Niech A zbiór (trzeba dodać jakieś założenia zapewne). Ax rzut na $x^{pineska}$ dowodzimy

$$|A| \leq \sqrt{|Ax||Ay|Az|}$$

Mamy

$$|A| \leq \int_{R^3} 1_{Ax} 1_{Ay} 1_{Az}$$

Teraz 1_{Az} nie zalezy od z wiec

$$\int_{R^3} 1_{Ax} 1_{Ay} 1_{Az} = \int_{R^2} 1_{Az} \int_R 1_{Ax} 1_{Ay} dz$$

i cauchy schwarz gdzie $f = 1_{Az}$ $g = \int_R 1_{Ax} 1_{Ay} dz$ daje

$$\int_{R^2} 1_{Az} \int_R 1_{Ax} 1_{Ay} dz \leq \sqrt{|Az|} \sqrt{\int_R dx \int_R dy [\int_R 1_{Ax} 1_{Ay} dz)^2]}$$

no i już wyłączyliśmy jeden rzut, teraz trzeba się uporać z

$$Z := \sqrt{\int_R dx \int_R dy [\int_R 1_{Ax} 1_{Ay} dz)^2]}$$

ale mamy

$$(\int_R 1_{Ax} 1_{Ay} dz)^2 < \int_R 1_{Ax} dz \int_R 1_{Ay} dz$$

więc

$$Z \leq \sqrt{\int_R dx \int_R dy \int_R 1_{Ax} dz \int_R 1_{Ay} dz}$$

ale $\int_R 1_{Ay} dz$ nie zależy od y, wiec

$$Z \leq \sqrt{\int_R dx \int_R dy \int_R 1_{Ax} dz \int_R 1_{Ay} dz} =$$

$$Z \leq \sqrt{\int_R dx \int_R 1_{Ay} dz (\int_R dy \int_R 1_{Ax} dz)} =$$

$$\sqrt{\int_R dx \int_R 1_{Ay} dz |Ax|} = \sqrt{|Ay||Ax|}$$