Liczby porządkowe

Marek Czarnecki

15 kwietnia 2010

1 Wstęp i definicje

- Georg Cantor - 1897 - liczby porządkowe jako klasy abstrakcji izomorfizmów zbiorów dobrze uporządkowanych
- John von Neumann - 1925 - konstrukcja liczb porządkowych

Definicja 1. *Parę* $(X, \leq)$ *nazywamy dobrym porządkiem, gdy relacja* $\leq \subseteq X^2$ *jest:*

1. *Zwrotna* $(\forall x \in X\, x \leq x)$*,*
2. *Przechodnia* $(\forall x, y, z \in X\, (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z)$*,*
3. *Antysymetryczna* $(\forall x, y \in X\, (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y)$*,*
4. *"Dobra"*$(\forall Y \subseteq X\, (Y \neq \varnothing \Rightarrow \exists m \in Y \forall x \in Y\, m \leq x))$*.*

Warunek 4) pociąga za sobą zupełność porządku i jest równoważny stwierdzeniu, że w X *nie istnieje nieskończony ciąg malejący.*

Ostrą nierówność tego typu (przeciwzwrotną, przechodnia, "dobra") będziemy nazywać silnym dobrym porządkiem.

Definicja 2. *Niech* $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$ *będą zbiorami uporządkowanymi. Powiemy, że* $f : X \to Y$ *jest izomorfizmem porządkowym, gdy* f *jest monotoniczną bijekcją, czyli bijekcją spełniającą:* $\forall a, b \in X\, f(a) \leq_Y f(b) \Leftrightarrow a \leq_X b$*.*

Aksjomat Zastępowania.

$$\forall u \, \forall v \, \forall w \, (\psi(u, v) \wedge \psi(u, w) \Rightarrow v = w) \Rightarrow \forall a \, \exists z \, \forall v \, (v \in z \Leftrightarrow \exists u \in a \, \psi(u, v))$$

Aksjomat Regularności.

$$\forall a \, (a \neq \varnothing \to \exists z \in a \, z \cap a = \varnothing)$$

Twierdzenie 1. *(Russela) Dla dowolnego zbioru* x *nie prawda, że* $x \in x$*. Podobnie dla dowolnych zbiorów* x, y *jeżeli* $x \in y$*, to* $y \notin x$*. Oraz dla dowolnych zbiorów* x, y, z *jeżeli* $x \in y \in z$*, to* $z \notin x$*.*

Definicja 3. *Zbiór* x *nazwiemy tranzytywnym, gdy* $\forall y \in x \, y \subseteq x$*.*

Definicja 4. *Zbiór α nazwiemy liczbą porządkową, gdy α jest tranzytywny i zachodzi $\forall x \in \alpha \forall y \in \alpha\,(y = x \vee y \in x \vee x \in y)$.*

Definicja 5. *Liczbę porządkową α nazwiemy następnikiem, gdy istnieje liczba porządkowa β taka, że $\alpha = \beta + 1$.*

Definicja 6. *Liczbę porządkową nazwiemy graniczną, gdy nie jest następnikiem.*

Twierdzenie 2. *Każdy zbiór dobrze uporządkowany jest izomorficzny z dokładnie jedną liczbą porządkową.*

Definicja 7. *Typem dobrego porządku $(X, \leq)$ nazywamy jedyną liczbą porządkową α izomorficzną z $(X, \leq)$. Piszemy $\alpha = \mathrm{typ}(X, \leq)$.*

Definicja 8. *Niech α, β będą liczbami porządkowymi. Porządek leksykograficzny na produkcie $\alpha \times \beta$ wyraża się wzorem: $(\alpha_1, \beta_1) << (\alpha_2, \beta_2) \Leftrightarrow [(\alpha_1 < \alpha_2) \vee (\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 < \beta_2)]$, dla $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \alpha \times \beta$. Porządek leksykograficzny iloczynie kartezjańskim zbiorów dobrze uporządkowanych jest dobrym porządkiem.*

2 Arytmetyka liczb porządkowych

Definicja 9. $\alpha + \beta = \mathrm{typ}((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta), \prec)$*, gdzie $\prec$ jest obcięciem porządku leksykograficznego na $\{0, 1\} \times \max\{\alpha, \beta\}$ do $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$.*

Definicja 10. $\alpha \cdot \beta = \mathrm{typ}(\beta \times \alpha, <<)$.

Twierdzenie 3. *Dla dowolnych liczb porządkowych α, β, γ zachodzi:*

1. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$,
2. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,
3. $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$,
4. $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$,
5. $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$,
6. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$,
7. $\alpha < \beta \Rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta$,
8. $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$,
9. $(\alpha < \beta \wedge 0 < \gamma) \Rightarrow \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$,
10. $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$,
11. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.

Twierdzenie 4. *Jeśli $\xi \neq 0$ jest graniczna, to dla dowolnej α zachodzi:*

- $\alpha + \xi = \sup\{\alpha + \beta \, : \, \beta < \xi\}$,

- $\alpha \cdot \xi = \sup\{\alpha \cdot \beta \, : \, \beta < \xi\}$,

Definicja 11. *Dla dowolnych liczb porządkowych α, β potęgę α^β definiujemy rekurencyjnie:*

- $\alpha^0 = 1$,
- $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$,
- $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma \, : \, 0 < \gamma < \beta\}$, *dla β granicznych.*

Twierdzenie 5. *Dla dowolnych liczb porządkowych α, β, γ zachodzi:*

1. $0^0 = 1$, $0^\beta = 0$, *dla* $\beta > 0$,
2. $1^\beta = 1$,
3. $0 < \alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$,
4. $(1 < \alpha \wedge \beta < \gamma) \Rightarrow (\alpha^\beta < \alpha^\gamma)$,
5. $1 < \alpha \Rightarrow (\forall \beta \, \beta \leq \alpha^\beta)$,
6. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$,
7. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

Twierdzenie 6. *Dla dowolnych liczb porządkowych α, β takich, że $\alpha \leq \beta$ istnieje dokładnie jedna liczba porządkowa γ taka, że $\alpha + \gamma = \beta$.*

Lemat 1. *Dla dowolnych liczb porządkowych α, β, γ zachodzi $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.*

Twierdzenie 7. *Jeżeli $\beta > 0$, to dla każdej liczby porządkowej α istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby porządkowe $\delta \leq \alpha$ i $\gamma < \beta$ takie, że $\alpha = \beta \cdot \delta + \gamma$.*

Dowód. Ustalmy liczby porządkowe α oraz $\beta > 0$. Ponieważ $\beta \geq 1$, to $\alpha \leq \beta \cdot \alpha$, a jeżeli $\alpha = \beta \cdot \alpha$, to bierzemy $\delta = \alpha$ i $\gamma = 0$. Możemy założyć zatem, że $\alpha < \beta \cdot \alpha$. Wówczas jeśli $g : \beta \cdot \alpha \to \alpha \times \beta$ jest izomorfizmem, to istnieje para $(\delta, \gamma) \in \alpha \times \beta$, że $g(\alpha) = (\delta, \gamma)$. Wobec tego $g|_\alpha$ jest izomorfizmem α na przedział początkowy $(\leftarrow, (\delta, \gamma))$. Zauważmy, że $(\leftarrow, (\delta, \gamma)) = (\delta \times \beta) \cup (\{\delta\} \times \gamma)$, a zatem $\alpha = \mathrm{typ}((\leftarrow, (\delta, \gamma))) = \beta \cdot \delta + \gamma$, ponieważ każdy element zbioru $\delta \times \beta$ jest mniejszy od każdego elementu zbioru $\{\delta\} \times \gamma$.

By pokazać jednoznaczność γ i δ przypuśćmy, że istnieją dwie pary $(\delta_1, \gamma_1) \neq (\delta_2, \gamma_2)$ o żądanej własności. Załóżmy, że $\delta_1 < \delta_2$. Wtedy mamy:

$$\alpha = \beta \cdot \delta_1 + \gamma_1 < \beta \cdot \delta_1 + \beta = \beta \cdot (\delta_1 + 1) \leq \beta \cdot \delta_2 \leq \beta \cdot \delta_2 + \gamma_2 = \alpha$$

Otrzymujemy sprzeczność, zatem $\delta_1 = \delta_2$.

Załóżmy teraz, że $\gamma_1 < \gamma_2$. Wtedy:

$$\alpha = \beta \cdot \delta_1 + \gamma_1 = \beta \cdot \delta_2 + \gamma_1 < \beta \cdot \delta_2 + \gamma_2 = \alpha$$

Znów otrzymujemy sprzeczność i sprzeczność z $(\delta_1, \gamma_1) \neq (\delta_2, \gamma_2)$. $\square$

Twierdzenie 8. *(Cantora o postaci normalnej)Jeżeli α i β są liczbami porządkowymi i $\alpha > 1$ oraz $\beta > 0$, to liczbę β można przedstawić w jednoznaczny sposób w postaci*

$$\beta = \alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \alpha^{\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1}$$

przy czym $\gamma_{k-1} < \cdots < \gamma_0$ oraz $0 < \delta_i < \alpha$, dla $i < k < \omega$.

Dowód. Ustalmy $\alpha > 1$. Dla $\beta = 1$ bierzemy $\gamma_0 = 0$ i $\delta_0 = 1$ i jest dobrze (co więcej, dla $k > 1$ jest źle, dla $\gamma_0 > 0$ i $\delta_0 > 0$ też! Załóżmy teraz, że dla dowolnej liczby porządkowej $\beta' < \beta$ twierdzenie zachodzi. Rozważmy zbiór $B = \{\eta \leq \beta : \exists \xi \, \eta = \alpha^\xi\}$. Na mocy własnośći: $(1 < \alpha \wedge \xi_1 < \xi_2) \Rightarrow (\alpha^{\xi_1} < \alpha^{\xi_2})$ zachodzi implikacja: jeśli $\xi_1 \neq \xi_2$, to $\alpha^{\xi_1} \neq \alpha^{\xi_2}$. Dzięki temu można poprawnie określić funkcję $H : B \to \mathbb{ON}$ wzorem $H(\alpha^\xi) = \xi$. Korzystając z aksjomatu zastępowania otrzymujemy taki zbiór C, że $\gamma \in C \Leftrightarrow \alpha^\gamma \leq \beta$.

Chcemy pokazać, że w C istnieje element największy. Przyjmijy $\gamma_0 = \sup C$ i załóżmy, że $\gamma_0 \notin C$. Wówczas γ_0 jest liczbą graniczną i z definicji potęgowania zachodzi $\alpha^{\gamma_0} = \sup\{\alpha^\gamma : \gamma < \gamma_0\}$. Dla każdego $\gamma' < \gamma_0$ istnieje taka liczba $\gamma \in C$, że $\gamma' < \gamma$. Z definicji zbioru C wynika, że $\alpha^{\gamma'} < \alpha^\gamma \leq \beta$, zatem $\alpha^{\gamma_0} = \sup\{\alpha^{\gamma'} : \gamma' < \gamma_0\} \leq \beta$, co przeczy założeniu, że $\gamma_0 \notin C$.

Na mocy twierdzenia o dzieleniu z resztą istnieją liczby $\delta_0 \leq \beta$ oraz $\beta_1 < \alpha^{\gamma_0}$ takie, że $\beta = \alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \beta_1$. Skoro $\gamma_0 \in C$, to $\alpha^{\gamma_0} \leq \beta$, a zatem $\delta_0 \neq 0$. Mamy również $\beta_1 < \beta$, ponieważ $\beta_1 < \alpha^{\gamma_0}$. Ponadto $\delta_0 < \alpha$, bo inaczej byłoby: $\alpha^{\gamma_0+1} = \alpha^{\gamma_0} \cdot \alpha \leq \alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \beta_1 = \beta$, co przeczy maksymakności γ_0 w C.

Jeżeli $\beta_1 = 0$, to $\alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_0$ jest szukaną postacią normalną dla β. W przeciwnym przypadku korzystamy z założenia indukcyjnego i znajdujemy postać normalną Cantora dla $\beta_1 = \alpha^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1}$, gdzie $\gamma_{k-1} < \cdots < \gamma_1$ oraz $0 < \delta_i < \alpha$ dla $i = 1, \ldots, k-1$. Aby zakończyć dowód istnienia postaci normalnej pozostaje jedynie pokazać, że $\gamma_1 < \gamma_0$. W przeciwnym bowiem wypadku, na mocy $\alpha^{\gamma_1} \leq \alpha^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1} = \beta_1 < \alpha^{\gamma_0}$ oraz $(1 < \alpha \wedge \xi_1 < \xi_2) \Rightarrow (\alpha^{\xi_1} < \alpha^{\xi_2})$ otrzymujemy sprzeczność. Zakończyliśmy dowód istnienia postaci normalnej Cantora dla dowolnej liczby porządkowej β.

Dla dowodu jednoznaczności załóżmy, że β jest najmnijeszą liczbą porządkową mającą dwa przedstawienia:

$$\beta = \alpha^{\gamma'_0} \cdot \delta'_0 + \cdots + \alpha^{\gamma'_{k-1}} \cdot \delta'_{k-1}$$

$$\beta = \alpha^{\gamma''_0} \cdot \delta''_0 + \cdots + \alpha^{\gamma''_{l-1}} \cdot \delta''_{l-1}$$

gdzie $\gamma'_{k-1} < \cdots < \gamma'_0$ i $0 < \delta'_i < \alpha$ dla $i = 0, \ldots, k-1$ oraz $\gamma''_{k-1} < \cdots < \gamma''_0$ i $0 < \delta''_i < \alpha$ dla $i = 0, \ldots, k-1$. Dopuszczając δ'_i oraz δ''_i równe 0 możemy założyć, że $k = l$. Wówczas $0 \leq \delta'_i < \alpha$ oraz $0 < \delta''_i < \alpha$ dla $i = 0, \ldots, k-1$ oraz $\max\{\delta'_0, \delta''_0\} > 0$.

Pokażemy, że $\gamma'_0 = \gamma''_0$. Jeżeli $\gamma'_0 < \gamma''_0$, to otrzymujemy sprzeczność:

$$\beta = \alpha^{\gamma'_0} \cdot \delta'_0 + \cdots + \alpha^{\gamma'_{k-1}} \cdot \delta'_{k-1} < \alpha^{\gamma'_0+1} \leq \alpha^{\gamma''_0} \leq \beta$$

Zatem $\gamma'_0 = \gamma''_0$.

Pokażemy teraz, że $\delta'_0 = \delta''_0$. Załóżmy, że $\delta'_0 < \delta''_0$. Wtedy zachodzi:

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha^{\gamma'_0} \cdot \delta'_0 + \cdots + \alpha^{\gamma'_{k-1}} \cdot \delta'_{k-1} < \alpha^{\gamma'_0} \cdot \delta'_0 + \cdots + \alpha^{\gamma'_{k-1}} \cdot \alpha = \\ &= \alpha^{\gamma'_0} \cdot \delta'_0 + \cdots + \alpha^{\gamma'_{k-1}+1} \leq \alpha^{\gamma'_0} \cdot \delta'_0 + \cdots + \alpha^{\gamma'_{k-2}} \cdot \delta'_{k-2} + \alpha^{\gamma'_{k-2}} = \\ &= \alpha^{\gamma'_0} \cdot \delta'_0 + \cdots + \alpha^{\gamma'_{k-2}} \cdot (\delta'_{k-2} + 1) \leq \alpha^{\gamma'_0} \cdot \delta'_0 + \cdots + \alpha^{\gamma'_{k-2}} \cdot \alpha = \\ &= \alpha^{\gamma'_0} \cdot \delta'_0 + \cdots + \alpha^{\gamma'_{k-2}+1} \leq \cdots \leq \alpha^{\gamma'_0} \cdot (\delta'_0 + 1) \leq \alpha^{\gamma'_0} \cdot \delta''_0 \leq \\ &\leq \alpha^{\gamma''_0} \cdot \delta''_0 + \cdots + \alpha^{\gamma''_{k-1}} \cdot \delta''_{k-1} = \beta\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, więc $\delta'_0 = \delta''_0$, a zatem $\alpha^{\gamma'_0} \cdot \delta'_0 = \alpha^{\gamma''_0} \cdot \delta''_0$.

Na mocy monotoniczności sumy: $\alpha < \beta \Rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta$ mamy: $\alpha^{\gamma'_1} \cdot \delta'_1 + \cdots + \alpha^{\gamma'_{k-1}} \cdot \delta'_{k-1} = \alpha^{\gamma''_1} \cdot \delta''_1 + \cdots + \alpha^{\gamma''_{k-1}} \cdot \delta''_{k-1}$. Ponieważ jednak są to liczby mniejsze niż β, to na mocy założenia indukcyjnego posiadają tą samą postać normalną Cantora. Zakończyliśmy dowód. □

Wniosek 1. *Jeżeli $\beta > 0$, to można ją przedstawić w sposób jednoznaczny w postaci:*

$$\beta = \omega^{\gamma_0} + \omega^{\gamma_1} + \cdots + \omega^{\gamma_{k-1}}$$

przy czym $k < \omega$ i $\beta \leq \gamma_{k-1} \leq \cdots \leq \gamma_0 \leq 0$.

Dowód. Na mocy twierdzenia o postaci normalnej Cantora dla $\alpha = \omega$ otrzymujemy jednoznaczyny zapis dowolnej liczby β w postaci:

$$\beta = \omega^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \omega^{\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1}$$

gdzie $\gamma_{k-1} < \cdots < \delta_0$ oraz $0 < \delta_i < \omega$ dla $i = 0, \ldots, k-1$. Na mocy ostatniej z tych nierówności wiadomo, że δ_i są skończone dla $i = 0, \ldots, k-1$ mamy zatem:

$$\beta = \underbrace{\omega^{\gamma_0} + \cdots + \omega^{\gamma_0}}_{\delta_0 \, razy} + \cdots + \underbrace{\omega^{\gamma_{k-1}} + \cdots + \omega^{\gamma_{k-1}}}_{\delta_{k-1} \, razy}$$

Jednoznaczność tego przedstawienia wynika bezpośrenio z faktu, że δ_i są wyznaczone jenoznacznie. □