Wojciech Rybak 347 219
gr. 13.

zadanie 1

5p.

Niech $A = \{x \in [0,1] : f(x) \geq x\}$.

Zbiór A jest niepusty (bo np. $0 \in A$) i ograniczony z góry (np. przez 1), ma zatem kres górny. Niech $x_0 = \sup A$. Pokażemy że $f(x_0) = x_0$.

Przypuśćmy nie wprost, że 1° $f(x_0) > x_0$. Wtedy z monotoniczności f byłoby $f(f(x_0)) > f(x_0)$ czyli $f(x_0) \in A$; wynika stąd sprzeczność, ponieważ $f(x_0) > \sup A$.

Przypuśćmy teraz, że 2° $f(x_0) < x_0$. Niech $\varepsilon = x_0 - f(x_0) > 0$. Z definicji kresu górnego wynika, że $\underset{x_1 \in A}{\exists}\ x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0]$, ponieważ $x_0 \notin A$ możemy przyjąć że $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$.

Wynikają stąd następujące nierówności: $x_1 > x_0 - \varepsilon = f(x_0)$ oraz $x_1 < x_0$.

Ponieważ $x_1 \in A$, $f(x_1) \geq x_1$. Mamy zatem $x_1 < x_0$ oraz $f(x_1) > f(x_0)$ – sprzeczność.

Pokazaliśmy, że $f(x_0) = x_0$.

1

zadanie 5.

Wojciech Rybak 347 219
gr 13

Twierdzenie (Borsuka-Ulama o antypodach):

Niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie okręgiem i $f: C \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą. Istnieje wtedy ~~par~~ na okręgu para punktów antypodycznych x_1 i x_2 takich, że $f(x_1) = f(x_2)$.

Dowód:

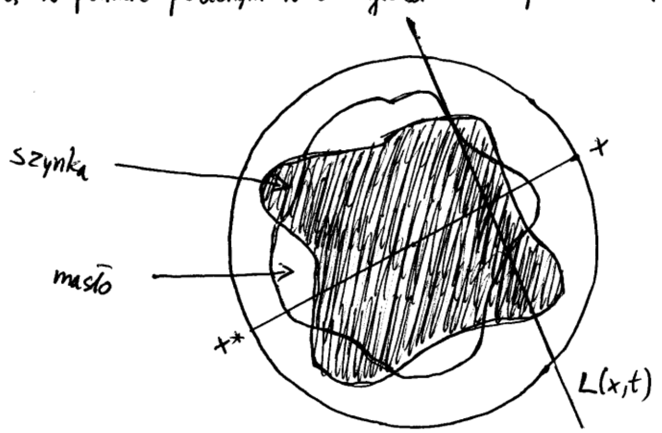
Wybierzmy $x \in C$. Na okręgu istnieje dla niego punkt antypodyczny $x^* \in C$. Zbadajmy funkcję $g: C \to \mathbb{R}$ daną wzorem $g(x) = f(x) - f(x^*) = a - b$ ($a = a(x)$, $b = b(x)$). Funkcja g jako różnica funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą (bo $x \mapsto x^*$ jest ciągłe). Ponadto $g(x^*) = f(x^*) - f(x) = b - a = -(a-b)$.

Jeżeli $a = b$ to wówczas $f(x) = f(x^*)$. Jeżeli $a \neq b$ to $f(x)$ i $f(x^*)$ są różnych znaków. (wtedy $g(x)$ i $g(x^*)$ są różnych znaków.)

Funkcja g jest ciągła i określona na zbiorze spójnym, więc istnieje taki punkt $x_1 \in C$, dla którego $g(x_1) = 0$. Oznacza to że $f(x_1) = f(x_1^*)$ □

Przyjmuję założenie, że kanapka jest ograniczona, a masło i szynka są płaskie.

Ponieważ kanapka jest ograniczona, istnieje okrąg C o średnicy d, wewnątrz którego leży masło i szynka. Wybierzmy punkt x leżący na okręgu C i poprowadźmy średnicę C przechodzącą przez x. Niech $L(x,t)$ będzie prostą prostopadłą do średnicy, przecinającą średnicę w punkcie położonym w odległości t od punktu x $(0 \leq t \leq d)$.



Niech $f_1(t)$ będzie polem tej części masła, która leży po tej samej stronie prostej $L(x,t)$ co punkt x i niech $f_2(t)$ będzie polem pozostałej części masła. Funkcje $f_1(t)$, $f_2(t)$ są określone na przedziale $[0,d]$ i są na nim ciągłe. Funkcja $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$ również jest ciągła na przedziale $[0,d]$. Zauważmy, że $f(0) = -(\text{pole masła})$ zaś $f(d) = (\text{pole masła})$.

Ponieważ $f(0)$ i $f(d)$ są przeciwnego znaku, więc na mocy tw. Bolzano, istnieje punkt $t \in [0,d]$

taki, że $f(t)=0$ czyli $f_1(t)=f_2(t)$. Oznacza to, że dla każdego punktu $x \in C$ istnieje prosta $L(x)$, która dzieli masło na dwie ~~równe~~ części o równych polach.

Oznaczmy przez $g_1(x)$ pole tej części szynki, która leży po tej samej stronie prostej $L(x)$ co punkt x, przez $g_2(x)$ pole pozostałej części szynki.
Rozważmy funkcję ciągłą* $g: C \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$.
Na mocy tw. Borsuka-Ulama, istnieje para punktów antypodycznych y i y^*, w których $g(y) = g(y^*)$. Ponieważ zachodzą równości
$g(y) = g_1(y) - g_2(y)$
$g(y^*) = g_1(y^*) - g_2(y^*)$
$g_1(y) = g_2(y^*)$
$g_2(y) = g_1(y^*)$

równość $g(y) = g(y^*)$ oznacza, że $g_1(y) - g_2(y) = g_2(y) - g_1(y)$
czyli $g_1(y) = g_2(y)$. Wobec tego prosta $L(y)$ dzieli i masło, i szynkę na dwie części o równych polach, zatem kanapkę należy przeciąć wzdłuż tej prostej.

1

* należało by jeszcze wykazać ciągłość g. Wynika to z ciągłej zależności L od x.