Definicje prawdy w ubogich FM–dziedzinach

Marek Czarnecki

Wydział Filozofii i Socjologii
Uniwersytet Warszawski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Warszawa, 2009

Motywacje

1. J. Mycielski — Analysis Without Actual Infinity,
   - Naturalna interpretacja pojęć analizy matematycznej (zbieżność ciągu; ciągłość, różniczkowalność funkcji) w światach potencjalnie nieskończonych.

Motywacje

1. J. Mycielski — Analysis Without Actual Infinity,
   - Naturalna interpretacja pojęć analizy matematycznej (zbieżność ciągu; ciągłość, różniczkowalność funkcji) w światach potencjalnie nieskończonych.
2. M. Mostowski — On Representing Concepts in Finite Models,
   - Reprezentacja składni i semantyki arytmetyki w światach potencjalnie nieskończonych.

Motywacje

1. J. Mycielski — Analysis Without Actual Infinity,
   - Naturalna interpretacja pojęć analizy matematycznej (zbieżność ciągu; ciągłość, różniczkowalność funkcji) w światach potencjalnie nieskończonych.
2. M. Mostowski — On Representing Concepts in Finite Models,
   - Reprezentacja składni i semantyki arytmetyki w światach potencjalnie nieskończonych.
3. M. Krynicki, K. Zdanowski — Theories of Arithmetics in Finite Models,
   - Badanie zachowania arytmetyk w modelach skończonych – arytmetyka mnożenia.

Motywacje

1. J. Mycielski — Analysis Without Actual Infinity,
   - Naturalna interpretacja pojęć analizy matematycznej (zbieżność ciągu; ciągłość, różniczkowalność funkcji) w światach potencjalnie nieskończonych.
2. M. Mostowski — On Representing Concepts in Finite Models,
   - Reprezentacja składni i semantyki arytmetyki w światach potencjalnie nieskończonych.
3. M. Krynicki, K. Zdanowski — Theories of Arithmetics in Finite Models,
   - Badanie zachowania arytmetyk w modelach skończonych – arytmetyka mnożenia.
4. M. Mostowski, A.E. Wasilewska — Arithmetic of Divisibility in Finite Models,
   - Reprezentowanie relacji i interpretacja dodawania i mnożenia w języku podzielności.

Motywacje

1. J. Mycielski — Analysis Without Actual Infinity,
   - Naturalna interpretacja pojęć analizy matematycznej (zbieżność ciągu; ciągłość, różniczkowalność funkcji) w światach potencjalnie nieskończonych.
2. M. Mostowski — On Representing Concepts in Finite Models,
   - Reprezentacja składni i semantyki arytmetyki w światach potencjalnie nieskończonych.
3. M. Krynicki, K. Zdanowski — Theories of Arithmetics in Finite Models,
   - Badanie zachowania arytmetyk w modelach skończonych – arytmetyka mnożenia.
4. M. Mostowski, A.E. Wasilewska — Arithmetic of Divisibility in Finite Models,
   - Reprezentowanie relacji i interpretacja dodawania i mnożenia w języku podzielności.
5. M. Mostowski, K Zdanowski — Coprimality in Finite Models,
   - Badanie arytmetyki podzielności w modelach skończonych.

Spis treści

FM–dziedzina – model świata potencjalnie nieskończonego

Definicja

$\mathcal{A} = (\omega, R_1, ..., R_k)$ struktura czysto relacyjną. FM–dziedzina nad $\mathcal{A}$ to rodzina skończonych modeli $\mathrm{FM}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}_n : n = 1, 2, ...\}$, gdzie $\mathcal{A}_n = (\{0, ..., n-1\}, R_1^{(n)}, ..., R_k^{(n)})$.

Definicja

Zdanie ψ jest prawdziwe w $\mathrm{FM}(\mathcal{A})$, gdy prawdziwe jest w prawie wszystkich modelach z tej dziedziny.
$\mathrm{FM}(\mathcal{A}) \models_{sl} \psi \equiv \exists k \forall n > k \mathcal{A}_n \models \psi$.

Aktualna i potencjalna nieskończoność

Aktualna nieskończoność	Potencjalna nieskończoność
$\{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$	$\{0\}$
	$\{0, 1\}$
	$\{0, 1, 2\}$
	$\vdots$

Aktualna i potencjalna nieskończoność

Aktualna nieskończoność	Potencjalna nieskończoność
$(\{0,1,2,3\dots\}, s, \times, 0)$	$(\{0\}, s, \times, 0) \models \neg\varphi$
$\models$	$(\{0,1\}, s, \times, 0) \models \neg\varphi$
$\exists^{\geq 2}x \exists y\, (y \times s(s(0)) = x)$	$(\{0,1,2\}, s, \times, 0) \models \varphi$
$= \varphi$	$(\{0,1,2,3\}, s, \times, 0) \models \varphi$
	$\vdots$
$(\{0,1,2,3\dots\}, s, \times, 0) \models \varphi$	$\mathrm{FM}((\{0,1,2,3\dots\}, s, \times, 0)) \models_{sl} \varphi$

FM–reprezentowalność

Relacja $R \subseteq \omega^r$ jest FM–reprezentowana przez formułę $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ w FM–dziedzinie $\mathrm{FM}(\mathcal{A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a_1, \dots, a_k \in \omega$ spełnione są następujące warunki:

1. $\mathrm{FM}(\mathcal{A}) \models_{sl} \varphi[a_1, \dots, a_k] \iff R(a_1, \dots, a_k)$,
2. $\mathrm{FM}(\mathcal{A}) \models_{sl} \neg\varphi[a_1, \dots, a_k] \iff \neg R(a_1, \dots, a_k)$.

Relacja R jest FM–reprezentowalna w $\mathrm{FM}(\mathcal{A})$, jeżeli istnieje formuła φ, która FM–reprezentuje R w $\mathrm{FM}(\mathcal{A})$.

FM–reprezentowalność

Twierdzenie o FM–reprezentowalności (M. Mostowski)

Relacja $R \subseteq \omega^r$ jest FM–reprezentowalna w $\mathrm{FM}(\mathcal{N})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R \in \Delta^0_2$.
$\mathcal{N} = (\omega, s, +, \times, <, 0, 1)$ – model standardowy.

Charakterystyka formuł Δ^0_2

Następujące warunki są równoważne:

- $R \in \Delta^0_2$,
- R jest rekurencyjna z rekurencyjnie przeliczalną wyrocznią,
- R jest stopnia $\leq 0'$.

FM–definicje prawdy

Definicja

Formuła $\varphi(x)$ jest FM–definicją prawdy w FM–dziedzinie $\mathrm{FM}(\mathcal{A})$, gdy dla dowolnego zdania w języku $\mathcal{A}$ zachodzi:
$\mathrm{FM}(\mathcal{A}) \models_{sl} \psi \equiv \varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$.

$\mathrm{Name}(x)$ i $\mathrm{Subst}(x, y)$

Uwaga

Następujące funkcje są Δ^0_0–definiowalne:

- $\mathrm{Name}(x) = \ulcorner \underbrace{s(\ldots s(}_{x} 0 \underbrace{)\ldots)}_{x} \urcorner$,
- $\mathrm{Subst}_0(\ulcorner \varphi(v_0) \urcorner, \ulcorner t \urcorner) = \ulcorner \varphi(t) \urcorner$.

Wniosek

Relacje $\mathrm{Name}(x) = y$ oraz $\mathrm{Subst}_0(x, y) = z$ są FM–reprezentowalne w $\mathrm{FM}(\mathcal{N})$.

Lemat przekątniowy

Twierdzenie (M. Mostowski)

Dla dowolnej formuły arytmetycznej $\varphi(x)$ istnieje zdanie arytmetyczne ψ takie, że $\mathrm{FM}(\mathcal{N}) \models_{sl} \psi \equiv \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Niedefiniowalność prawdy

Twierdzenie (M. Mostowski)

(FM–wersja twierdzenia Tarskiego o niedefiniowalności prawdy)
Nie istnieje formuła arytmetyczna $\varphi(x)$ taka, że dla dowolnego zdania arytmetycznego ψ:
$\mathrm{FM}(\mathcal{N}) \models_{sl} \psi \equiv \varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$.

Spis treści

Ubogie arytmetyki w modelu standardowym

Twierdzenie

Teoria pierwszego rzędu arytmetyki mnożenia jest rozstrzygalna.

Uwaga

- $x|y \equiv_{df} \exists z\, x \times z = y$,
- $x \perp y \equiv_{df} \forall z\, ((z|x \wedge z|y)) \rightarrow \forall w\, z|w)$

Wniosek

Teoria pierwszego rzędu arytmetyki podzielności jest rozstrzygalna.

Wniosek

Teoria pierwszego rzędu arytmetyki względnej pierwszości jest rozstrzygalna.

Uwaga

W modelu standardowym, przy pomocy jedynie mnożenia, nie jest definiowalny $<$.

Ubogie arytmetyki w modelach skończonych

Uwaga

Następująca formuła definiuje porządek na segmencie początkowym dowolnego skończonego modelu arytmetyki mnożenia:

$$\varphi^{\times}_{<}(x,y) \equiv_{df} \exists c(\exists d\; x \times c = d \wedge \neg\exists e\; y \times c = e)$$

Uwaga

Następująca formuła definiuje porządek na segmencie początkowym dowolnego skończonego modelu arytmetyki podzielności:

$$\varphi^{|}_{<}(x,y) \equiv_{df} \exists z\,(z \perp x \wedge z \perp y \wedge \exists w\,(x|w \wedge z|w) \wedge \neg\exists w\,(y|w \wedge z|w))$$

Pytanie:

Czy możliwe jest zdefiniowanie porządku w języku względnej pierwszości, w modelach skończonych?

Spis treści

Definicja

Niech $a \in \omega$. Przez $\mathrm{Supp}(a)$ oznaczamy zbiór liczb pierwszych dzielących a. Dla $a, b \in \omega$ piszemy $a \approx b$ gdy, $\mathrm{Supp}(a) = \mathrm{Supp}(b)$.

Uwaga

W języku arytmetyki względnej pierwszości nieodróżnialne są liczby podzielne przez dokładnie te same liczby pierwsze. Zatem relacja $\approx$ jest kongruencją.

Uwaga

Następująca formuła definiuje relację $\approx$:

$$\varphi_{\approx}(x, y) \equiv_{df} \forall z (x \perp z \equiv y \perp z)$$

Oznaczenia

Przez p_i oznaczamy i–tą liczbę pierwszą. $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7, \ldots$

Interpretacja pierwszego rzędu $\mathcal{A}$ w $\mathcal{B}$

Definicja

Niech σ i τ będą słownikami relacyjnymi. Niech σ zawiera predykaty $R_1, \dots, R_k$ o arnościach $s_1, \dots, s_k$. Ciąg $\overline{\varphi} = (\varphi_U, \varphi_\approx, \varphi_{R_1}, \dots, \varphi_{R_k})$ formuł słownika τ jest interpretacją pierwszego rzędu modeli słownika σ, gdy zmienną wolną φ_U jest x_1, zmiennymi wolnymi $\varphi_\approx$ są x_1 i x_2 oraz zmiennymi wolnymi formuł φ_{R_i} są $x_1, \dots, x_{s_i}$ dla $i = 1, \dots, k$. Ciąg $\overline{\varphi}$ definiuje w modelu $\mathcal{A}$ słownika τ model słownika σ w następującym sensie:

- Zbiór U jest definiowany przez φ_U: $U = \{a : \mathcal{A} \models \varphi_U[a]\}$,
- Relacja $\approx$ jest zadana przez formułę $\varphi_\approx$ i musi definiować kongruencję na U,
- Dla $i = 1, \dots, k$ interpretacja R_i dana jest przez $\mathbf{R}_i(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{s_i})$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
  - $\exists a_1 \in \mathbf{a}_1 \dots \exists a_{s_i} \in \mathbf{a}_{s_i} \mathcal{A} \models \varphi_{R_i}[a_1, \dots, a_{s_i}]$, gdzie $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{s_i}$ są klasami abstrakcji relacji definiowanej na U przez $\varphi_\approx$.

Interpretacja FM–dziedziny w innej FM–dziedzinie

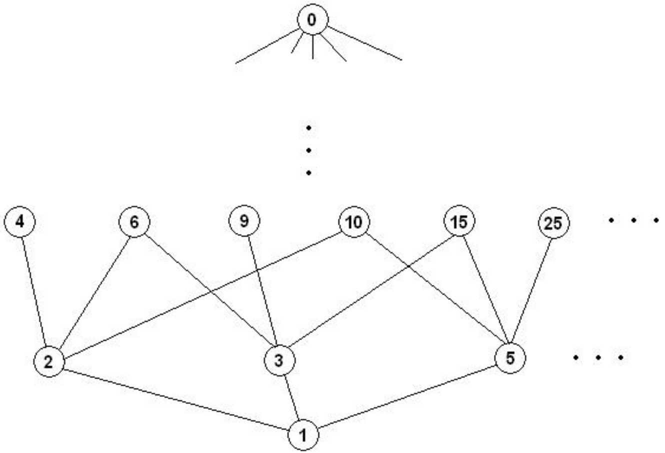
Definicja

Powiemy, że $\overline{\varphi}$ jest interpretacją pierwszego rzędu $\mathrm{FM}(\mathcal{A})$ w $\mathrm{FM}(\mathcal{B})$ jeżeli istnieje nieograniczona funkcja monotoniczna $f : \omega \longrightarrow \omega$ taka istnieje k, że dla dowolnego $n \geq k$:

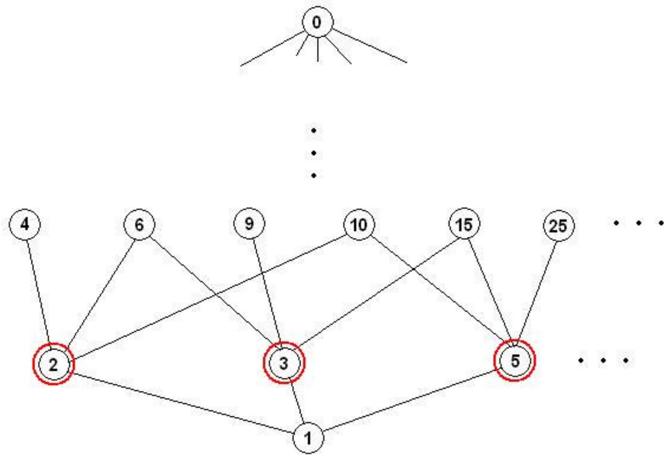
$$I_{\overline{\varphi}}(\mathcal{B}_n) \cong \mathcal{A}_{f(n)},$$

gdzie $I_{\overline{\varphi}}(\mathcal{B}_n)$ jest modelem zdefiniowanym w modelu $\mathcal{B}_n$ przez ciąg formuł $\overline{\varphi}$.

Krata podzielności



Krata podzielności



Porządek w języku względnej pierwszości

Uwaga

Podstawowe definicje:

- $P(x) \equiv_{df} \forall y \forall z((\neg z \perp x \wedge \neg y \perp x) \rightarrow \neg z \perp y)$ – x jest potęgą liczby pierwszej,
- $\varphi_{\cup}(x, y, z) \equiv_{df} \forall w(w \perp z \equiv (w \perp x \wedge w \perp y))$ – $\mathrm{Supp}(z) = \mathrm{Supp}(x) \cup \mathrm{Supp}(y)$,
- $\varphi_{\prec}(x, y) \equiv_{df}$ $\exists z(P(z) \wedge x \perp z \wedge y \perp z \wedge \exists w \varphi_{\cup}(x, z, w) \wedge \neg \exists w \varphi_{\cup}(y, z, w))$ – Relacja określająca porządek na klasach (małych) liczb pierwszych.

Twierdzenie (M. Mostowski, K. Zdanowski)

Istnieje interpretacja prosta FM–dziedziny $\mathrm{FM}(\mathcal{N})$ w FM–dziedzinie $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$.

Uwaga

Interpretację budujemy na klasach równoważności relacji $\approx$ reprezentowanych przez liczby pierwsze. W języku względnej pierwszości – w modelach skończonych – definiowalne są relacje $R_+(x, y, z), R_\times(x, y, z)$ takie, że:

- $R_+(x, y, z) \equiv x \approx p_i \wedge y \approx p_j \wedge z \approx p_k \wedge k = i + j$,
- $R_\times(x, y, z) \equiv x \approx p_i \wedge y \approx p_j \wedge z \approx p_k \wedge k = i \times j$.

Istnienie interpretacji a istnienie tłumaczenia

Definicja

Niech $R \subseteq \omega^r$ będzie relacją arytmetyczną. Tłumaczenie relacji R na indeksy liczb pierwszych to relacja R^* taka, że:

$$R^*(x_1, \ldots, x_r) \equiv \exists a_1 \ldots \exists a_r (\bigwedge_{i=1}^{r} (x_i \approx p_{a_i}) \wedge R(a_1, \ldots, a_r))$$

Twierdzenie

Relacja $R \subseteq \omega^r$ jest FM–reprezentowalna w $\mathrm{FM}(\mathcal{N})$ wtedy i tylko wtedy, gdy jej tłumaczenie R^* jest reprezentowalne w $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$.

Uwaga

Tłumaczenie funkcji $\ulcorner \urcorner$ oznaczamy przez GN.

Tłumaczenie relacji

Przykłady

1.
   - $R = \{1, 5, 6\}$
   - $R^* = \bigcup_{k>0}\{p_1^k, p_5^k, p_6^k\} = \bigcup_{k>0}\{3^k, 13^k, 17^k\}$

2.
   - $S = \{(3,4), (2,5), (1,1)\}$
   - $S^* = \bigcup_{k,l>0}\{(p_3^k, p_4^l), (p_2^k, p_5^l), (p_1^k, p_1^l)\} = \bigcup_{k,l>0}\{(7^k, 11^l), (5^k, 13^l), (3^k, 3^l)\}$

Lemat przekątniowy dla $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$

Twierdzenie

Dla dowolnej formuły w języku względnej pierwszości $\varphi(x)$ istnieje zdanie w języku względnej pierwszości ψ takie, że:

$$\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi \equiv \varphi(\mathrm{GN}(\psi))$$

Dowód lematu przekątniowego dla $\mathrm{FM}((\omega, \bot))$

Niech $\mathrm{Name}^*(x) \approx y$ oraz $\mathrm{Subst}^*(x, y) \approx z$ będą tłumaczeniami relacji FM–reprezentujących odpowiednio $\mathrm{Name}(x) = y$ i $\mathrm{Subst}(x, y) = z$ w $\mathrm{FM}(\mathcal{N})$. Wtedy spełnione są następujące warunki:

- $\mathrm{FM}((\omega, \bot)) \models_{sl} \mathrm{Name}^*(x) \approx \mathrm{GN}(\underbrace{s(\ldots s(}_{x} 0 \underbrace{)\ldots)}_{x})$,
- $\mathrm{FM}((\omega, \bot)) \models_{sl} \mathrm{Subst}^*(\mathrm{GN}(\varphi(x)), \mathrm{GN}(t)) \approx \mathrm{GN}(\varphi(t))$.

Ustalmy formułę $\varphi(x)$ z jedną zmienną wolną x. Definicje pomocnicze:

- $\zeta(x) \equiv_{df} \varphi(\mathrm{Subst}^*(x, \mathrm{Name}^*(x)))$,

Dowód lematu przekątniowego dla $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$

Niech $\mathrm{Name}^*(x) \approx y$ oraz $\mathrm{Subst}^*(x, y) \approx z$ będą tłumaczeniami relacji FM–reprezentujących odpowiednio $\mathrm{Name}(x) = y$ i $\mathrm{Subst}(x, y) = z$ w $\mathrm{FM}(\mathcal{N})$. Wtedy spełnione są następujące warunki:

- $\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \mathrm{Name}^*(x) \approx \mathrm{GN}(\underbrace{s(\ldots s(}_{x} 0 \underbrace{) \ldots)}_{x}),$
- $\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \mathrm{Subst}^*(\mathrm{GN}(\varphi(x)), \mathrm{GN}(t)) \approx \mathrm{GN}(\varphi(t)).$

Ustalmy formułę $\varphi(x)$ z jedną zmienną wolną x. Definicje pomocnicze:

- $\zeta(x) \equiv_{df} \varphi(\mathrm{Subst}^*(x, \mathrm{Name}^*(x))),$
- $m \approx_{df} \mathrm{GN}(\zeta(x)),$

Dowód lematu przekątniowego dla $\mathrm{FM}((\omega,\bot))$

Niech $\mathrm{Name}^*(x) \approx y$ oraz $\mathrm{Subst}^*(x,y) \approx z$ będą tłumaczeniami relacji FM–reprezentujących odpowiednio $\mathrm{Name}(x) = y$ i $\mathrm{Subst}(x,y) = z$ w $\mathrm{FM}(\mathcal{N})$. Wtedy spełnione są następujące warunki:

- $\mathrm{FM}((\omega,\bot)) \models_{sl} \mathrm{Name}^*(x) \approx \mathrm{GN}(\underbrace{s(\ldots s(}_{x}0\underbrace{)\ldots)}_{x})$,
- $\mathrm{FM}((\omega,\bot)) \models_{sl} \mathrm{Subst}^*(\mathrm{GN}(\varphi(x)), \mathrm{GN}(t)) \approx \mathrm{GN}(\varphi(t))$.

Ustalmy formułę $\varphi(x)$ z jedną zmienną wolną x. Definicje pomocnicze:

- $\zeta(x) \equiv_{df} \varphi(\mathrm{Subst}^*(x, \mathrm{Name}^*(x)))$,
- $m \approx_{df} \mathrm{GN}(\zeta(x))$,
- $\psi \equiv_{df} \zeta(m)$.

Dowód lematu przekątniowego c.d.

Definicje

- $\zeta(x) \equiv_{df} \varphi(\mathrm{Subst}^*(x, \mathrm{Name}^*(x)))$,
- $m \approx_{df} \mathrm{GN}(\zeta(x))$,
- $\psi \equiv_{df} \zeta(m)$.

W FM–dziedzinie $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$ następujące zdania są równoważne:

- ψ,

Dowód lematu przekątniowego c.d.

Definicje

- $\zeta(x) \equiv_{df} \varphi(\mathrm{Subst}^*(x, \mathrm{Name}^*(x)))$,
- $m \approx_{df} \mathrm{GN}(\zeta(x))$,
- $\psi \equiv_{df} \zeta(m)$.

W FM–dziedzinie $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$ następujące zdania są równoważne:

- ψ,
- $\zeta(m)$,

Dowód lematu przekątniowego c.d.

Definicje

- $\zeta(x) \equiv_{df} \varphi(\mathrm{Subst}^*(x, \mathrm{Name}^*(x)))$,
- $m \approx_{df} \mathrm{GN}(\zeta(x))$,
- $\psi \equiv_{df} \zeta(m)$.

W FM–dziedzinie $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$ następujące zdania są równoważne:

- ψ,
- $\zeta(m)$,
- $\zeta(\mathrm{GN}(\zeta(x)))$,

Dowód lematu przekątniowego c.d.

Definicje

- $\zeta(x) \equiv_{df} \varphi(\mathrm{Subst}^*(x, \mathrm{Name}^*(x)))$,
- $m \approx_{df} \mathrm{GN}(\zeta(x))$,
- $\psi \equiv_{df} \zeta(m)$.

W FM–dziedzinie $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$ następujące zdania są równoważne:

- ψ,
- $\zeta(m)$,
- $\zeta(\mathrm{GN}(\zeta(x)))$,
- $\varphi(\mathrm{Subst}^*(\mathrm{GN}(\zeta(x)), \mathrm{Name}^*(\mathrm{GN}(\zeta(x)))))$,

Dowód lematu przekątniowego c.d.

Definicje

- $\zeta(x) \equiv_{df} \varphi(\mathrm{Subst}^*(x, \mathrm{Name}^*(x)))$,
- $m \approx_{df} \mathrm{GN}(\zeta(x))$,
- $\psi \equiv_{df} \zeta(m)$.

W FM–dziedzinie $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$ następujące zdania są równoważne:

- ψ,
- $\zeta(m)$,
- $\zeta(\mathrm{GN}(\zeta(x)))$,
- $\varphi(\mathrm{Subst}^*(\mathrm{GN}(\zeta(x)), \mathrm{Name}^*(\mathrm{GN}(\zeta(x)))))$,
- $\varphi(\mathrm{Subst}^*(\mathrm{GN}(\zeta(x)), \mathrm{Name}^*(m)))$,

Dowód lematu przekątniowego c.d.

Definicje

- $\zeta(x) \equiv_{df} \varphi(\mathrm{Subst}^*(x, \mathrm{Name}^*(x)))$,
- $m \approx_{df} \mathrm{GN}(\zeta(x))$,
- $\psi \equiv_{df} \zeta(m)$.

W FM–dziedzinie $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$ następujące zdania są równoważne:

- ψ,
- $\zeta(m)$,
- $\zeta(\mathrm{GN}(\zeta(x)))$,
- $\varphi(\mathrm{Subst}^*(\mathrm{GN}(\zeta(x)), \mathrm{Name}^*(\mathrm{GN}(\zeta(x)))))$,
- $\varphi(\mathrm{Subst}^*(\mathrm{GN}(\zeta(x)), \mathrm{Name}^*(m)))$,
- $\varphi(\mathrm{GN}(\zeta(m)))$,

Dowód lematu przekątniowego c.d.

Definicje

- $\zeta(x) \equiv_{df} \varphi(\mathrm{Subst}^*(x, \mathrm{Name}^*(x)))$,
- $m \approx_{df} \mathrm{GN}(\zeta(x))$,
- $\psi \equiv_{df} \zeta(m)$.

W FM–dziedzinie $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$ następujące zdania są równoważne:

- ψ,
- $\zeta(m)$,
- $\zeta(\mathrm{GN}(\zeta(x)))$,
- $\varphi(\mathrm{Subst}^*(\mathrm{GN}(\zeta(x)), \mathrm{Name}^*(\mathrm{GN}(\zeta(x)))))$,
- $\varphi(\mathrm{Subst}^*(\mathrm{GN}(\zeta(x)), \mathrm{Name}^*(m)))$,
- $\varphi(\mathrm{GN}(\zeta(m)))$,
- $\varphi(\mathrm{GN}(\psi))$.

Niedefiniowalność prawdy

Niedefiniowalność prawdy w $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$

Nie istnieje formuła $\varphi(x)$ w języku względnej pierwszości taka, że dla dowolnego zdania ψ w języku względnej pierwszości zachodzi:

$$\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi \equiv \varphi(\mathrm{GN}(\psi))$$

Dowód:

Załóżmy przeciwnie – niech $\varphi(x)$ będzie jak w treści twierdzenia. Stosujemy FM–wersję lematu przekątniowego do formuły $\neg\varphi(x)$ – otrzymujemy zdanie ψ_0 takie, że:

- $\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi_0 \equiv \neg\varphi(\mathrm{GN}(\psi_0))$,

Niedefiniowalność prawdy

Niedefiniowalność prawdy w $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$

Nie istnieje formuła $\varphi(x)$ w języku względnej pierwszości taka, że dla dowolnego zdania ψ w języku względnej pierwszości zachodzi:

$$\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi \equiv \varphi(\mathrm{GN}(\psi))$$

Dowód:

Załóżmy przeciwnie – niech $\varphi(x)$ będzie jak w treści twierdzenia. Stosujemy FM–wersję lematu przekątniowego do formuły $\neg\varphi(x)$ – otrzymujemy zdanie ψ_0 takie, że:

- $\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi_0 \equiv \neg\varphi(\mathrm{GN}(\psi_0))$,
- $\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi_0 \equiv \varphi(\mathrm{GN}(\psi_0))$,

Niedefiniowalność prawdy

Niedefiniowalność prawdy w $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$

Nie istnieje formuła $\varphi(x)$ w języku względnej pierwszości taka, że dla dowolnego zdania ψ w języku względnej pierwszości zachodzi:

$$\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi \equiv \varphi(\mathrm{GN}(\psi))$$

Dowód:

Załóżmy przeciwnie – niech $\varphi(x)$ będzie jak w treści twierdzenia. Stosujemy FM–wersję lematu przekątniowego do formuły $\neg\varphi(x)$ – otrzymujemy zdanie ψ_0 takie, że:

- $\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi_0 \equiv \neg\varphi(\mathrm{GN}(\psi_0))$,
- $\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi_0 \equiv \varphi(\mathrm{GN}(\psi_0))$,
- $\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi_0 \equiv \neg\psi_0$.

Niedefiniowalność prawdy

Niedefiniowalność prawdy w $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$

Nie istnieje formuła $\varphi(x)$ w języku względnej pierwszości taka, że dla dowolnego zdania ψ w języku względnej pierwszości zachodzi:

$$\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi \equiv \varphi(\mathrm{GN}(\psi))$$

Dowód:

Załóżmy przeciwnie – niech $\varphi(x)$ będzie jak w treści twierdzenia. Stosujemy FM–wersję lematu przekątniowego do formuły $\neg\varphi(x)$ – otrzymujemy zdanie ψ_0 takie, że:

- $\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi_0 \equiv \neg\varphi(\mathrm{GN}(\psi_0))$,
- $\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi_0 \equiv \varphi(\mathrm{GN}(\psi_0))$,
- $\mathrm{FM}((\omega, \perp)) \models_{sl} \psi_0 \equiv \neg\psi_0$.

Sprzeczność. Nie istnieje zatem formuła $\varphi(x)$ – definiująca prawdę w FM–dziedzienie $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$.

Podsumowanie

- Istnieje interpretacja $\mathrm{FM}(\mathcal{N})$ w $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$,

Podsumowanie

- Istnieje interpretacja $\mathrm{FM}(\mathcal{N})$ w $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$,
- Relacja względnej pierwszości wystarcza w modelach skończonych do reprezentacji semantyki,

Podsumowanie

- Istnieje interpretacja $\mathrm{FM}(\mathcal{N})$ w $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$,
- Relacja względnej pierwszości wystarcza w modelach skończonych do reprezentacji semantyki,
- Prawda jest niedefiniowalna w języku względnej pierwszości w modelach skończonych,

Podsumowanie

- Istnieje interpretacja $\mathrm{FM}(\mathcal{N})$ w $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$,
- Relacja względnej pierwszości wystarcza w modelach skończonych do reprezentacji semantyki,
- Prawda jest niedefiniowalna w języku względnej pierwszości w modelach skończonych,
- Teoria zdań prawdziwych w $\mathrm{FM}((\omega, \perp))$ jest nierozstrzygalna.

M. Mostowski.
On Representing Concepts in Finite Models.
Mathematical Logic Quarterly, 47:513–523, 2001.
Followed by interesting articles. Keep the list short.

M. Krynicki, K. Zdanowski.
Theories of Arithmetics in Finite Models.
The Journal of Symbolic Logic, 70(1):1–28, 2005.

M. Mostowski, A.E. Wasilewska.
Arithmetic of Divisibility in Finite Models.
Mathematical Logic Quarterly 50(2):169–174, 2004.

M. Mostowski, K. Zdanowski.
Coprimality in Finite Models.
Computer Science Logic: 19th Intrnational Workshop, CSL 2005, vol. 3634 of Lecture Notes in Computer Science, str. 263–275, Springer 2005.

M. Czarnecki.
Definicje prawdy w ubogich FM–dziedzinach.
http://www.mimuw.edu.pl/ fmur-lak/konkurs/prace2008/MCzarnecki.pdf

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ