele Kripkego

Definicja

Ramą Kripkego nazywamy parę (M, R), gdzie M jest niepustym zbiorem, a $R \subseteq M^2$.

Modelem Kripkego nazywamy trójkę (M, R, V), gdzie (M, R) jest ramą Kripkego, a $V : \mathrm{Prop} \to \mathcal{P}(M)$ jest ewaluacją (valuation) zmiennych zdaniowych.

Kiedykolwiek zachodzi sRt, wtedy t nazwiemy następnikiem s. Przez $R(s)$ oznaczać będziemy zbiór następników s.

Semantyka Kripkego

Dla dowolnej formuły φ rachunku μ, modelu $\mathcal{M} = (M, R, V)$ oraz wartościowania (assignment) $\tau : \mathrm{Var} \to \mathcal{P}(M)$ definiujemy $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau}$ – podzbiór zbioru M (zbiór punktów, w których φ jest prawdziwe).

- $\varphi = \mathrm{T}$, to $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau} = M$,
- $\varphi = p$, to $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau} = V(p)$,
- $\varphi = x$, to $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau} = \tau(x)$,
- $\varphi = \theta_1 \vee \theta_2$, to $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau} = [\![\theta_1]\!]_{\mathcal{M},\tau} \cup [\![\theta_2]\!]_{\mathcal{M},\tau}$,
- $\varphi = \neg\theta$, to $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau} = M - [\![\theta]\!]_{\mathcal{M},\tau}$,
- $\varphi = \Diamond\theta$, to $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau} = \{t \in M \mid \exists\, s \in M\, (tRs \wedge s \in [\![\theta]\!]_{\mathcal{M},\tau})\}$,
- $\varphi = \mu x.\theta$, to $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau} = \bigcap\{A \subseteq M \mid [\![\theta]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=A]} \subseteq A\}$, gdzie $\tau[x := A]$ to wartościowanie τ' takie, że $\tau'(x) = A$ oraz $\tau'(y) = \tau(y)$, dla $x \neq y$.

Semantyka cd. – wyjaśnienia

Uwaga

$[\![\mu x.\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau}$ jest najmniejszym punktem stałym odwzorowania $\varphi_x : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ zdefiniowanego jako $\varphi_x(A) = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau[x:=A]}$, dla $A \subseteq M$.

Podobnie definiujemy odwzorowanie $\varphi_p : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ jako $\varphi_p(A) = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}[p:=A],\tau}$, gdzie $\mathcal{M}[p := A] = (M, R, V')$ to model taki, że $V'(p) = A$ oraz $V'(q) = V(q)$, dla $q \neq p$.

Konwencje

Konwencje notacyjne

Dla $s \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},\tau}$ piszemy $\mathcal{M}, s \Vdash_\tau \varphi$ i powiemy, że φ jest prawdziwe w s przy wartościowaniu τ.

Dla zdań pomijamy wartościowanie τ.

Piszemy $\varphi \models \psi$, gdy dla dowolnych modeli $\mathcal{M}$, punktów $s \in |\mathcal{M}|$ z $\mathcal{M}, s \Vdash \varphi$ wynika $\mathcal{M}, s \Vdash \psi$.

Definicja

Formuła φ jest monotoniczna względem p jeżeli dla dowolnych modeli $\mathcal{M} = (M, R, V)$ oraz dowolnych wartościowań τ i podzbiorów $A, B \subseteq M$ spełniających $A \subseteq B$ zachodzi $\varphi_p(A) \subseteq \varphi_p(B)$.

Semantyka przez gry

Gra semantyczna

Niech $\mathcal{M} = (M, R, V)$ będzie modelem, $s \in M$, τ będzie wartościowaniem oraz φ będzie formułą rachunku μ.
Gra semantyczna dla $\mathcal{M}$, s, τ, φ rozgrywa się między dwoma graczami: Adamem i Ewą. Jest to uogólnienie standardowej gry semantycznej dla logiki modalnej.
Pozycje w grze to czwórki: (t, ψ, Z, i), gdzie $t \in M$, ψ formuła, $Z \subseteq_{fin} \mathrm{Var} \times Form_\mu$ oraz $i \in \{0, 1\}$. Pozycje w których $i = 0$ są standardowe, natomiast te z $i = 1$ oznaczają, że gracze „zamienili się rolami" (przeszliśmy nieparzyście wiele razy przez negację).
Stan początkowy to $(s, \varphi, \varnothing, 0)$.

Definicja

Powiemy, że $y \in \mathrm{Var}$ jest bardziej na zewnątrz od $x \in \mathrm{Var}$ w formule φ, gdy φ ma podformułę postaci $\mu x.\chi(x, y)$ lub $\nu x.\chi(x, y)$ i y jest wolna w χ.

Gra semantyczna dla rachunku μ

- $(s, \mathrm{T}, Z, 0)$ – wygrywa Ewa,
- $(s, x, Z, 0)$ oraz x nie została związana – jeśli $s \in \tau(x)$ wygrywa Ewa, wpp wygrywa Adam,
- $(s, p, Z, 0)$ – jeśli $s \in V(p)$ wygrywa Ewa, wpp wygrywa Adam,
- $(s, \theta_1 \vee \theta_2, Z, 0)$ – Ewa wybiera pomiędzy $(s, \theta_1, Z, 0)$, a $(s, \theta_2, Z, 0)$,
- $(s, \theta_1 \wedge \theta_2, Z, 0)$ – Adam wybiera pomiędzy $(s, \theta_1, Z, 0)$, a $(s, \theta_2, Z, 0)$,
- $(s, \neg\psi, Z, 0)$ – Ewa wybiera $(s, \psi, Z, 1)$,
- $(s, \Diamond\psi, Z, 0)$ – Ewa wybiera $(t, \psi, Z, 0)$, dla t – dowolnego następnika s,
- $(s, \Box\psi, Z, 0)$ – Adam wybiera $(t, \psi, Z, 0)$, dla t – dowolnego następnika s,
- $(s, \nu x.\psi, Z, 0)$ – Ewa wybiera $(s, \psi, Z \cup \{(x, \psi)\}, 0)$,
- $(s, \mu x.\psi, Z, 0)$ – Adam wybiera $(s, \psi, Z \cup \{(x, \psi)\}, 0)$,
- $(s, x, Z, 0)$ oraz $(x, \psi) \in Z$ – Ewa wybiera $(s, \psi, Z, 0)$.

Gra semantyczne dla rachunku μ (2)

W pozycjach $(s, \psi, Z, 1)$ wszystkie przejścia się dualizują (zamieniamy wszędzie Adam na Ewa i na odwrót).

Warunek zwycięstwa

W grze nieskończonej wygrywa Ewa, gdy najbardziej zewnętrzna ze zmiennych występujących w rozgrywce nieskończenie wiele razy jest związana operatorem ν.

Twierdzenie

$\mathcal{M}, s \Vdash_{\tau} \varphi$ dokładnie wtedy, gdy Ewa ma strategię wygrywającą w odpowiedniej grze semantycznej.

Własności rachunku μ

Uwaga

Prawdziwość zdania w punkcie s zależy jedynie od punktów dostępnych z s (być może w większej ilości kroków). Fakt ten motywuje do wprowadzenia następującej definicji podmodelu generowanego przez s.

Definicja

Niech $\mathcal{M} = (M, R, V)$ będzie modelem. Podzbiór $N \subseteq M$ jest domknięty w górę, gdy dla dowolnych $s, t \in M$ jeżeli sRt oraz $s \in N$, to $t \in N$.
Model $\mathcal{N} = (N, S, U)$ jest podmodelem generowanym w $\mathcal{M}$ jeżeli $N \subseteq M$ jest domknięty w górę, $S = R \cap (N \times N)$ oraz dla każdego $p \in \mathrm{Prop}$ $U(p) = V(p) \cap N$. Jeżeli $N' \subseteq M$, to powiemy, że $\mathcal{N} = (N, S, U)$ jest podmodelem generowanym przez N' jeżeli $\mathcal{N}$ jest podmodelem generowanym w $\mathcal{M}$ oraz N jest najmniejszym domkniętym w górę zbiorem zawierającym N'.

Własności rachunku μ cd.

Definicja

Punkt s jest korzeniem modelu $\mathcal{M} = (M, R, V)$, gdy dla dowolnego $t \neq s$ istnieje ścieżka od s do t (w sensie relacji R). Model $\mathcal{M} = (M, R, V)$ nazwiemy ω–rozszerzonym jeżeli jest drzewem takim, że dla dowolnego $s \in M$ oraz dowolnego jego następnika t istnieje nieskończenie wiele różnych bisymilarnych następników s.

Twierdzenie

Niech $\mathcal{M} = (M, R, V)$ będzie modelem i niech $s \in M$. Istnieje ω–rozszerzony model $\mathcal{M}' = (M', R', V')$ taki, że s oraz korzeń $s' \in M'$ są bisymilarne. W szczególności dla dowolnego zdania φ rachunku μ $\mathcal{M}, s \Vdash \varphi$ dokładnie wtedy, gdy $\mathcal{M}', s' \Vdash \varphi$.

μ automaty, μ gry

Definicja

μ–automat $\mathbb{A}$ nad skończonym alfabetem Σ to krotka (Q, q_0, δ, Ω), gdzie Q jest skończony zbiór stanów, $q_0 \in Q$ jest stanem początkowym, $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}\mathcal{P}(Q)$ jest funkcją przejścia oraz $\Omega : Q \to \mathbb{N}$ jest funkcją parzystości.

Dla modelu $\mathcal{M} = (M, R, V)$ wraz z etykietowaniem $L : M \to \Sigma$ $(L : M \to \mathcal{P}(\mathrm{Prop}))$ oraz punktu $s \in M$ $\mathbb{A}$–gra w $\mathcal{M}$ z pozycją startową (s, q_0) rozgrywa się pomiędzy dwoma graczami: Duplikatorem i Spoilerem.

μ gry – przebieg rozgrywki

Rozgrywka

W pozycji (t, q) ruch wykonuje Duplicator:

- wybiera *oznaczenie* $m : Q \to \mathcal{P}\{u : tRu\}$, gdy $(u \in m(q))$ powiemy, że u jest oznaczone przez q,
- wybiera *opis* D z $\delta(q, L(t))$,
- m i D muszą spełniać:
  - Gdy $q' \in D$, istnieje u taki, że tRu oznaczony przez q',
  - Gdy tRu, istnieje $q' \in D$ taki, że u jest oznaczone przez q'.

Następnie Spoiler wybiera (u, q') takie, że $t \in m(q')$.
Każdy z graczy wygrywa, gdy przeciwnik nie może wykonać ruchu.
W nieskończonych rozgrywkach $(s, q_0), (s_1, q_1), \ldots$ wygrywa Duplicator, gdy $\liminf_i \Omega(q_i)$ jest parzyste.

Definicja

Powiemy, że automat $\mathbb{A}$ akceptuje $(\mathcal{M}, s)$, gdy Duplicator ma strategię wygrywającą w $\mathbb{A}$–grze w $\mathcal{M}$ rozpoczynającej się w pozycji (s, q_0).

Po co nam μ automaty i μ gry?

Twierdzenie

Dla dowolnego μ–automatu $\mathbb{A}$ (nad $\mathcal{P}(\mathrm{Prop})$) istnieje zdanie $\varphi_{\mathbb{A}}$ takie, że dla dowolnych modeli $\mathcal{M}$ oraz punktów $s \in \mathcal{M}$ $\mathbb{A}$ akceptuje $(\mathcal{M}, s)$ dokładnie wtedy, gdy $\mathcal{M}, s \Vdash \varphi_{\mathbb{A}}$. Dla dowolnego zdania φ istnieje μ–automat $\mathbb{A}_\varphi$ taki, że dla dowolnych modeli $\mathcal{M}$ oraz punktów $s \in \mathcal{M}$ $\mathbb{A}_\varphi$ akceptuje $(\mathcal{M}, s)$ dokładnie wtedy, gdy $\mathcal{M}, s \Vdash \varphi$.

Contents

Definicja ciągłego fragmentu

Definicja

Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p formuła φ jest ciągła względem p, gdy dla dowolnego modelu $\mathcal{M} = (M, R, V)$, punktu $s \in M$ oraz wartościowania τ zachodzi:
$\mathcal{M}, s \Vdash_\tau \varphi$ dokładnie wtedy, gdy istnieje skończony $F \subseteq V(p)$ taki, że $\mathcal{M}[p := F], s \Vdash_\tau \varphi$.

Analogicznie definiujemy ciągłość względem zmiennej:

Formuła φ jest ciągła względem zmiennej x, gdy dla dowolnego modelu $\mathcal{M} = (M, R, V)$, punktu $s \in M$ oraz wartościowania τ zachodzi: $\mathcal{M}, s \Vdash_\tau \varphi$ dokładnie wtedy, gdy istnieje skończony $F \subseteq \tau(x)$ taki, że $\mathcal{M}, s \Vdash_{\tau[x:=F]} \varphi$.

Uwaga

Formuła jest ciągła względem $p \in \mathrm{Prop}$, gdy jest monotoniczna względem p oraz by ustalić prawdziwość φ w punkcie dowolnego modelu potrzebujemy jedynie informacji o skończenie wielu punktach, w których zachodzi p.

Ciągłość w sensie Scotta

Definicja

Niech $\mathcal{M} = (M, R, V)$ będzie modelem. Rodzinę $\mathcal{F}$ podzbiorów M nazwiemy skierowaną, jeżeli dla dowolnych $U_1, U_2 \in \mathcal{F}$ istnieje $U \in \mathcal{F}$ taki, że $U_1 \cup U_2 \subseteq U$.

Zbiór otwarty w topologii Scotta w $\mathcal{P}(M)$ to rodzina $\mathcal{O}$ podzbiorów M domknięta na nadzbiory oraz taka, że dla dowolnej skierowanej rodziny $\mathcal{F}$ takiej, że $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{O}$ przecięcie $\mathcal{F} \cap \mathcal{O}$ jest niepuste.

Odwzorowanie $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ jest ciągłe w sensie Scotta, gdy dla dowolnego zbioru otwartego w sensie Scotta $\mathcal{O}$ zbiór $f^{-1}[\mathcal{O}] = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{O}\}$ jest otwarty w sensie Scotta.

Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p zdanie φ jest ciągłe w sensie Scotta względem p, gdy dla dowolnego modelu $\mathcal{M} = (M, R, V)$ odwzorowanie $\varphi_p : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ jest ciągłe w sensie Scotta.

Ciągłość w sensie Scotta cd.

Fakt

Odwzorowanie f jest ciągłe w sensie Scotta dokładnie wtedy, gdy zachowuje sumy skierowane. Czyli dla dowolnej rodziny skierowanej $\mathcal{F}$ zachodzi $f(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup f[\mathcal{F}]$, gdzie $f[\mathcal{F}] = \{f(U) : U \in \mathcal{F}\}$.

Ciągłość w sensie Scotta = ciągłość

Twierdzenie

Zdanie jest ciągłe względem p dokładnie wtedy, gdy jest ciągłe w sensie Scotta względem p.

Dowód:

$(\Rightarrow)$

Pokazujemy, że dla φ ciągłego wzgędem p φ_p zachowuje sumy skierowane. Jedna inkluzja wynika z monotoniczności φ_p. Dowodząc drugiej inkluzji korzystamy z ciągłości φ względem p, by wybrać skończony podzbiór $F \in \bigcup \mathcal{F}$ determinujący prawdziwość φ. Ponieważ $\mathcal{F}$ skierowana istnieje $U \in \mathcal{F}$ takie, że $F \subseteq U$. Z monotoniczności $\mathcal{M}[p := F], s \Vdash \varphi$ pociąga $\mathcal{M}[p := U], s \Vdash \varphi$, a ponieważ $U \in \mathcal{F}$, to $\mathcal{M}[p := \bigcup \mathcal{F}], s \Vdash \varphi$.

Dowód cd.

($\Leftarrow$)

Monotoniczność otrzymujemy biorąc dla dowolnych $U \subseteq U'$ rodzinę skierowaną $\mathcal{F} = \{U, U'\}$ – na mocy zachowywania przez φ_p sum skierowanych. Pozostaje, dla $\mathcal{M}, s \Vdash \varphi$ ($s \in \varphi_p(V(P))$) znaleźć skończony podzbiór $F \subseteq V(p)$ taki, że $\mathcal{M}[p := F], s \Vdash \varphi$.
Bierzemy rodzinę skierowaną $\mathcal{F} = \{F \subseteq V(p) \,:\, F - skoczony\}$ i korzystamy z faktu, że φ_p zachowuje sumy skierowane. Mamy $\varphi_p(V(p)) = \varphi_p(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup \varphi_p[\mathcal{F}]$. Zatem istnieje $F \in \mathcal{F}$ takie, że $s \in \varphi_p(F)$.

Konstruktywne formuły

Definicja

Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p zdanie φ jest konstruktywne względem p, gdy dla dowolnych modeli $\mathcal{M} = (M, R, V)$ najmniejszy punkt stały odwzorowania $\varphi_p : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ jest równy $\bigcup_{i=0}^{\infty}\{\varphi_p^i(\varnothing)\}$, gdzie $\varphi_p^0 = \varphi_p$ oraz $\varphi_p^{i+1} = \varphi_p \circ \varphi_p^i$.

Zdania ciągłe są konstruktywne

Twierdzenie

Jeżeli zdanie φ jest ciągłe względem p, to jest konstruktywne względem p.

Dowód:

Rozważamy rodzinę $\{\varphi_p^i(\varnothing)\}_{i\in\mathbb{N}}$. Chcemy, by $\varphi_p(\bigcup\mathcal{F}) = \bigcup\mathcal{F}$. Zauważmy, że $\mathcal{F}$ jest skierowana. Zatem $\varphi_p(\bigcup\mathcal{F}) = \bigcup\varphi_p[\mathcal{F}]$. Oczywiście $\bigcup\varphi_p[\mathcal{F}] = \bigcup\mathcal{F}$.

Przykłady zdań nieciągłych, a konstruktywnych

Przykład 1.

$\varphi = \Box p \wedge \Box\Box \perp$. φ jest prawdziwe w punktach o głębokości mniejszej niż 2. Mamy $\varphi_p^2(\emptyset) = \varphi_p^3(\emptyset)$. Jednak model może mieć nieskończone rozgałęzienie – φ nie jest ciągła względem p.

Przykład 2.

$\psi = \nu x.(p \wedge \Diamond x)$. ψ jest prawdziwe w punktach, z których istnieje nieskończona ścieżka złożona z punktów, w których p jest prawdziwe. Nie jest ciągłe względem p, natomiast dla wszystkich modeli $\psi_p(\emptyset) = \emptyset$.

Contents

Charakteryzacja składniowa ciągłego fragmentu

Definicja

Niech $P \subseteq \mathrm{Prop}$ oraz $X \subseteq \mathrm{Var}$. Klasę formuł $\mathrm{CF}(P \cup X)$ definiujemy indukcyjnie:

$$\varphi \longrightarrow \mathrm{T} \mid p \mid x \mid \psi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \Diamond\varphi \mid \mu y.\chi$$

gdzie $p \in P$, $x \in X$, ψ jest formułą rachunku μ w której nie występują zmienne z $P \cup X$ oraz χ należy do $\mathrm{CF}(P \cup X \cup \{y\})$.

Fakt

Klasy formuł $\mathrm{CF}(P \cup X)$ są domknięte na złożenia, to znaczy: dla dowolnej formuły $\varphi \in \mathrm{CF}(P \cup X \cup \{p\})$ oraz formuły $\psi \in \mathrm{CF}(P \cup X)$ zachodzi $\varphi[\psi/p] \in \mathrm{CF}(P \cup X)$.

Zdania z $\mathrm{CF}(p)$ są ciągłe względem p

Dowód:

Indukcja ze względu na budowę φ – pokazujemy, że dla dowolnych $P \subseteq \mathrm{Prop}$ oraz $X \subseteq \mathrm{Var}$ jeżeli $\varphi \in \mathrm{CF}(P \cup X)$, to φ ciągła względem wszystkich $p \in P$ oraz $x \in X$.
Krok indukcyjny: $\varphi = \mu y.\chi$, gdzie $\chi \in \mathrm{CF}(P \cup X \cup \{y\})$, $p \in P$.
Pokazując monotoniczność φ_p korzystamy jedynie z monotoniczności χ_y.
Pozostaje znaleźć skończony $F \subseteq V(p)$ determinujący prawdziwość φ. Rozważamy $\mathcal{F}$ – rodzinę skończonych podzbiorów $V(p)$.

Dowód cd.

Niech $\chi_y^F(A) = [\![\chi]\!]_{\mathcal{M}[p:=F],\tau[y:=A]}$ i niech $f(F)$ będzie najmniejszym punktem stałym $\chi_y^F(A)$. Przy założeniu, że $\mathcal{M}, s \Vdash_\tau \mu y.\chi$ szukamy $F \in \mathcal{F}$ takiego, że $s \in f(F)$. Weźmy $\mathcal{G} = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$. $\mathcal{G}$ jest rodziną skierowaną. Wystarczy pokazać, że $\chi_y(\bigcup \mathcal{G}) = \bigcup \chi_y(\mathcal{G})$. Pokazujemy to korzystając z założenia indukcyjnego o ciągłości χ względem y oraz p.

$\mathrm{CF}(p) \approx$ formuły ciągłe względem p.

Twierdzenie

Zdanie φ jest ciągłe względem p dokładnie wtedy, gdy jest równoważne zdaniu z $\mathrm{CF}(p)$.

Dowód:

Wystarczy pokazać implikację w prawą stronę. Niech φ będzie ciągłe względem p. Szukamy $\chi \in \mathrm{CF}(p)$ równoważnego φ. Będziemy konstruować skończony zbiór $\Pi \subseteq \mathrm{CF}(p)$ taki, że:

$$\varphi \equiv \bigvee \{\psi : \psi \in \Pi \textit{ oraz } \psi \models \varphi\} \equiv_{df} \chi$$

Zbiór Π budujemy przy pomocy automatów o co najwyżej k stanach (k zależy od φ).

Do ilu–stanowych automatów możemy się ograniczyć?

dowód cd.

Niech $\mathbb{A} = (Q, q_0, \delta, \omega)$ będzie μ–automatem związanym ze zdaniem φ. Dla $q \in Q$ niech φ_q będzie zdaniem otrzymanym z $\mathbb{A}$ przez zamianę stanu początkowego z q_0 na q. Definiujemy następujący zbiór zdań *Sort*0:

$$\bigwedge\{p' : p' \in \mathrm{Prop}-\{p\},\ p' \in \sigma\} \wedge \bigwedge\{\neg p' : p' \in \mathrm{Prop}-\{p\},\ p' \notin \sigma\}$$

dla $\sigma \subseteq \mathrm{Prop} - \{p\}$. Dla dowolnego punktu $s \in M$ w *Sort*0 istnieje dokładnie jedna formuła prawdziwa w s.

Do ilu–stanowych automatów możemy się ograniczyć? (2)

dowód cd.

Następnie definiujemy zbiór zdań $Sort1$:

$$\bigwedge\{\varphi_q[\perp/p] \,:\, q \in S]\} \wedge \bigwedge\{\neg\varphi_q[\perp/p] \,:\, q \notin S\}$$

dla $S \subseteq Q$.
Wreszcie $Sort2$ to zbiór zdań postaci $\alpha \wedge \nabla\Psi$, dla $\alpha \in Sort0$ oraz $\Psi \subseteq Sort1$, natomiast $\nabla X = \bigwedge\{\Diamond\varphi \,:\, \varphi \in X\} \wedge \Box \bigvee X$.
Podobnie jak w przypadku $Sort0$ w $Sort1$ oraz w $Sort2$ w dowolnym modelu i punkcie s jest dokładnie jedno prawdziwe w s zdanie z $Sort1$ i jedno z $Sort2$.
Zauważmy, że $Sort0$, $Sort1$, $Sort2$ są zbiorami zdań nie zawierających p.

Do ilu–stanowych automatów możemy się ograniczyć? (3)

dowód cd.

Wreszcie definiujemy Π jako zbiór zdań z $\mathrm{CF}(p)$ odpowiadających μ–automatom o co najwyżej $|Sort2| \cdot 2^{|Q|+1}$. Ponieważ automatów tych jest skończenie wiele, Π jest skończony.

Pozostaje pokazać, że $\varphi \equiv \bigvee\{\psi \ : \ \psi \in \Pi \, oraz \, \psi \models \varphi\}$. Wynikanie w lewo jest oczywiste.

$\varphi \Rightarrow \bigvee\{\psi : \psi \in \Pi \mathit{\ oraz\ } \psi \models \varphi\}$

Załóżmy, że dla pewnego modelu $\mathcal{M} = (M, R, V)$ i punktu $s \in M$ zachodzi $\mathcal{M}, s \Vdash \varphi$. Szukamy $\psi \in \Pi$ takiego, że $\psi \models \varphi$ oraz $\mathcal{M}, s \Vdash \psi$. Dokładniej chcemy skonstruować automat o co najwyżej $|Sort2| \cdot 2^{|Q|+1}$ stanach $\mathbb{A}'$ odpowiadający formule z $\mathrm{CF}(p)$ taki, że $\mathbb{A}'$ akceptuje $(\mathcal{M}, s)$, oraz $\mathbb{A}' \Vdash \mathbb{A}$, czyli dla dowolnych $\mathcal{M}'$, $s' \in \mathcal{M}$ jeżeli $\mathbb{A}'$ akceptuje $(\mathcal{M}', s')$, to $\mathbb{A}$ też.

Konstrukcja $\mathbb{A}'$

Możemy założyć, że $\mathcal{M}$ jest ω–rozszerzonym drzewem o korzeniu s. Ponieważ, φ jest ciągłe względem p istnieje skończony podzbiór $F \subseteq V(p)$ takie, że $\mathcal{M}[p := F], s \Vdash \varphi$. Weźmy T namniejszy domknięty w dół nadzbiór F. Chcemy, by zbiorem stanów $\mathbb{A}'$ był $T \cup \{a_T\}$, jednak zbiór ten może mieć za dużą moc. Musimy zatem wyekstrahować z każdego punktu z T potrzebną nam informację i utożsamić te punkty, które niosą te same informacje.

Konstrukcja $\mathbb{A}'$ (2)

Dla $t \in \mathcal{M}[p := F]$:

- $s2(t)$ – jedyne zdanie z $Sort2$ prawdziwe w t,
- $col(t)$ – kolor t: wynosi 1 gdy $t \in F$ i 0 wpp,
- $Q(t) = \{q \in Q \ : \ \mathcal{M}[p := F], t \Vdash \varphi_q\}$,
- $r(t)$ – $(s2(t), Q(t), col(t))$, gdy $t \in T$ oraz a_T wpp.

- $\mathbb{A}' = (Q', q_0', \delta', \Omega')$ to μ–automat nad słownikiem $Sort2 \times \{0, 1\}$,
- $Q' = \{r(t) \ : \ t \in T\} \cup \{a_T\}$,
- $q_0' = r(s)$,

Funkcja przejścia i parzystości $\mathbb{A}'$

$$\delta'(q',(\sigma,i)) = \begin{cases} \{r[R(u)] \,:\, u \in T \; i \; r(u) = r(t)\} & gdy\; q' = r(t), \\ & \sigma = s2(t),\; i = col(t) \\ \{\{a_T\},\varnothing\} & q' = a_T \\ \varnothing & wpp. \end{cases}$$

$\Omega'(a_T) = 0$, $\Omega'(q') = 1$, dla $q' \neq a_T$.
Zatem aby Duplicator wygrał nieskończoną rozgrywkę musi dojść do a_T i tam już pozostać, w przeciwnym wypadku przegrywa.

Następnie automoat $\mathbb{A}'$ tłumaczymy na zdanie ψ, które ma być równoważne formule z Π. Musimy się upewnić, by otrzymana z $\mathbb{A}'$ formuła nie posiadała p ani żadnej z zmiennej w zasięgu operatora $\Box$ – w tym celu definiuje się odpowiednie jej tłumaczenie (jest ono podane eksplicite, jednak dowód poprawności jest koszmarnie długi).

$\mathcal{M}, s \Vdash \psi$ i $\psi \models \varphi$

Dla $\mathcal{M}, s \Vdash \varphi$ indukcyjnie definiuje się strategię wygrywającą dla Duplikatora w $\mathbb{A}'$ grze.

Dla $\psi \models \varphi$ pokazujemy w jaki sposób ze zbudować strategię wygrywającą Duplikatora w $\mathbb{A}$ grze, korzystając ze stategii uzyskanej wyżej, dla $\mathbb{A}'$ gry.

Rozstrzygalność przynależności do ciągłego fragmentu

Twierdzenie

Rozsztrzygalny jest problem, czy dana formuła jest ciągła względem p.

Dowód:

Ustalmy p. Korzystając z dowodu poprzedniego twierdzenia wystarczy obliczyć zbiór Π odpowiadający automatom o co najwyżej $|Sort2| \cdot 2^{|Q|+1}$ stanach. Następnie znajdujemy wszystkie jego podzbiory Ψ i sprawdzać czy $\varphi \equiv \bigvee \Psi$. Ponieważ rachunek μ jest skończenie aksjomatyzowalny i ma własność skończonych modeli można rozstrzygać czy φ jest równoważne $\bigvee \Psi$.

Złożoność algorytmu rozstrzygania

$4EXPTIME$.

Podsumowanie

- Można efektywnie i bezstratnie tłumaczyć formuły rachunku μ na automaty i na odwrót,

Podsumowanie

- Można efektywnie i bezstratnie tłumaczyć formuły rachunku μ na automaty i na odwrót,
- Pojęcie ciągłości w rachunku μ pokrywa się z pojęciem ciągłości w sensie Scotta,

Podsumowanie

- Można efektywnie i bezstratnie tłumaczyć formuły rachunku μ na automaty i na odwrót,
- Pojęcie ciągłości w rachunku μ pokrywa się z pojęciem ciągłości w sensie Scotta,
- Istnieje charakterystyka składniowa ciągłego fragmentu rachunku μ,

Podsumowanie

- Można efektywnie i bezstratnie tłumaczyć formuły rachunku μ na automaty i na odwrót,
- Pojęcie ciągłości w rachunku μ pokrywa się z pojęciem ciągłości w sensie Scotta,
- Istnieje charakterystyka składniowa ciągłego fragmentu rachunku μ,
- Rozstrzygalny jest problem, czy zdanie jest ciągłe,

Podsumowanie

- Można efektywnie i bezstratnie tłumaczyć formuły rachunku μ na automaty i na odwrót,
- Pojęcie ciągłości w rachunku μ pokrywa się z pojęciem ciągłości w sensie Scotta,
- Istnieje charakterystyka składniowa ciągłego fragmentu rachunku μ,
- Rozstrzygalny jest problem, czy zdanie jest ciągłe,
- Każde zdanie ciągłe jest konstruktywne, ale nie na odwrót.

Problemy otwarte i prawie zamknięte:

- Czy dla dowolnej formuły konstruktywnej (względem p) ψ istnieje ciągła φ taka, że $\mu p.\varphi \equiv \mu p.\psi$?

Problemy otwarte i prawie zamknięte:

- Czy dla dowolnej formuły konstruktywnej (względem p) ψ istnieje ciągła φ taka, że $\mu p.\varphi \equiv \mu p.\psi$?
- Czy rozstrzygalny jest problem konstruktywności formuły?

Problemy otwarte i prawie zamknięte:

- Czy dla dowolnej formuły konstruktywnej (względem p) ψ istnieje ciągła φ taka, że $\mu p.\varphi \equiv \mu p.\psi$?
- Czy rozstrzygalny jest problem konstruktywności formuły?
- Czy konstrukcję automatu $\mathbb{A}'$ z głównego twierdzenia można uniezależnić od modeli i punktów (aby otrzymać niższe górne ograniczenie na złożoność algorytmu rozstrzygającego przynależność do ciągłego fragmentu?

G. Fontaine
Continuous fragment of the μ–calculus.
CSL 2008: 139–153.

D. Niwiński
Mu-calculus via games (extended abstract).
CSL 2002: 27–43.

D. Niwiński, A. Arnold
Rudiments of mu-calculus.
North Holland 2001.

Dziękuję za uwagę