Geometria rzutowa - zadania kwalifikacyjne

17 maja 2012

Zadanie 1. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem odcinka BC. Symetralne boków AB i AC przecinają prostą AM w punktach odpowiednio P i Q. Proste BP i CQ przecinają się w punkcie X.
a) Wykazać, że $\angle BAX = \angle MAC$.
b) Analogicznie definiujemy punkty Y i Z. Pokazać, że okrąg opisany na trójkącie XYZ przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zadanie 2. Niech E, F będą punktami na bokach AD, BC czworokąta $ABCD$ takimi, że $AE = ED = BF = FC$. Półprosta FE przecina półproste BA, CD w punktach S i T odpowiednio. Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach SAE, SBF, TCF, TDE mają punkt wspólny.

Zadanie 3. Dany jest trójkąt ABC i jego ortocentrum H. Prosta k przechodzi przez punkt H. Proste l i m są obrazami prostej k w symetrii względem odpowiednio prostych AB i AC . Pokazać, że proste l i m przecinają się na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Zadanie 4. W trójkącie ABC okrąg wpisany jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Punkt X jest spodkiem wysokości opuszczonej z punktu D w trójkącie DEF. Analogicznie definiujemy punkty Y i Z. Pokazać, że proste AX, BY i CZ przecinają się na prostej Eulera trójkąta DEF.

Zadanie 5. Niech $ABCD$ będzie czworokątem, w którym $\angle BAD = \frac{\pi}{3}, \angle BAC = \frac{2\pi}{9}, \angle ABD = \frac{4\pi}{9}, \angle ABC = \frac{7\pi}{18}$. Wykazać, że $AB \perp CD$.

Zadanie 6. W trójkącie ABC punkty E i F są spodkami wysokości opuszczonych z wierzchołków odpowiednio B i C. Pokazać, że styczne do okręgu opisanego na trójkącie AEF w punktach E i F przecinają się w punkcie leżącym na odcinku BC.

Zadanie 7. Dany jest równoległobok $ABCD$, przy czym $\angle DAB > \frac{\pi}{2}$. Okrąg o średnicy AC przecina proste CB i CD po raz drugi w punktach E, F odpowiednio, a styczna w punkcie A do tego okręgu przecina prostą BD w punkcie P. Wykazać, że punkty P, E, F są współliniowe.

Zadanie 8. Na płaszczyźnie dane są cztery kwadraty $ABCD, AEFG, BGHK, HFMN$, jednakowo zorientowane, bez wspólnych punktów oprócz wierzchołków. Wykazać, że punkty D, E, M są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $2 \cdot AG = BG$.

Zadanie 9. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ punkty A', B', C', D', E' i F' są środkami boków odpowiednio AB, BC, CD, DE, EF i FA. Wyrazić pole sześciokąta $ABCDEF$ w zależności od pól trójkątów ABC', BCD', CDE', DEF', EFA' i FAB'.

Zadanie 10. W trójkącie ABC punkty O i H to odpowiednio środek okręgu opisanego i ortocentrum. Symetralna odcinka AH przecina boki AB i AC w punktach D i E odpowiednio. Pokazać, że $\angle DOA = \angle EOA$.

Zadanie 11. W trójkącie ostrokątnym ABC oznaczmy: ω - okrąg opisany na trójkącie ABC, O - środek ω, ω_1 - okrąg opisany na trójkącie AOC. Odcinek OQ jest średnicą okręgu ω_1. Punkty M, N leżą na prostych AQ i AC odpowiednio, przy czym czworokąt $AMBN$ jest równoległobokiem. Udowodnić, że proste MN, BQ przecinają się w punkcie leżącym na okręgu ω_1.

Zadanie 12. Mając dane odcinki długości R, r oraz kąt α, skonstruuj czworokąt wpisany w okrąg o promieniu R, opisany na okręgu o promieniu r oraz o kącie między przekątnymi równym α.