Jaka logika jest intuicyjna?

Marek Czarnecki
Instytut Filozofii UW
marek.czarnecki@gmail.com

Krzysiek Kapulkin
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW
k.kapulkin@students.mimuw.edu.pl

11/09/2009

Początek XX wieku to okres szukania podstaw wiedzy matematycznej. Wśród wielu powstających wówczas koncepcji na czym oprzeć matematykę (np. teorii mnogości), pojawił się również pogląd zwany *intuicjonizmem*, by wiedza matematyczna była całkowicie zgodna z naszą intuicją. Przedstawiciele intuicjonizmu postulowali stosowanie w nauce jedynie pojęć, które dane są nam empirycznie, a zatem takich, co do których możemy mieć pewne intuicje. Ich sprzeciw budziły więc między innymi: pojęcie *aktualnej nieskończoności* oraz *dowody niekonstruktywne*.

Standardowym przykładem niekonstruktywnego rozumowania jest przedstawiony poniżej dowód następującego faktu: istnieją dwie liczby niewymierne a i b o tej własności, że a^b jest liczbą wymierną. Mówimy mianowicie: jeśli $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną, to właśnie znaleźliśmy $a = b = \sqrt{2}$ spełniające tezę. Załóżmy więc, że liczba $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną i przyjmijmy: $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ oraz $b = \sqrt{2}$. Wówczas

$$a^b = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2,$$

a zatem i w tym przypadku znaleźliśmy szukane liczby.

Zauważmy jednak, że powyższe rozumowanie nie daje nam informacji, jakie to liczby — nie wiemy, który z przypadków zachodzi. Taki dowód nazwiemy *niekonstruktywnym*.

Intuicjonista, nie akceptując tego typu rozumowań, odnajduje źródło problemu w klasycznej (tj. dwuwartościowej) logice. Konsekwentny intuicjonista musi odrzucić logikę w jej klasycznym kształcie, ponieważ okazuje się ona nieadekwatnym narzędziem do opisu dowodów konstruktywnych. Potrzebuje on zatem nowej logiki — logiki prawidłowych intuicjonistycznie rozumowań.

Poniżej przedstawimy trochę inne spojrzenie na rachunek zdań. Modyfikując znaczenie występujących w nim spójników, tj. nadając im nową interpretację, otrzymamy nowy język — bardziej odpowiedni do opisu rozumowań intuicjonistycznych. Jako pierwotne przyjmiemy pojęcie *konstrukcji.* Możemy patrzeć na konstrukcje jak na sposoby budowania nowych obiektów. Spróbujmy prześledzić, jak spójniki próbowali interpretować pierwsi intuicjoniści Brouwer, Heyting i Kołmogorow:

Konstrukcja *koniunkcji* $p \wedge q$ to para składająca się z konstrukcji p i konstrukcji q.

Konstrukcja *alternatywy* $p \vee q$ to para składająca się z konstrukcji p lub konstrukcji q oraz informacji, która część alternatywy została skonstruowana.

Konstrukcja *implikacji* $p \Rightarrow q$ to metoda, która każdą konstrukcję p zamienia na konstrukcję q.

Niech $\perp$ oznacza dowolne zdanie fałszywe. Wówczas konstrukcja $\perp$ nie istnieje.

Zauważmy, że pozostałe znane nam spójniki można łatwo otrzymać z już zdefiniowanych. Mianowicie, dla *negacji* przyjmujemy: $\neg p = p \Rightarrow\perp$, zaś dla *równoważności*: $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Co ciekawe (i zamierzone), przy takim spojrzeniu wiele twierdzeń, które znamy z logiki klasycznej, przestaje być twierdzeniami. Dla przykładu: *prawo wyłączonego środka* $p \vee \neg p$ nie jest twierdzeniem logiki intuicjonistycznej. Zwróćmy uwagę, że konstrukcja alternatywy to para, która oprócz konstrukcji jednego ze zdań p, $\neg p$ zawiera również informację, która konstrukcja została podana. Nie wiedząc nic więcej o p nie jesteśmy w stanie podać tej informacji.

Podobnie rzecz ma się z *prawem podwójnego przeczenia* $p \Leftrightarrow \neg\neg p$. Chcąc podać konstrukcję dla takiej formuły musimy w szczególności podać konstrukcję dla $\neg\neg p \Rightarrow p$, czyli sposób, w jaki z dowolnej konstrukcji $(p \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp$ wyprowadzać konstrukcję p. Jednak z konstrukcji $(p \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp$ nie ma możliwości uzyskania konstrukcji p, ponieważ w żadnym z następników nie występuje p. Przeciwna implikacja: $p \Rightarrow \neg\neg p$ jest natomiast poprawna. Spróbujmy ją udowodnić: dowolną konstrukcję p mamy zamienić na konstrukcję $\neg\neg p$. Mamy zatem następującą sytuację:

Dane konstrukcje:	Szukana konstrukcja:
p	$(p \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp$

Aby udowodnić implikację musimy podać metodę, która każdą konstrukcję $p \Rightarrow\perp$ zamienia na konstrukcję $\perp$. Weźmy więc konstrukcję $p \Rightarrow\perp$:

Dane konstrukcje:	Szukana konstrukcja:
p	
$p \Rightarrow\perp$	$\perp$

Stosujemy więc metodę $p \Rightarrow\perp$ do konstrukcji p, otrzymując konstrukcję $\perp$, co kończy dowód.

Choć zdanie $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ nie jest twierdzeniem logiki intuicjonistycznej, to zdanie $\neg p \Leftrightarrow \neg\neg\neg p$ już tak. Aby udowodnić równoważność, należy udowodnić implikacje w obie strony. Implikacja $\neg p \Rightarrow \neg\neg\neg p$ jest oczywista, ponieważ przyjmując $q = \neg p$ dostajemy $q \Rightarrow \neg\neg q$, co udowodniliśmy w poprzednim akapicie. Udowodnimy teraz $\neg p \Rightarrow \neg\neg\neg p$.

Dane konstrukcje:	Szukana konstrukcja:
$((p \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp$	$p \Rightarrow\perp$

Korzystamy z definicji konstrukcji implikacji:

Dane konstrukcje:	Szukana konstrukcja:
$((p \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp$	
p	$\perp$

Mając $((p \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp$, do otrzymania konstrukcji $\perp$ wystarczy znaleźć konstrukcję $(p \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp$:

Dane konstrukcje:	Szukana konstrukcja:
$((p \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp$	
p	$(p \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp$

Korzystając ponownie z definicji implikacji, otrzymujemy:

Dane konstrukcje:	Szukana konstrukcja:
$((p \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp) \Rightarrow\perp$	
p	
$p \Rightarrow\perp$	$\perp$

Ale teraz wystarczy zastosować metodę $p \Rightarrow \perp$ do p, ponieważ obie te konstrukcje mamy dane. Dowód został zakończony.

Ktoś mógłby zapytać dlaczego tak dziwna logika przetrwała do naszych czasów? Miarą logiki, jak każdej teorii matematycznej, jest jej zastosowanie do opisu pewnej rzeczywistości. Okazuje się mianowicie, że istnieje ścisła odpowiedniość pomiędzy dowodami w naszkicowanym powyżej rachunku zdań a programami komputerowymi pisanymi w dowolnym języku funkcyjnym (ściślej: termami λ-rachunku). Dowolny term λ-rachunku odpowiada dowodowi pewnej formuły w logice intuicjonistycznej, zaś każdy dowód ma swój odpowiednik wśród λ-termów. Powyższa odpowiedniość znana jest jako *izomorfizm Curry'ego—Howarda*, ale to już temat na inną opowieść.