Nierówność Paleya

October 13, 2011

Układ Haara na $[0;1)$:

$$h_1 = \mathbf{1}_{[0;1)} \; h_2 = \mathbf{1}_{[0;\frac{1}{2})} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2};1)} \; h_3 = \mathbf{1}_{[0;\frac{1}{4})} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{4};\frac{1}{2})} \; h_4 = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2};\frac{3}{4})} - \mathbf{1}_{[\frac{3}{4};1)} \; h_5 = \mathbf{1}_{[0;\frac{1}{8})} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{8};\frac{1}{4})} \; h_6 = \mathbf{1}_{[\frac{1}{4};\frac{3}{8})} - \mathbf{1}_{[\frac{3}{8};\frac{1}{2})}$$

Twierdzenie 1. Niech $\bar{p} = max(p, \frac{p}{p-1})$ przy czym $1 < p < \infty$. Wówczas:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k h_k \right\|_p \leq (\bar{p} - 1) \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k h_k \right\|_p \tag{1}$$

dla dowolnych $a_k \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_k \in \{-1; 1\}$ oraz $n \geq 1$. Stała $\bar{p} - 1$ jest optymalna (czego nie pokażemy). Nierówność jest ostra wtedy i tylko wtedy gdy $p \neq 2$ oraz $(a_1, ..., a_n) \neq (0, ..., 0)$.

Dowód:
Zdefiniujmy $X_n, Y_n : [0;1) \to \mathbb{R}$ oraz $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ następująco:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_k + 1) a_k h_k$$

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_k - 1) a_k h_k$$

$$v(x, y) = \left| \frac{x + y}{2} \right|^p - (\bar{p} - 1)^p \left| \frac{x - y}{2} \right|^p$$

Niech teraz $Z_n = (X_n, Y_n)$. Mamy ($\mathbb{E}$ oznacza całkę lebesgue'a na $[0;1)$)

$$\mathbb{E} v(Z_n) = \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k h_k \right\|_p^p - (\bar{p} - 1)^p \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k h_k \right\|_p^p$$

Stad (1) jest równoważna

$$\mathbb{E} v(Z_n) \leq 0 \tag{2}$$

Zdefiniujmy

$$A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \left(1 - \frac{2}{\bar{p}}\right) x < y < x \right\}$$

$$A_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, -x < y < \left(1 - \frac{2}{\bar{p}}\right) x \right\}$$

$$\alpha(p) = p \left(\frac{\bar{p} - 1}{\bar{p}} \right)^{p-1}$$

Niech $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia $u(x, y) = u(y, x) = u(-x, -y)$ oraz dla $p > 2$

$$u(x, y) = \begin{cases} \alpha(p) x^p \left(1 - \frac{\bar{p}(x-y)}{2x}\right) & (x, y) \in A_1 \\ v(x, y) & (x, y) \in A_2 \end{cases}$$

Dla $p < 2$ A_1 i A_2 są zamienione miejscami. Natomiast dla $p = 2$ kładziemy $u(x, y) = xy$. Tak zdefiniowana u spełnia $u \leq v$ oraz jeśli $xy = 0$ to $u(x, y) \leq 0$ przy czym nierówność jest ostra jeżeli $(x, y) \neq (0, 0)$. Istnieją też jej pochodne cząstkowe. Ponadto dla $hk = 0$ zachodzi:

$$u(x+h, y+k) \leqslant u(x, y) + u_x(x, y)h + u_y(x, y)k \tag{3}$$

Własności te udowodnimy później.

$X_1Y_1 = \left(\varepsilon_1^2 - 1\right) a_1^2 h_1^2 = 0$ stąd $\mathbb{E}v(Z_1) \leq 0$. Niech teraz $n \geq 2$, wówczas

$$(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1}) = \left(\varepsilon_n^2 - 1\right) a_n^2 h_n^2 = 0$$

tak więc z (3) otrzymujemy

$$u(Z_n) \leq u(Z_{n-1}) + u_x(Z_{n-1})(X_n - X_{n-1}) + u_y(Z_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})$$

Ponieważ funkcje $h_1, ..., h_{n-1}$ są stałe na nośniku (bez domknięcia) h_n oraz $\mathbb{E}h_n = 0$ to

$$\mathbb{E}u_x(Z_{n-1})(X_n - X_{n-1}) = \mathbb{E}u_y(Z_{n-1})(Y_n - Y_{n-1}) = 0 \tag{4}$$

W konsekwencji

$$\mathbb{E}v(Z_n) \leq \mathbb{E}u(Z_n) \leq \mathbb{E}u(Z_{n-1}) \leq ... \leq \mathbb{E}u(Z_1) \leq 0 \tag{5}$$

czyli nierówność (1) jest spełniona.

Zajmijmy się teraz ostrością nierówności. Jeżeli $p = 2$ to $u(x, y) = xy$ oraz

$$v(x, y) = \left|\frac{x+y}{2}\right|^2 - \left|\frac{x-y}{2}\right|^2 = xy = u(x, y)$$

argumentując analogicznie jak w (4) mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}u(Z_n) &= \mathbb{E}X_nY_n = \mathbb{E}(X_{n-1} + (X_n - X_{n-1}))(Y_{n-1} + (Y_n - Y_{n-1})) = \\ &= \mathbb{E}X_{n-1}Y_{n-1} + \mathbb{E}Y_{n-1}(X_n - X_{n-1}) + \mathbb{E}X_{n-1}(Y_n - Y_{n-1}) = \mathbb{E}X_{n-1}Y_{n-1} = \mathbb{E}u(Z_{n-1}) \end{aligned}$$

Ponadto $\mathbb{E}u(Z_1) = \mathbb{E}X_1Y_1 = 0$, tak więc w (5) nierówności zamieniają się w równości i ostatecznie w (1) także mamy równość.

Jeżeli $(a_1, ..., a_n) = (0, ..., 0)$ to w (1) mamy oczywiście równość, załóżmy więc teraz $p \neq 2$ i $(a_1, ..., a_n) \neq (0, ..., 0)$ i niech $m = min\left(\{k \mid a_k \neq 0\}\right)$. Wtedy $X_mY_m = 0$ ale $(X_m, Y_m) \neq 0$ na $supp(h_n)$, czyli $u(Z_m) \leq 0$ przy czym nierówność jest ostra na $supp(h_m)$ o niezerowej mierze. Stąd $\mathbb{E}v(Z_n) \leq \mathbb{E}u(Z_n) \leq \mathbb{E}u(Z_m) < 0$ i w (1) mamy ostrą nierówność.

Pozostaje udowodnić własności funkcji u. Przypadek $p = 2$ jest trywialny. Rozważmy więc $p > 2$. Poza prostymi $x = -y$, $x = y$, $y = \left(1 - \frac{2}{\bar{p}}\right) x$ oraz $x = \left(1 - \frac{2}{\bar{p}}\right) y$ mamy $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right)$. Oznaczmy $w(x, y) = \alpha(p)x^p \left(1 - \frac{\bar{p}(x-y)}{2x}\right) = \left(\alpha(p) - \frac{\bar{p}}{2}\right) x^p + \frac{\alpha(p)\bar{p}y}{2} x^{p-1}$.

$$w_x(x, y) = \alpha(p)p\left(1 - \frac{\bar{p}}{2}\right) x^{p-1} + (p-1)\frac{\alpha(p)\bar{p}y}{2} x^{p-2}$$

$$w_y(x, y) = \frac{\alpha(p)\bar{p}x^{p-1}}{2}$$

Dla $x > 0$ i $-x < y < x$

$$v_x(x, y) = \frac{p}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p-1} - \frac{p(\bar{p}-1)^p}{2}\left(\frac{x-y}{2}\right)^{p-1}$$

$$v_y(x, y) = \frac{p}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p-1} + \frac{p(\bar{p}-1)^p}{2}\left(\frac{x-y}{2}\right)^{p-1}$$

$$\begin{aligned} u_x(x+, \left(1 - \frac{2}{\bar{p}}\right) x) = v_x(x, \left(1 - \frac{2}{\bar{p}}\right) x) &= \frac{p}{2}\left(\frac{\bar{p}-1}{\bar{p}}\right)^{p-1} x^{p-1} - \frac{p(\bar{p}-1)^p}{2}\left(\frac{1}{\bar{p}}\right)^{p-1} x^{p-1} = \\ = x^{p-1}\left(p\left(\frac{\bar{p}-1}{\bar{p}}\right)^{p-1}\left(\frac{1-(\bar{p}-1)}{2}\right)\right) &= x^{p-1}\alpha(p)\left(1 - \frac{\bar{p}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(x-, \left(1 - \frac{2}{\bar{p}}\right) x) = w_x(x, \left(1 - \frac{2}{\bar{p}}\right) x) &= x^{p-1}\alpha(p)\left(p\left(1 - \frac{\bar{p}}{2}\right) + (p-1)\frac{\bar{p}\left(1 - \frac{2}{\bar{p}}\right)}{2}\right) = \\ = x^{p-1}\alpha(p)\left(p + \frac{-2p + 2 - \bar{p}}{2}\right) &= x^{p-1}\alpha(p)\left(1 - \frac{\bar{p}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$u_y(x+,\left(1-\frac{2}{\bar p}\right)x)=v_y(x,\left(1-\frac{2}{\bar p}\right)x) = \frac{p}{2}\left(\frac{\bar p-1}{\bar p}\right)^{p-1}x^{p-1}+\frac{p(\bar p-1)^p}{2}\left(\frac{1}{\bar p}\right)^{p-1}x^{p-1}=$$

$$=x^{p-1}\left(p\left(\frac{\bar p-1}{\bar p}\right)^{p-1}\left(\frac{1+(\bar p-1)}{2}\right)\right) = \frac{\alpha(p)\bar p x^{p-1}}{2}$$

$$u_y(x-,\left(1-\frac{2}{\bar p}\right)x)=w_y(x,\left(1-\frac{2}{\bar p}\right)x)=\frac{\alpha(p)\bar p x^{p-1}}{2}$$

$$u_x(x+,x)=w_x(x,x) = \alpha(p)p\left(1-\frac{\bar p}{2}\right)x^{p-1}+(p-1)\frac{\alpha(p)\bar p}{2}x^{p-1}=$$

$$=\alpha(p)x^{p-1}\left(p-\frac{\bar p}{2}\right) = \frac{\alpha(p)x^{p-1}p}{2}=w_y(x,x)=u_x(x-,x)$$

$$u_x(x+,-x)=v_x(x,-x)=-\frac{p(\bar p-1)^p}{2}x^{p-1}=u_x(x-,-x)$$

$$u_y(x+,-x)=\frac{p(\bar p-1)^p}{2}\left(\frac{x-y}{2}\right)^{p-1}=u_y(x-,-x)$$

tak więc u_x oraz u_y istnieją i są ciągłe (pozostałe przypadki wynikają z symetrii).

$$w_{xx}(x,y)=\alpha(p)p(p-1)\left(1-\frac{\bar p}{2}\right)x^{p-2}+(p-1)(p-2)\frac{\alpha(p)\bar p y}{2}x^{p-3} \le x^{p-2}\alpha(p)(p-1)\left(p\left(1-\frac{\bar p}{2}\right)+(p-2)\frac{\bar p}{2}\right)=$$

$$=x^{p-2}\alpha(p)(p-1)(p-\bar p) \le 0$$

$$w_{yy}(x,y)=0$$

$$w_{xy}(x,y)=(p-1)\frac{\alpha(p)\bar p}{2}x^{p-2}\ge 0$$

Dla $x>0$ i $\left(1-\frac{2}{\bar p}\right)>y>-x$

$$v_{xx}(x,y)=\frac{p}{4}(p-1)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p-2}-\frac{p(\bar p-1)^p}{4}(p-1)\left(\frac{x-y}{2}\right)^{p-2} = \frac{p}{4}(p-1)\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p-2}-(\bar p-1)^p\left(\frac{x-y}{2}\right)^{p-2}\right)\le$$

$$\le\frac{p}{4}(p-1)\left(1-\frac{2}{\bar p}\right)^{p-2}\left(\left(1-\frac{1}{\bar p}\right)^{p-2}-(\bar p-1)^p\left(\frac{1}{\bar p}\right)^{p-2}\right)\le$$

$$\le\frac{p}{4}(p-1)\left(1-\frac{2}{\bar p}\right)^{p-2}(\bar p-1)^{p-2}\left(\frac{1}{\bar p}\right)^{p-2}\left(1-(\bar p-1)^2\right)\le 0$$

$$v_{yy}(x,y)=\frac{p}{4}(p-1)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p-2}-\frac{p(\bar p-1)^p}{4}\left(\frac{x-y}{2}\right)^{p-2}\le 0$$

$$v_{xy}(x,y)=\frac{p}{2}(p-1)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p-2}+\frac{p(\bar p-1)^p}{2}(p-1)\left(\frac{x-y}{2}\right)^{p-2}\ge 0$$

$y<-x$:

$$v(x,y)=\left(\frac{-x-y}{2}\right)^p-(\bar p-1)^p\left(\frac{x-y}{2}\right)^p$$

$$v_x(x,y)=\frac{-p}{2}\left(\frac{-x-y}{2}\right)^{p-1}-\frac{p(\bar p-1)^p}{2}\left(\frac{x-y}{2}\right)^{p-1}$$

$$v_{xx}(x,y)=\frac{p}{4}(p-1)\left(\frac{-x-y}{2}\right)^{p-2}-\frac{p(\bar p-1)^p}{4}(p-1)\left(\frac{x-y}{2}\right)^{p-2}=\frac{p}{4}(p-1)\left(\left(\frac{-x-y}{2}\right)^{p-2}-(\bar p-1)^p\left(\frac{x-y}{2}\right)^{p-2}\right)\le 0$$

$$v_{yy}(x,y)=\frac{p}{4}(p-1)\left(\frac{-x-y}{2}\right)^{p-2}-\frac{p(\bar p-1)^p}{4}(p-1)\left(\frac{x-y}{2}\right)^{p-2}\le 0$$

$$v_{xy}(x,y)=\frac{p}{2}(p-1)\left(\frac{-x-y}{2}\right)^{p-2}+\frac{p(\bar p-1)^p}{2}(p-1)\left(\frac{x-y}{2}\right)^{p-2}\ge 0$$

Tak więc $u_{xx}, u_{yy} \leq 0$ oraz $u_{xy} \leq 0$.

Ustalmy teraz x, y i weźmy$hk \leq 0$ takie, że $h + k \neq 0$. Wówczas funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(t) = u(x + ht, y + kt)$ jest dwukrotnie rózniczkowalna w otoczeniu $(x + ht, y + kt)$ dla wszystkich oprócz skończenie wielu wartości t, oraz

$$g''(t) = h^2 u_{xx}(x + ht, y + kt) + 2hku_{xy} + k^2 u_{yy} \leq 0$$

i z ciągłości g', g jest wklęsła i (3) zachodzi gdy dać $t = 0$. Warunek $u(x, y) \leq 0$ gdy $xy \leq 0$ (ostra nierówność gdy $(h, k) \neq (0, 0)$ i $p \neq 2$) wynika wprost ze wzoru na v.

Pozostało nam pokazać, że $v \leq u$ na A_1. Ustalmy $x > 0$ i połóżmy $a = \left(1 - \frac{2}{\bar{p}}\right) x$ $b = x$ i niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(y) = u(x, y) - v(x, y)$. Wówczas f' ciągła na $[a; b]$, $f''(y) = -v_{yy}(x, y)$.

$$f(a) = \alpha(p)x^p \left(1 - \frac{\bar{p}(1 - 1 + \frac{2}{\bar{p}})}{2}\right) - \left|1 - \frac{1}{\bar{p}}\right|^p + (\bar{p} - 1)^p \left|\frac{1}{\bar{p}}\right|^p = 0$$

$$\alpha(p) = p\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{p-1} \geq p\left(1 - \frac{p-1}{p}\right) = 1$$

$$f(b) = (\alpha(p) - 1)x^p \geq 0$$

Z postaci f'' widzimy, że istnieje $c \in (a, b)$ tż $f''(y) \geq 0$ dla $a < y \leq c$ i $f''(y) \leq 0$ dla $c \leq y < b$. Stąd $f'(y) \geq 0$ na $[a; c]$ a więc f jest tam nieujemna, a skoro f wypukła na $[c; b]$ i nieujemna na krańcach to f nieujemna na całym przedziale. Czyli $v \leq u$. Przypadek $p \leq 2$ analogicznie.

Twierdzenie 2. Niech $\bar{p} = max(p, \frac{p}{p-1})$ przy czym $1 < p < \infty$. Wówczas:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} w_k d_k\right\|_p \leq (\bar{p} - 1)\left\|\sum_{k=1}^{n} d_k\right\|_p \tag{6}$$

dla dowolnych mierzalnych $w_k \in [0; 1) \to [-1; 1]$ oraz $d_k \in [0; 1) \to \mathbb{R}$ o skończonej p-tej normie, takich że d_{k+1} jest ortogonalna do każdej ciągłej i ograniczonej funkcji $w_1, ..., w_{k+1}, d_1, ..., d_k$. Stała $\bar{p} - 1$ jest optymalna (czego nie pokażemy). Jeśli $\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} d_k\right\|_p > 0$ to równość jest wtedy i tylko wtedy gdy $p = 2$ oraz $\sum\limits_{k=1}^{n} w_k^2 d_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k^2$ p.n.

Dowód:

Weźmy u, v takie jak poprzednie, ale tym razem $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(w_k + 1)d_k$ $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(w_k - 1)d_k$ $Z_n = (X_n, Y_n)$. Zauważmy, że:

$$X_1 Y_1 = (w_1^2 - 1)d_1^2 \leq 0$$

$$(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1}) = (w_n^2 - 1)d_n^2 \leq 0$$

tak więc z własności u mamy $\mathbb{E}u(Z_1) \leq 0$, a z (3):

$$u(Z_n) \leq u(Z_{n-1}) + u_x(Z_{n-1})(X_n - X_{n-1}) + u_y(Z_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})$$

Z ograniczenia $|u|$ przez $c_1(|x|^p + |y|^p)$ oraz $|u_x|$ przez $c_2(|x|^{p-1} + |x|^{p-1})$ mam całkowalność $u(Z_n)$, $u(Z_{n-1})$, $u_x(Z_{n-1})(X_n - X_{n-1})$, $u_y(Z_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})$. Każda z dwóch ostatnich funkcji jest postaci $d_n * F$ gdzie F ciągła funkcja $w_1, ..., w_n, d_1, ..., d_{n-1}$. Niech $F_j = max(-j, min(F, j))$ wówczas z twierdzenia o zbieżnośći zmajoryzowanej i ortogonalności d_n:

$$\mathbb{E}F(w_1, ..., w_n, d_1, ..., d_{n-1})d_n = \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}F_j(w_1, ..., w_n, d_1, ..., d_{n-1})d_n = 0$$

Stąd $\mathbb{E}v(Z_n) \leq \mathbb{E}u(Z_n) \leq \mathbb{E}u(Z_{n-1}) \leq ... \leq \mathbb{E}u(Z_1) \leq 0$ i nierówność (6) jest spełniona. Ostrość analogicznie jak w twierdzeniu 1, a przypadek $p = 2$ jest oczywisty.