Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Robert Bogucki
Nr albumu: 291513

Układy biortogonalne w ośrodkowych przestrzeniach Banacha

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra hab. Michała Wojciechowskiego

Maj 2012

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data | Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data | Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W pracy wykazano podstawowe fakty na temat istnienia układów biortogonalnych w ośrodkowych przestrzeniach Banacha. Została też zaprezentowana konstrukcja bazy Auerbacha w podprzestrzeni c_0 skończonego kowymiaru.

Słowa kluczowe

baza Auerbacha, układ biortogonalny, baza Markushevicha

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

46B15, 46B20

Tytuł pracy w języku angielskim

Biorthogonal sequences in separable Banach spaces

Spis treści

Wprowadzenie

Problem istnienia bazy Auerbacha w skończenie wymiarowej przestrzeni Banacha ma proste, klasyczne rozwiązanie. Niestety sprawa jest o wiele trudniejsza w przypadku nieskończenie wymiarowych, ośrodkowych przestrzeni Banacha. Naiwnymi metodami jesteśmy w stanie wyprodukować totalny i fundamentalny układ biortogonalny, niestety nie mamy żadnej gwarancji, że będzie on ograniczony. Aby otrzymać ograniczoność trzeba podejść do tego problemu nieco subtelniej. W 1975 problem ten został rozwiązany po raz pierwszy przez A. Pełczyńskiego oraz R. Ovsepiana, w 1976 A. Pełczyński wzmocnił ten wynik otrzymując prawie - bo z dokładnością do $\varepsilon > 0$ bazę Auerbacha. Problem, czy istnieje ośrodkowa przestrzeń Banacha, dla której nie możemy pominąć ε jest nadal otwarty.

W rozdziale 1 zostaną przedstawione podstawowe, wyżej wspomniane, fakty dotyczące tej teorii. W rozdziale 2, konstrukcyjnie pokażemy, że dla podprzestrzeni c_0 skończonego kowymiaru ε da się pominąć - istnieje uczciwa baza Auerbacha.

Zanim przejdziemy dalej, przypomnijmy użytecznie oznaczenia, definicje i twierdzenia.

Przez $\mathrm{span}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$ rozumiemy zbiór wszystkich skończonych kombinacji liniowych elementów $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, przez $[x_n]_{n=1}^{\infty}$ oznaczmy domknięcie $\mathrm{span}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$. $(x|y)$ oznaczać będzie formalną sumę $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ przy czym granica sumowania będzie wynikała z kontekstu. $H^{\perp}$ to dopełnienie ortogonalne H.

Definicja 0.1. *Układ $(x_n; x_n^*)$, gdzie $x_n \in X$, a $x_n^* \in X^*$ - przestrzeń dualna do X, nazwiemy:*

(i) biortogonalnym, o ile $x_k^*(x_j) = \delta_{k,j}$ dla $k, j = 1, 2, ...,$

(ii) totalnym, o ile warunek "$x_n^*(x) = 0$ dla każdego $n = 1, 2, ...$" implikuje $x = 0$,

(iii) fundamentalnym, o ile $[x_n]_{n=1}^{\infty} = X$ (równoważnie - warunek "$x^*(x_n) = 0$ dla każdego $n = 1, 2, ...$" implikuje $x^* = 0$),

(iv) ograniczonym przez M, o ile $\|x_n\|\|x_n^*\| \leq M$ dla każdego $n = 1, 2, ...$

Definicja 0.2. *Baza Auerbacha X to układ $(x_n; x_n^*)$ spełniający (i), (ii), (iii), o własności $\|x_n\| = \|x_n^*\| = 1$ dla $n = 1, 2, ...$*

Biortogonalny, totalny i fundamentalny układ jest też w literaturze nazywany bazą Markushevicha.

Definicja 0.3. *Macierz Walsha o wymiarach $2^r \times 2^r$ to ortonormalna macierz $2^{-r/2}H(2^r)$ gdzie $H(2^r)$ definiujemy indukcyjnie*

$$H(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$H(2^{k+1}) = \begin{bmatrix} H(2^k) & H(2^k) \\ H(2^k) & -H(2^k) \end{bmatrix}.$$

Definicja 0.4. *N-wymiarową Przestrzeń Banacha X nazwiemy ε-Euklidesową, jeżeli istnieje N-wymiarowa przestrzeń Hilberta l_2^N oraz izomorfizm $T : X \to l_2^N$ taki, że*

$$\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon.$$

Twierdzenie (Dvoretzky, [DVR], [PIS]). *Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i N - liczby naturalnej, istnieje stała $C(\varepsilon, N)$ taka, że każda przestrzeń Banacha X o wymiarze co najmniej $C(\varepsilon, N)$ posiada N-wymiarową ε-Euklidesową podprzestrzeń.*

Twierdzenie (Borsuk, [BOR]). *Niech $f : S^n \to R^n$ będzie ciągła oraz antypodyczna ($f(-x) = -f(x)$), wówczas istnieje $x \in S^n$ taki, że $f(x) = 0$.*

Twierdzenie (Hadamard, [HAD]). *Niech A będzie macierzą o wierszach $v_1, v_2, ..., v_n$; wówczas*

$$|\det(A)| \leq \prod_{k=1}^{n} \|v_k\|.$$

Twierdzenie (Helly, [MEG]). *Niech X będzie unormowaną przestrzenią, $f_1, f_2, ..., f_n$ ograniczonymi funkcjonałami na X, $c_1, c_2, ..., c_n$ skalarami i $M > 0$. Załóżmy, że dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ zachodzi*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \right\|.$$

Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $x \in X$ taki, że $\|x\| < M + \varepsilon$ oraz $f_j(x) = c_j$ dla $j = 1, 2, ..., n$.

Jako wniosek z powyższego otrzymujemy.

Twierdzenie (Helly). *Niech X będzie przestrzenią Banacha, $x^{**} \in X^{**}$, $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* \in X^*$ oraz $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $x \in X$ taki, że $\|x\| < \|x^{**}\| + \varepsilon$ oraz $x_j^*(x) = x^{**}(x_j^*)$ dla $j = 1, 2, ..., n$.*

Rozdział 1

Ogólna teoria układów biortogonalnych

1.1. Przypadek skończenie wymiarowy

Twierdzenie 1.1 (Auerbach, [CBS]). *Każda skończenie wymiarowa przestrzeń Banacha ma bazę Auerbacha.*

Dowód. Niech $n = \dim(X)$ oraz $X = \mathrm{span}(v_1, ..., v_n)$. Niech $V(z_1, ..., z_n) = \det(y_1, ..., y_n)$ gdzie y_k to wektor współrzędnych z_k w bazie $\{v_i\}_{i=1}^n$. V jest ciągłą funkcją na produkcie n kopii domkniętej kuli jednostkowej X, wobec czego osiąga swoje maksimum M w jakimś punkcie $(x_1, ..., x_n)$. Połóżmy

$$x_k^*(x) = V(x_1, ..., x_{k-1}, x, x_{k+1}, ..., x_n)/M.$$

Z liniowości wyznacznika wynika, że są to funkcjonały liniowe, a ponieważ wyznacznik zeruje się jeżeli kolumny się powtarzają, układ jest biortogonalny. Równość $\|x_k\| = \|x_k^*\| = 1$ wynika wprost z konstrukcji. Tak więc $(x_k; x_k^*)_{k=1}^n$ jest bazą Auerbacha w X.

□

1.2. Przypadek nieskończenie wymiarowy

Okazuje się, że rozumowanie podobne do ortogonalizacji Gramma-Schmidta prowadzi nas do uzyskania totalnego, fundamentalnego układu biortogonalnego.

Twierdzenie 1.2 (Markushevich, [MAR], [CBS]). *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha, wówczas X posiada układ biortogonalny, którego wektory są fundamentalne, a funkcjonały totalne.*

Dowód. Ośrodkowość gwarantuje nam istnienie niezerowych wektorów takich, że $[y_i]_{i=1}^\infty = X$ oraz funkcjonałów $\{y_i^*\}_{i=1}^\infty$ rozdzielających punkty X. Indukcyjnie skonstruujemy poszukiwany układ. Niech $x_0 = 0$ oraz $x_0^* = 0$. Niech teraz $n > 0$ i załóżmy, że wybraliśmy już $(x_i; x_i^*$ dla $i < n$. Rozważmy dwa przypadki.

1) $n = 2k + 1$ dla pewnego $k \geq 0$. Niech j będzie najmniejszym indeksem takim, że $y_j \notin \mathrm{span}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, kładziemy

$$x_n = y_j - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_i^*(y_j),$$

dobierając teraz j' tak aby $y^*_{j'}(x_n) \neq 0$ bierzemy

$$x^*_n = \left(y^*_{j'} - \sum_{i=1}^{n-1} x^*_i y^*_{j'}(x_i) \right) / y^*_{j'}(x_n).$$

2) $n = 2k$ dla pewnego $k \geq 1$. Niech j będzie najmniejszym indeksem takim, że $y^*_j \notin \operatorname{span}(x^*_1, x^*_2, ..., x^*_{n-1})$, kładziemy

$$x_n = y^*_j - \sum_{i=1}^{n-1} x^*_i y^*_j(x_i),$$

dobierając teraz j' tak aby $x^*_n(y_{j'}) \neq 0$ bierzemy

$$x_n = \left(y_{j'} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x^*_i(y_{j'}) \right) / x^*_n(y_{j'}).$$

W ten sposób zapewniamy $\operatorname{span}(\{y^*_i\}_{i=1}^n) \subset \operatorname{span}(\{x^*_i\}_{i=1}^{2n})$ oraz $\operatorname{span}(\{y_i\}_{i=1}^n) \subset \operatorname{span}(\{x_i\}_{i=1}^{2n})$, co w konsekwencji daje nam totalność i fundamentalność. Biortogonalność wynika z samej konstrukcji. □

Niestety ta prosta konstrukcja zawodzi, jeżeli chodzi o kontrolę norm. Konkretniej, nie możemy zagwarantować, że $\sup_n \|x_n\| \|x^*_n\| < \infty$. Problem ten został po raz pierwszy rozwiązany w pracy A. Pełczyńskiego i R. Ovsepiana [PEL1] ze stałą około 20. Niedługo później w [PEL2] A. Pełczyński poprawił stałą do $1 + \varepsilon$. Dowód bazuje na następującym lemacie.

Lemat (Dvoretzky, Milman, [DVR], [MIL], [PEL2])**.** *Dla $\delta > 0$ oraz liczb naturalnych n, m, N znajdziemy całkowitą stałą $M(\delta, n, m, N)$ taką, że jeśli Y jest przestrzenią Banacha wymiaru większego niż M, to dla każdej E - n-wymiarowej podprzestrzeni liniowej Y oraz Y_1 podprzestrzeni liniowej Y kowymiaru m, istnieje F - podprzestrzeń liniowa Y spełniająca następujące warunki:*

(i) $\dim F = N, F \subset Y_1, F \cap E = \{0\}$,

(ii)

$$\|P\| < 1 + \delta,$$

gdzie $P : E + F \to_{na} F$ jest rzutem takim, że $\ker P = E$,

(iii) istnieje izomorfizm $T : l_2^N \to_{na} F$ spełniający

$$\max(\|T\|, \|T^{-1}\|) < 1 + \delta.$$

Dowód powyższego lematu można znaleźć w dodatku. Przejdźmy teraz do głównego twierdzenia tej sekcji.

Twierdzenie 1.3 (Pełczyński, [PEL2])**.** *Niech X będzie nieskończenie wymiarową, ośrodkową przestrzenią Banacha. Wówczas, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje układ biortogonalny $(x_n; x^*_n)$ taki, że jego wektory są fundamentalne, a funkcjonały totalne oraz $\sup_n \|x_n\| \|x^*_n\| < 1 + \varepsilon$.*

Dowód. Ośrodkowość gwarantuje nam istnienie niezerowych wektorów takich, że $[y_i]_{i=1}^{\infty} = X$ oraz funkcjonałów $\{y^*_i\}_{i=1}^{\infty}$ rozdzielających punkty X. Ustalmy też $0 < \varepsilon < 1$. Indukcyjnie skonstruujemy układ $(x_n; x^*_n)$ i rosnący ciąg indeksów n_s o właściwościach:

(i) $(x_1, x_2, ..., x_{n_s};\ x_1^*, x_2^*, ..., x_{n_s}^*)$ jest biortogonalny,

(ii) $\max(\|x_k\|, \|x_k^*\|) < 1 + \varepsilon$ dla $k = 1, 2, ..., n_s$,

(iii) $\mathrm{span}(\{x_k\}_{k \leq n_{2s-1}}) \supset \mathrm{span}(\{y_k\}_{k \leq s})$,

(iv) $\mathrm{span}(\{x_k^*\}_{k \leq n_{2s}}) \supset \mathrm{span}(\{y_k^*\}_{k \leq s})$,

dla $s = 1, 2, \ldots$. Konstrukcję zaczynamy od $x_0 = 0, x_0^* = 0$ i $n_0 = 0$. Przyjmijmy teraz, że dla $s \geq 0$ udało nam się skonstruować układ spełniający (i) - (iv) dla wszystkich liczb niewiększych niż s, pokażemy jak wykonać następny krok indukcji. W tym celu rozważymy dwa przypadki.

1) $s + 1 = 2m - 1$ dla pewnego $m \geq 0$. Analogicznie jak w Twierdzeniu 1.2, używając biortogonalizacji możemy wybrać $y \in X$ oraz $y^* \in X^*$ tak aby

$$\mathrm{span}(x_1, x_2, ..., x_{n_s}, y) \supset \mathrm{span}(\{y_k\}_{k \leq m})$$

oraz układ

$$(x_1, x_2, ..., x_{n_s}, y;\ x_1^*, x_2^*, ..., x_{n_s}^*, y^*)$$

był biortogonalny. Weźmy teraz r gwarantujące nam

$$\frac{\|y\| + \|y^*\|}{2^{r/2}} \leq \varepsilon/4$$

i połóżmy $n_{s+1} = n_s + 2^r$. Zaaplikujmy teraz lemat Dvoretzky'ego-Milmana dla $Y = X$, $N = 2^r - 1$, $E = \mathrm{span}(x_1, x_2, ..., x_{n_s}, y)$, $\delta = \varepsilon/4$, $Y_1 = \ker y^* \cap \bigcap_{k \leq n_s} \ker x_k^*$, otrzymując F - podprzestrzeń X, rzut P oraz izomorfizm T. Przez e_k będziemy oznaczać wersory w l_2^N, a przez e_k^* odpowiadające im funkcjonały. Połóżmy teraz $u_k = Te_k$, $u_k^* = (T^{-1})^* e_k^*$ i niech w_k oznacza k-ty wiersz macierzy Walsha o wymiarze $2^r \times 2^r$ i niech

$$v = (y, u_1, u_2, ..., u_N),$$

$$v^* = (y^*_{|E+F}, P^* u_1^*, P^* u_2^*, ..., P^* u_n^*).$$

Dla $i = 1, 2, .., 2^r$ połóżmy $x_{n_t+i} = (w_i|v)$ oraz niech $x_{n_t+i}^*$ będzie przedłużeniem zachowującym normę funkcjonału $(w_i|v^*) \in (E+F)^*$. Sprawdzimy teraz warunek (i), czyli $x_i^*(x_k) = \delta_{ik}$ gdzie $i, k \leq n_{s+1}$. Dla $i, k \leq n_s$ działa założenie indukcyjne, jeżeli $i, k > n_s$ to korzystamy z ortogonalności macierzy Walsha i biortogonalności układu

$$(y, u_1, u_2, ..., u_N; y^*_{|E+F}, P^* u_1^*, P^* u_2^*, ..., P^* u_n^*).$$

Przypadek $i \leq n_s < k$ wynika z tego, że $x_i^*(y) = 0$ (tak wybraliśmy y) oraz $x_i^*(u_j) = 0$ dla $1 \leq j \leq N$, ponieważ $F \subset \ker x_i^*$. Pozostało rozpatrzeć przypadek $k \leq n_s < i$. Mamy $y^*(x_k) = 0$, $P^* u_j^*(x_k) = u_j^*(Px_k) = u_j^*(0) = 0$ dla $1 \leq j \leq N$, gdyż $x_k \in E = \ker P$. Sprawdzenie (ii) wymaga prostych obliczeń. Ponieważ układ $\{e_k\}_{k \leq N}$ jest ortonormalny, mamy

$$\left\| \sum_{j=2}^{2^r} w_i^j e_{j-1} \right\|^2 = \sum_{j=2}^{2^r} \left\| w_i^j e_{j-1} \right\|^2 = \sum_{j=2}^{2^r} 2^{-r} = 1 - 2^r < 1,$$

analogicznie

$$\left\| \sum_{j=2}^{2^r} w_i^j e_{j-1}^* \right\|^2 < 1.$$

Wobec tego

$$\|x_{n_t+i}\| \leq 2^{-r/2}\|y\| + \|T\| \left\| \sum_{j=2}^{2^r} w_i^j e_{j-1} \right\| < \varepsilon/4 + 1 + \varepsilon/4 < 1 + \varepsilon,$$

$$\|x^*_{n_t+i}\| \leq 2^{-r/2}\|y^*\| + \|P^*\|\|(T^{-1})^*\| \left\| \sum_{j=2}^{2^r} w_i^j e^*_{j-1} \right\| < \varepsilon/4 + (1 + \varepsilon/4)^2 < 1 + \varepsilon.$$

Warunek (iii) wynika wprost z konstrukcji, a (iv) dostajemy za darmo.

2) $s + 1 = 2m$ dla pewnego $m \geq 0$. Analogicznie jak w 1) możemy wybrać $y \in X$ oraz $y^* \in X^*$ tak aby

$$\mathrm{span}(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n_s}^*, y^*) \supset \mathrm{span}(\{y_k^*\}_{k \leq m})$$

oraz układ

$$(x_1, x_2, ..., x_{n_s}, y;\; x_1^*, x_2^*, ..., x_{n_s}^*, y^*)$$

był biortogonalny. Weźmy też r gwarantujące nam

$$\frac{\|y\| + \|y^*\|}{2^{r/2}} \leq \varepsilon/4$$

i połóżmy $n_{s+1} = n_s + 2^r$. Ponownie aplikujemy lemat Dvoreztky'ego-Milmana tym razem dla $Y = X^*$, $N = 2^r - 1$, $E = \mathrm{span}(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n_s}^*, y^*)$, $\delta = \varepsilon/4$, $Y_1 = \ker y \cap \bigcap_{k \leq n_s} \ker x_k$ (element X można traktować jako funkcjonał na X^*), otrzymując F - podprzestrzeń X^*, rzut P oraz izomorfizm T. Ponownie, połóżmy $u_k = Te_k$, $u_k^* = (T^{-1})^* e_k^*$ (tym razem $T : l_2^N \to X^*$) i

$$v = (y^*, u_1, u_2, ..., u_N),$$

$$v^* = (y_{|E+F}, P^*u_1^*, P^*u_1^*, ..., P^*u_n^*).$$

Dla $i = 1, 2, .., 2^r$ niech $x^*_{n_t+i} = (w_i|v)$ oraz niech $x^{**}_{n_t+i}$ będzie przedłużeniem zachowującym normę funkcjonału $(w_i|v^*)$. Na mocy twierdzenia Helly'ego możemy zdefiniować x_{n_t+i} jako element X taki, że

$$\|x_{n_t+i}\| \leq \|x^{**}_{n_t+i}\|(1 + \varepsilon/16)$$

oraz spełniający dla $k = 1, 2, ..., n_{t+1}$

$$x_k^*(x_{n_t+i}) = x^{**}_{n_t+i}(x_k^*).$$

Analogicznie jak w 1) warunki (i)-(iv) są spełnione. $\square$

Przykład ośrodkowej przestrzeni Banacha nie posiadającej fundamentalnego i totalnego układu biortogonalnego nie jest znany.

Rozdział 2

Podprzestrzenie c_0 skończonego kowymiaru

2.1. Konstrukcja bazy Auerbacha

W rozdziale tym, dla dowolnej podprzestrzeni c_0 skończonego kowymiaru podamy konstrukcję fundamentalnego i totalnego układu biortogonalnego. Naturalnie, zakładamy że podprzestrzeń ta jest domknięta - tak aby była przestrzenią Banacha.

Twierdzenie 2.1. *Niech X będzie podprzestrzenią c_0 i $\operatorname{codim}(X) = n \in \mathbb{N}$. Wówczas X ma bazę Auerbacha.*

Dowód. Najpierw rozważmy przypadek $n = 1$.
Weźmy niezerowe $f \in c_0^* = l_1$ takie, że $X = \ker f$. Przedstawmy $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n^*$, gdzie e_n^* to funkcjonał odpowiadający braniu n-tej współrzędnej. Bez straty ogólności (możemy przenumerować indeksy) przyjmijmy że $|a_1| = \sup_n |a_n|$ - to supremum jest osiągane i skończone, bo $a_n \to 0$. Połóżmy teraz dla $n = 1, 2, ...$

$$x_n = e_{n+1} - \frac{a_{n+1}}{a_1} e_1,$$

$$x_n^* = e_{n+1}^*,$$

jest jasne, że $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$ oraz $\|x_n\| = \|x_n^*\| = 1$ dla wszystkich n.

Pokażemy teraz, że $[x_n]_{n=1}^{\infty} = X$. Weźmy $y = (y_1, y_2, ...) \in X$. Wówczas $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_{n+1} x_n$. Wyjaśnień wymaga jedynie zgodność na pierwszej współrzędnej, ale $f(y) = 0$, więc $y_1 = \frac{-1}{a_1} \sum_{n=2}^{\infty} y_n a_n$, stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_{n+1} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_{n+1} e_{n+1} - e_1 \frac{1}{a_1} \sum_{n=2}^{\infty} y_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n = y.$$

Musimy jeszcze pokazać totalność. Niech $y = (y_1, y_2, ...) \in X$ i $x_n^*(y) = 0$ dla wszystkich n stąd $y_i = 0$ dla $i > 1$, czyli $f(y) = a_1 y_1 = 0$ więc musi być też $y_1 = 0$.

Uogólnijmy teraz powyższe rozumowanie na przypadek $n > 1$.
Niech

$$X = \bigcap_{k=1}^{n} \ker f^k,$$

$$f^i = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^i e_n^*,$$

gdzie $f^j \in l_1$ dla $j = 1, 2, .., n$ i funkcjonały te są liniowo niezależne. Rozważmy teraz nieskończoną macierz, w której wiersze wpisano współrzędne funkcjonałów $D = [f_j^i]_{1 \le j \le \infty}^{1 \le i \le n}$ i niech A będzie macierzą $(n \times n)$ złożoną z jej pierwszych n kolumn i załóżmy przez moment że ma ona maksymalny (co do modułu) wyznacznik spośród wszystkich macierzy $n \times n$ złożonych z kolumn D (istnienie A uzasadnimy później). Przystąpmy teraz do konstrukcji układu biortogonalnego. Chcielibyśmy postąpić analogicznie jak w przypadku $n = 1$, czyli dla $k = 1, 2, ...$ obrać

$$x_k^* = e_{n+k}^*,$$

$$x_k = e_{n+k} + v,$$

gdzie v zależy tylko od pierwszych n współrzędnych (v będzie dobrane dla konkretnego k, ale mając na uwadze jasność zapisu, nie uwzględniamy tego w notacji). Niech więc $v = (v_1, v_2, ..., v_n, 0, ...)$ i policzmy jakie powinny być wartości współrzędnych. Skoro $x_k \in X$ to musi zerować się na każdym z funkcjonałów f^j dla $j = 0, 1, 2, ..., n$ daje nam to n równań

$$f_1^j v_1 + f_2^j v_2 + ... + f_n^j v_n + f_{n+k}^j = 0.$$

Zapiszmy je w postaci macierzowej

$$A \begin{bmatrix} v_1 \\ .. \\ .. \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{k+n}^1 \\ .. \\ .. \\ -f_{k+n}^n \end{bmatrix}.$$

Na podstawie wzorów Cramera natychmiast otrzymujemy

$$v_i = \frac{det(A_i)}{det(A)},$$

gdzie A_i oznacza macierz A, przy czym za i-tą kolumnę wstawiono wektor

$$\begin{bmatrix} -f_{n+k}^1 \\ -f_{n+k}^2 \\ .. \\ -f_{n+k}^n \end{bmatrix}.$$

Zauważmy teraz, że

$$|v_i| = \left| \frac{det(A_i)}{det(A)} \right| \le 1,$$

gdyż $-det(A_i)$ to wyznacznik macierzy składającej się z pierwszych n kolumn macierzy D, gdzie za i-tą wstawiono kolumnę numer $n + k$ (macierzy D) i z "maksymalności"A wiemy, że $|det(A_i)| \le |det(A)|$. Pamiętając, że $x_k = e_{n+k} + v$ otrzymujemy $\|x_k\| = 1$. Równości $\|x_k^*\| = 1$ oraz $x_k^*(x_j) = \delta_{k,j}$ wynikają wprost z konstrukcji.

Pokażemy teraz, że $[x_k]_{k=1}^{\infty} = X$. Weźmy $y = (y_1, y_2, ...) \in X$. Wówczas $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_{n+k} x_k$, faktycznie, wyjaśnień wymaga jedynie zgodność na pierwszych n współrzędnych. Warunek $f^j(y) = 0$ dla każdego $1 \le j \le n$ zadaje nam układ równań na pierwszych n współrzędnych wektora y

$$f_1^j y_1 + f_2^j y_2 + ... + f_n^j y_n = -\sum_{k=n}^{\infty} f_k^j y_k.$$

Układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie, gdyż A jest nieosobliwa, a z ciągłości wyznacznika wynika, że rozwiązania te zależą w sposób ciągły od prawych stron równości. Ponieważ mamy do czynienia ze zbieżnymi szeregami, to rozważając skończone, dostatecznie dalekie sumy, odpowiadające wektorom y^M, gdzie $y_k^M = y_k$ dla $n < k < M$, a $y_1^M, y_2^M, ..., y_n^M$ są dobrane tak aby $y^M \in X$ (nieosobliwość A), otrzymujemy coraz lepsze przybliżenia y wektorami z $\text{span}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Totalność jest jasna, niech $y = (y_1, y_2, ...) \in X$ i $x_k^*(y) = 0$ dla $k = 1, 2, ...$, stąd $y_i = 0$ dla $i > n$, natomiast dla $i \leq n$ z pomocą przychodzi nam nieosobliwość A.

Pozostało nam uwolnić się od założenia dotyczącego macierzy A. Pokażemy, że macierz maksymalizująca wyznacznik faktycznie istnieje. O takiej macierzy będziemy mówić, że jest maksymalna. Z niezależności $\{f^j\}_{1 \leq j \leq n}$ mamy m takie, że macierz $[f_j^i]_{1 \leq j \leq m}^{1 \leq i \leq n}$ ma rząd n, niech teraz B będzie macierzą składającą się z liniowo niezależnych kolumn tej macierzy. Połóżmy

$$M = \sup_k \left\| (f_k^1, ..., f_k^n) \right\|$$

(M jest skończone i osiągane, bo $f^k \in l_1$). Weźmy teraz $N > m$ tak duże aby miała miejsce nierówność

$$M^{n-1} \left\| v \right\| < \left| det(B) \right|,$$

gdzie v jest dowolną kolumną D, dalszą niż N. Ponieważ na mocy nierówność Hadamarda wyznacznik szacuje się przez iloczyn norm kolumn, natychmiast otrzymujemy że macierz maksymalna nie może mieć kolumn dalszych niż N-te w macierzy D, czyli aby ją znaleźć wystarczy rozważyć pierwsze N kolumn, a stąd już wynika, że z dokładnością do przenumerowania indeksów, możemy zakładać, że pierwsze n kolumn macierzy D jest maksymalne.

$\square$

Dodatek A

Dowód lematu Dvoretzky'ego-Milmana

W dowodzie przyda się nam następujący lemat.

Lemat (Krasnosel'skii, Krein, Milman, [KKM], [PEL2])**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha, a E jej n-wymiarową podprzestrzenią. Wówczas dla każdej F - podprzestrzeni X o wymiarze przekraczającym n, takiej, że $F \cap E = \{0\}$ istnieje $f \in F$ o własności*

$$\|f\| = \|h(f)\| = 1,$$

gdzie $h : X \to X/E$ jest odwzorowaniem ilorazowym.

Dowód. Bez straty ogólności niech $\dim F = n+1$. Załóżmy najpierw, że X jest ściśle wypukła (jej kula jednostkowa nie zawiera odcinków). Niech S oznacza sferę jednostkową w przestrzeni F, a $(e_1, e_2, ..., e_n)$ będzie bazą E. Dla $j = 1, 2, ..., n$ zdefiniujmy odwzorowania $g_j : S \to R$ wzorem

$$g_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } \|te_j + x\| \geq 1 \text{ dla każdego t,} \\ t & \text{jeżeli } t \neq 0 \text{ i } \|te_j + x\| = 1. \end{cases}$$

Na mocy naszego założenia funkcje te są dobrze zdefiniowane, ciągłe oraz antypodyczne. Wreszcie, zdefiniujmy $g : S \to R^n$

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)).$$

Ponieważ g jest ciągłe i antypodyczne, to na mocy twierdzenia Borsuka istnieje $f \in S$ takie, że $g(f) = 0$. Z tego wynika już, że $\|f + e\| \geq 1$ dla dowolnego $e \in E$, wobec czego $\|h(f)\| = 1$.

Jeżeli X nie jest ściśle wypukła, to perturbując normę i korzystając z dowiedzionej już wersji twierdzenia, znajdziemy f_k takie, że $\|f_k\| = 1$ oraz $|\|h(f)\| - 1| < 1/k$, gdzie $k = 1, 2, ...$ Pamiętając, że F była skończonego wymiaru, możemy wyciągnąć zbieżny podciąg i przechodząc w nim do granicy otrzymujemy tezę. □

Możemy teraz przejść do dowodu lematu Dvoreztky'ego-Milmana. Wystarczy nam następująca wersja.

Lemat (Dvoretzky, Milman, [DVR], [MIL])**.** *Dla dowolnych liczb dodatnich q, n oraz $1 > \delta > 0$ istnieje stała M zależna od q, n, δ o następującej własności: jeśli Y jest przestrzenią Banacha o wymiarze przewyższającym M, E n-wymiarową podprzestrzenią Y, wówczas istnieje Z $\delta -$ Euklidesowa q-wymiarowa podprzestrzeń Y taka, że dla dowolnego $e \in E$ i $z \in Z$*

$$(1 + \delta)\|e + z\| \geq \|z\|.$$

Dowód. Połóżmy

$$\varepsilon = min(\delta, (1+\delta)^{1/4} - 1),$$

Niech $h : Y \to Y/E$ będzie odwzorowaniem ilorazowym. Załóżmy przez moment, że udało nam się znaleźć X ε-Euklidesową podprzestrzeń Y o wymiarze $2q+n-1$ taką, że $X \cap E = \{0\}$ (w szczególności h obcięte do X to identyczność). Mamy więc izomorfizmy: $U : l^2_{2q+n-1} \to X$ oraz $V : h(X) \to l^2_{2q+n-1}$ o własności $max(\|U\|\|U^{-1}\|, \|V\|\|V^{-1}\|) < 1+\varepsilon$. Rozważmy też operator $T : l^2_{2q+n-1} \to l^2_{2q+n-1}$ zadany wzorem $T = VhU$. Zaobserwujmy następującą własność operatora T, niech W będzie dowolną podprzestrzenią l^2_{2q+n-1} o wymiarze co najmniej $n+1$, wówczas możemy znaleźć $w \in W$ takie, że $\|w\| = 1$ oraz $\|Tw\| \geq (1+\varepsilon)^{-2}$. Istotnie, z lematu Krasnosel'skiiego-Kreina-Milmana możemy znaleźć $u \in U(W)$ takie, że $\|u\| = \|h(u)\| = 1$ połóżmy

$$w = \frac{U^{-1}u}{\|U^{-1}u\|},$$

widzimy, że

$$1 = \|w\| \leq (1+\varepsilon)\|Uw\| = (1+\varepsilon)\frac{\|u\|}{\|U^{-1}u\|} = (1+\varepsilon)\frac{\|V^{-1}Vhu\|}{\|U^{-1}u\|} \leq (1+\varepsilon)^2\frac{\|Vhu\|}{\|U^{-1}u\|}$$

$$= (1+\varepsilon)^2\frac{\|VhUU^{-1}u\|}{\|U^{-1}u\|} = (1+\varepsilon)^2\left\|T\frac{U^{-1}u}{\|U^{-1}u\|}\right\| = (1+\varepsilon)^2\|Tw\|.$$

Niech teraz H będzie dowolną $j-1$ wymiarową podprzestrzenią l^2_{2q+n-1}, przy czym $1 \leq j \leq q$. Korzystając z równości $\dim(A\cap B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A+B)$ mamy

$$\dim\Big(H^\perp \cap T^{-1}(T(H)^\perp)\Big) \geq 2q+n-1-2(j-1) \geq n+1.$$

Posłużmy się teraz obserwacją odnośnie T dla kolejnych podprzestrzeni $H_0, H_1, ..., H_q \in l^2_{2q+n-1}$ gdzie $H_0 = 0$ i $H_j = \mathrm{span}(g_1, g_2, ..., g_j)$. Pozwala nam to indukcyjnie zdefiniować ciąg $(g_1, g_2, ..., g_q)$ tak, aby dla $j = 1, 2, ..., q$ $\|g_j\| = 1$ oraz $\|Tg_j\| \geq (1+\varepsilon)^{-2}$, przy czym $g_j \in H^\perp_{j-1} \cap T^{-1}(T(H_{j-1})^\perp)$. Konstrukcja zapewniła nam, że ciągi $(g_1, g_2, ..., g_q)$ oraz $(Tg_1, Tg_2, ..., Tg_q)$ są ortogonalne. Nadto, dla $g \in H_q$ mamy

$$g = \sum_{j=1}^{N} t_j g_j,$$

$$\|Tg\|^2 = \sum_{j=1}^{N}|t_j|^2\|Tg_j\|^2 \geq (1+\varepsilon)^{-4}\sum_{j=1}^{N}|t_j|^2 = (1+\varepsilon)^{-4}\|g\|^2.$$

Możemy już zdefiniować $Z = U(H_q)$ i policzyć

$$\|e+z\| \geq \|h(z)\| = \|V^{-1}TU^{-1}z\| \geq (1+\varepsilon)^{-1}\|TU^{-1}z\| \geq (1+\varepsilon)^{-3}\|U^{-1}z\| \geq (1+\varepsilon)^{-4}\|z\|,$$

a więc $(1+\delta)\|e+z\| \geq \|z\|$.

Aby zakończyć dowód, musimy jeszcze pokazać, jak znaleźć X o pożądanych własnościach. Niech

$$M = C(\varepsilon, C(\varepsilon, 2q+2n-1) - n) + n,$$

gdzie $C(\cdot,\cdot)$ jest stałą z twierdzenia Dvoretzky'ego. Mamy $\dim(Y/E) \geq C(\varepsilon, C(\varepsilon, 2q+2n-1) - n)$. Na mocy twierdzenia Dvoretzky'ego istnieje Y_1 ε-Euklidesowa podprzestrzeń Y/E

o wymiarze $C(\varepsilon, 2q+2n-1)) - n$, czyli $\dim h^{-1}(Y_1) = C(\varepsilon, 2q+2n-1))$ wobec tego, znajdziemy Y_2 ε-Euklidesową podprzestrzeń $h^{-1}(Y_1)$ o wymiarze $2q+2n-1$. W końcu, Ponieważ $\dim E = n$ to uda nam się znaleźć X ε-Euklidesową podprzestrzeń Y_2 o wymiarze $2q+n-1$ taką, że $X \cap E = \{0\}$. □

Aby otrzymać wersję z rozdziału pierwszego, stosujemy powyższy lemat dla $q = N+m$ otrzymując $(N+m)$-wymiarową δ-Euklidesową podprzestrzeń Y. Ponieważ możemy rozważyć jej przecięcie z Y_1 otrzymujemy (w razie potrzeby przechodząc do podprzestrzeni) $F \subset Y_1$ N-wymiarową, δ-euklidesową podprzestrzeń Y. Ponieważ dla dowolnego $e \in E$ i $f \in F$

$$(1+\delta)\|e+f\| \geq \|f\|,$$

otrzymujemy $E \cap F = \{0\}$ oraz rzut $P : E+F \to_{na} F$ taki, że $\ker P = E$ oraz $\|P\| < 1+\delta$.

Bibliografia

[CBS] Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach Spaces. I. Sequence Spaces*, Springer-Verlag, (1977).

[MAR] Markushevich A. I, *On a basis in the wide sense for linear spaces*, Dokl. Akad. Nauk 41, 241-244 (1943).

[PEL1] Pełczyński A., Ovsepian R. I., *The existence in every separable Banach space of a fundamental and bounded biorthogonal sequence and related constructions of uniformly bounded orthonormal systems in* L^2, Studia Math. 54, 149-159 (1975).

[PEL2] Pełczyński A., *All separable Banach spaces admit for every* $\varepsilon > 0$ *fundamental and total biorthogonal sequences bounded by* $1+\varepsilon$, Studia Math. 55, 295-304 (1976).

[PIS] Pisier G., *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics 94, Cambridge University Press, (1989).

[DVR] Dvoretzky A., *Some results on convex bodies and Banach spaces*, Proc. Int. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem, 123-160 (1961).

[MIL] Milman V. D., *Geometric theory of Banach spaces, II. Geometry of the unit ball*, Uspehi Mat. Nauk 26 (1971).

[BOR] Borsuk K., *Drei Satze über die n-diemnsionalen Euklidische Sphäre*, Fund. Math. 21, 236-243, (1933).

[KKM] Krasnosel'skii M. A., Krein M. G., Milman D. P., *On defect numbers of linear operators in Banach spaces and on some geometric questions*, Sb. Trud. Mat. Inst. AN USSR 11, 97-112 (1948).

[HAD] Hadamard J., *Résolution d'une question relative aux déterminants*, Bulletin des sciences math, (1893).

[MEG] Megginson R., *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics 183, Springer Verlag, (1998).